

Thème 03 : Électrocinétique

Corrigé des travaux dirigés

1 Chapitre 1 : Circuits en régime permanent

1.1 – Loi des mailles (1)

1. Dans $(ABCD A)$, l'additivité des tensions donne

$$U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD}.$$

Ainsi $U_{AD} = 5\text{ V} + 3\text{ V} + 4\text{ V} = \boxed{12\text{ V}}$.

2. Dans $(ADEA)$,

$$U_{ED} = U_{EA} + U_{AD} = U_{AD} - U_{AE}.$$

L'énoncé fourni comporte manifestement une coquille à la question 2(b), puisqu'il donne U_{ED} pour calculer U_{ED} . En supposant que la donnée voulue est $U_{AE} = 3\text{ V}$, on obtient

$$\boxed{U_{ED} = 9\text{ V}}.$$

1.2 – Loi des mailles (2)

On applique la loi des mailles successivement aux quatre mailles élémentaires, en respectant les orientations indiquées :

$$\boxed{U_4 = U_1 + U_3 + U_5 = 9\text{ V}}, \quad \boxed{U_7 = -U_2 + U_6 + U_3 = 7\text{ V}}.$$

Puis

$$\boxed{U_{10} = U_8 + U_7 = 15\text{ V}}, \quad \boxed{U_{11} = U_{10} + U_9 - U_4 = 26\text{ V}}.$$

1.3 – Lois de Kirchhoff

1. On choisit comme système le nœud A . En régime permanent, aucune charge ne s'y accumule : la somme des courants entrants est donc égale à la somme des courants sortants. Avec les sens indiqués sur la figure, i_1 arrive au nœud tandis que i_2 et i_3 en repartent. Ainsi

$$\boxed{i_1 = i_2 + i_3}.$$

2. Les deux mailles donnent par exemple

$$E - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0, \quad R_3 i_3 - R_2 i_2 = 0.$$

3. De $R_2 i_2 = R_3 i_3$, on tire d'abord, littéralement,

$$i_2 = \frac{R_3}{R_2} i_3, \quad i_1 = i_2 + i_3 = \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) i_3.$$

En reportant dans la première maille,

$$E = R_1 \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) i_3 + R_3 i_3,$$

d'où

$$\boxed{i_3 = \frac{E}{R_1 (1 + R_3/R_2) + R_3}},$$

puis

$$i_2 = \frac{R_3}{R_2} i_3, \quad i_1 = i_2 + i_3.$$

On effectue ensuite les applications numériques :

$$i_3 = 0,10 \text{ A}, \quad i_2 = 0,20 \text{ A}, \quad i_1 = 0,30 \text{ A}.$$

1.4 – Fonctionnement d'un potentiomètre

1. La résistance étant proportionnelle à la longueur,

$$R_1 = R \frac{x}{L}, \quad R_2 = R \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

2. À vide, aucun courant ne sort de C . Le diviseur de tension donne

$$U_{CA} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_{BA} = \frac{x}{L} U_{BA}.$$

3. Un potentiomètre peut servir de diviseur de tension réglable ou de capteur de position résistif.

1.5 – Ponts diviseurs

1. Premier circuit :

$$U_2 = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5,0 \text{ V}.$$

2. Second circuit : les trois résistances sont en parallèle. Le diviseur de courant généralisé donne

$$I_1 = I_0 \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} = 4,29 \text{ mA}.$$

3. Sans formule de diviseur : dans le premier circuit, $I = E/(R_1 + R_2)$ puis $U_2 = R_2 I$. Dans le second, $U = I_0/(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)$ puis $I_1 = U/R_1$.

1.6 – Diviseur de tension après simplification

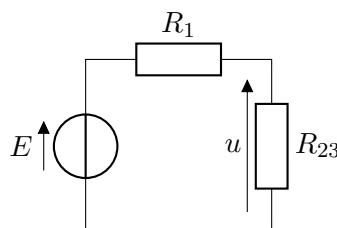
1. Les résistances R_2 et R_3 ont leurs deux bornes communes : elles sont donc en parallèle. On peut les remplacer par une résistance équivalente R_{23} telle que

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

On en déduit

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 2,0 \text{ k}\Omega.$$

2. Après remplacement de R_2 et R_3 par R_{23} , le circuit équivalent est :



Le circuit devient R_1 en série avec R_{23} :

$$u = E \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}}.$$

3. On remplace maintenant les résistances par leurs valeurs dans l'expression précédente :

$$u = 12 \text{ V} \times \frac{2,0 \text{ k}\Omega}{2,0 \text{ k}\Omega + 2,0 \text{ k}\Omega} = \boxed{6,0 \text{ V}}.$$

4. Le courant i_1 traverse R_1 avant de se partager entre les deux branches. La loi d'Ohm donne

$$i_1 = \frac{E - u}{R_1} = \frac{6,0 \text{ V}}{2,0 \text{ k}\Omega} = \boxed{3,0 \text{ mA}}.$$

Dans chacune des branches parallèles,

$$i_2 = \frac{u}{R_2} = \boxed{2,0 \text{ mA}}, \quad i_3 = \frac{u}{R_3} = \boxed{1,0 \text{ mA}}.$$

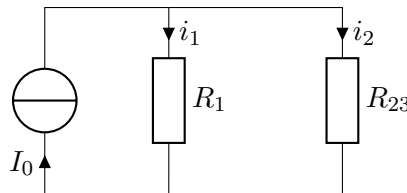
On vérifie bien la loi des nœuds : $i_1 = i_2 + i_3$.

1.7 – Diviseur de courant après simplification

1. Dans la branche de droite, aucun nœud ne sépare R_2 et R_3 : elles sont parcourues par la même intensité et sont donc en série. Leur résistance équivalente vaut

$$R_{23} = R_2 + R_3 = \boxed{3,0 \text{ k}\Omega}.$$

2. Après remplacement de la branche R_2 – R_3 par R_{23} , on obtient :



Les deux branches parallèles ont donc la même résistance :

$$i_1 = i_2 = \frac{I_0}{2} = 3,0 \text{ mA}.$$

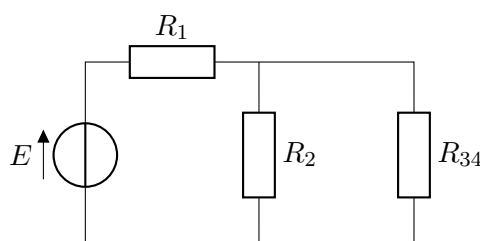
3. La tension commune vaut $u = R_1 i_1 = 9,0 \text{ V}$; on retrouve $i_2 = u/(R_2 + R_3) = 3,0 \text{ mA}$ et $I_0 = i_1 + i_2$.

1.8 – Deux diviseurs imbriqués

1. On commence par regrouper R_3 et R_4 :

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 6,0 \text{ k}\Omega.$$

Le circuit vu par la source se réduit alors à :



Ainsi

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_2 R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \boxed{3,0 \text{ k}\Omega}.$$

2. Après la simplification précédente, R_1 est en série avec R_{eq} . La tension u_2 est la tension aux bornes de R_{eq} : on peut donc appliquer le pont diviseur de tension,

$$u_2 = E \frac{R_{\text{eq}}}{R_1 + R_{\text{eq}}} = 15 \text{ V} \times \frac{3,0 \text{ k}\Omega}{5,0 \text{ k}\Omega} = \boxed{9,0 \text{ V}}.$$

3. Dans la branche R_3 – R_4 :

$$u_s = u_2 \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

4. Donc

$$u_s = E \frac{R_{\text{eq}}}{R_1 + R_{\text{eq}}} \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 6,0 \text{ V}.$$

5. R_1 et R_2 ne sont pas en série : le nœud commun est aussi relié à la branche R_3 – R_4 . Ils ne sont donc pas parcourus par la même intensité.

1.9 – Débit de charges

1. Pour un courant constant, la définition $I = dQ/dt$ s'intègre simplement en $Q = I\Delta t$. Il faut d'abord convertir la durée : $\Delta t = 2,0 \text{ min} = 120 \text{ s}$. Ainsi

$$Q = 25 \times 10^{-3} \text{ A} \times 120 \text{ s} = \boxed{3,0 \text{ C}}.$$

2. Avec $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$,

$$N = \frac{Q}{e} \simeq 1,9 \times 10^{19}.$$

3. Le courant conventionnel est défini dans le sens du déplacement des charges positives. Pour des électrons, $q < 0$: le produit « charge $\times$ vitesse orientée » conduit donc à un courant de sens opposé au déplacement des électrons.

1.10 – Caractéristique d'une source réelle

1. La pente vaut $\Delta U/\Delta I = -2,0 \Omega$ et l'ordonnée à l'origine $9,0 \text{ V}$:

$$\boxed{U = 9,0 - 2,0I} \quad (U \text{ en V, } I \text{ en A}).$$

2. Une source réelle de tension vérifie $U = E - rI$. En comparant cette expression à la droite obtenue à la question précédente, l'ordonnée à l'origine est la f.é.m. E et l'opposé de la pente est la résistance interne r . On lit donc

$$\boxed{E = 9,0 \text{ V}}, \quad \boxed{r = 2,0 \Omega}.$$

3. $RI = E - rI$, donc

$$\boxed{I = \frac{E}{R + r} = 1,29 \text{ A}}, \quad \boxed{U = RI = 6,43 \text{ V}}.$$

4. Les deux résistances sont parcourues par le même courant I . Elles reçoivent donc, par effet Joule, une puissance RI^2 ou rI^2 . Avec $I = 1,29 \text{ A}$,

$$\boxed{P_R = RI^2 \simeq 8,27 \text{ W}}, \quad \boxed{P_r = rI^2 \simeq 3,31 \text{ W}}.$$

1.11 – Diode Zener : modèle linéarisé

1. La pente vaut $(7.0 - 6.2)/(0.250 - 0.050) = 4,0 \Omega$. Ainsi

$$U = 6,0 \text{ V} + 4,0 \Omega I.$$

2. Dans ce domaine, la diode se comporte comme une source de f.é.m. $6,0 \text{ V}$ associée à une résistance dynamique $4,0 \Omega$.
3. Le point de fonctionnement est l'intersection de la caractéristique de la Zener,

$$U = U_Z + r_Z I,$$

et de la droite de charge du reste du circuit,

$$U = E - RI.$$

On résout donc littéralement

$$U_Z + r_Z I = E - RI \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E - U_Z}{R + r_Z}.$$

Puis $U = U_Z + r_Z I$. Numériquement,

$$I = \frac{12 \text{ V} - 6,0 \text{ V}}{20 \Omega + 4,0 \Omega} = 0,250 \text{ A}, \quad U = 7,0 \text{ V}.$$

Il se situe à la borne supérieure du domaine expérimental donné : le modèle reste donc applicable, à sa limite.

1.12 – Équivalence étoile–triangle

Posons $S = r_1 + r_2 + r_3$.

1. Dans l'étoile, avec les orientations de la figure :

$$U_{AB} = R_1 i_1 - R_2 i_2.$$

2. Dans le triangle, $U_{AB} = r_3 j_3$. Les lois de Kirchhoff conduisent à

$$j_3 = \frac{r_1 i_1 - r_2 i_2}{S},$$

donc

$$U_{AB} = \frac{r_1 r_3}{S} i_1 - \frac{r_2 r_3}{S} i_2.$$

3. Par identification des coefficients de i_1 et i_2 :

$$R_1 = \frac{r_1 r_3}{S}, \quad R_2 = \frac{r_2 r_3}{S}.$$

4. Par permutation circulaire,

$$R_3 = \frac{r_1 r_2}{S}.$$

5. Si $r_1 = r_2 = r_3 = r$, alors

$$R_1 = R_2 = R_3 = \frac{r}{3}.$$

1.13 – Loi des nœuds en termes de potentiels (théorème de Millman)

1. Avec les courants orientés vers O ,

$$i_1 = \frac{V_1 - V_0}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V_2 - V_0}{R_2}.$$

La loi des nœuds $i_1 + i_2 = 0$ donne

$$V_0 = \frac{V_1/R_1 + V_2/R_2}{1/R_1 + 1/R_2}.$$

2. À trois branches,

$$V_0 = \frac{V_1/R_1 + V_2/R_2 + V_3/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3}.$$

3. Plus généralement,

$$V_0 = \frac{\sum_{k=1}^n V_k/R_k}{\sum_{k=1}^n 1/R_k}.$$

4. On applique la relation précédente aux trois branches :

$$V_0 = \frac{12/(2.0 \times 10^3) + 5/(1.0 \times 10^3) + 0/(3.0 \times 10^3)}{1/(2.0 \times 10^3) + 1/(1.0 \times 10^3) + 1/(3.0 \times 10^3)} = \boxed{6,0 \text{ V}}.$$

On revient ensuite à la loi d'Ohm dans chaque branche :

$$i_1 = \frac{V_1 - V_0}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V_2 - V_0}{R_2}, \quad i_3 = \frac{V_3 - V_0}{R_3}.$$

Avec $V_0 = 6,0 \text{ V}$,

$$\boxed{i_1 = 3,0 \text{ mA}}, \quad \boxed{i_2 = -1,0 \text{ mA}}, \quad \boxed{i_3 = -2,0 \text{ mA}}.$$

Les signes négatifs indiquent un courant réel opposé au sens choisi.

1.14 – Pont de Wheatstone

1. En prenant la borne inférieure comme référence,

$$V_A = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad V_B = E \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

2. À l'équilibre $V_A = V_B$, d'où

$$\boxed{R_2 R_3 = R_1 R_4} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}}.$$

- 3.

$$\boxed{R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = 3,3 \text{ k}\Omega}.$$

4. La mesure est ramenée à la détection d'une tension nulle : il suffit d'ajuster une résistance connue jusqu'à l'équilibre, sans mesurer précisément une tension non nulle.

1.15 – Adaptation de puissance

1. La source réelle est modélisée par une source idéale E en série avec sa résistance interne r . Le même courant traverse donc r et la charge R . La loi des mailles donne

$$E - (R + r)I = 0,$$

d'où

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

La charge étant un résistor, la puissance qu'elle reçoit par effet Joule vaut $P_R = RI^2$, soit

$$P_R = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}.$$

2.

$$\frac{dP_R}{dR} = E^2 \frac{r - R}{(R + r)^3}.$$

La dérivée change de signe de $+$ vers $-$ pour $R = r$: P_R est maximale pour $R = r$.

3.

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4r}.$$

4. La puissance fournie par la source idéale vaut EI , donc

$$\eta = \frac{P_R}{EI} = \frac{R}{R + r}.$$

5. À l'adaptation $R = r$, $\eta = 1/2$. La moitié de la puissance fournie est dissipée dans la résistance interne : l'adaptation maximise la puissance utile, pas le rendement.

2 Chapitre 2 : Continuités dans les circuits

2.1 – Condensateur : tension imposée

1. En convention récepteur, le courant entre par la borne vers laquelle est orientée la tension ; la relation constitutive du condensateur est donc

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

On dérive la tension imposée :

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{T} e^{-t/T}.$$

Finalement,

$$i(t) = \frac{CU_0}{T} e^{-t/T}.$$

2. À $t = 0^+$, le facteur exponentiel vaut 1, tandis qu'il tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. On obtient donc

$$i(0^+) = \frac{CU_0}{T} = \frac{4,7 \mu\text{F} \times 10 \text{ V}}{2,0 \text{ ms}} = \boxed{23,5 \text{ mA}},$$

$$\boxed{i(+\infty) = 0}.$$

3. À long terme, u_C tend vers U_0 . L'énergie stockée dans un condensateur vaut $\mathcal{E}_C = Cu_C^2/2$. Ainsi

$$\mathcal{E}_C(+\infty) = \frac{1}{2} \times 4,7 \mu\text{F} \times (10 \text{ V})^2 = \boxed{235 \mu\text{J}}.$$

2.2 – Bobine : courant imposé

1. En convention récepteur, la tension aux bornes d'une bobine idéale vérifie

$$u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Le courant étant imposé, on commence par le dériver :

$$\frac{di}{dt} = \frac{I_0}{T} e^{-t/T}.$$

On obtient donc

$$u_L(t) = \frac{LI_0}{T} e^{-t/T}.$$

2. À l'instant initial, $e^{-t/T} = 1$. Numériquement,

$$u_L(0^+) = \frac{50 \text{ mH} \times 0,80 \text{ A}}{5,0 \text{ ms}} = \boxed{8,0 \text{ V}}.$$

À long terme, le courant devient constant : sa dérivée est nulle, donc

$$\boxed{u_L(+\infty) = 0}.$$

3. À long terme, i tend vers I_0 . L'énergie magnétique stockée vaut $\mathcal{E}_L = Li^2/2$. Ainsi

$$\mathcal{E}_L(+\infty) = \frac{1}{2} \times 50 \text{ mH} \times (0,80 \text{ A})^2 = \boxed{16 \text{ mJ}}.$$

2.3 – Commutation d'un circuit RC

1. Après un temps très long, le condensateur est ouvert : $i(0^-) = 0$ et aucune chute de tension n'existe dans R . Donc $u_C(0^-) = E$.
2. Une tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier instantanément : une discontinuité de u_C demanderait un courant impulsionnel puisque $i = C du_C/dt$. On utilise donc la continuité de u_C à la commutation :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = E.$$

3. À 0^+ , le condensateur impose la tension E à $R' = 2R$. Le courant de décharge a pour valeur absolue

$$|i(0^+)| = \frac{E}{R'} = \frac{E}{2R},$$

et circule de l'armature initialement positive du condensateur vers la résistance.

4. Après la commutation, aucune source n'alimente la boucle : le condensateur se décharge dans R' . Toute l'énergie initialement stockée finit par être dissipée par effet Joule. Le régime permanent final est donc

$$u_C(+\infty) = 0, \quad i(+\infty) = 0.$$

2.4 – Rupture du courant dans une bobine

1. Avant la commutation, la bobine idéale est un fil :

$$i_L(0^-) = \frac{E}{R}.$$

Par continuité du courant dans la bobine,

$$i_L(0^+) = \frac{E}{R}.$$

2. Juste après la commutation, R et L restent dans la même boucle : ils sont parcourus par le même courant E/R . La loi d'Ohm donne alors, en convention récepteur,

$$u_R(0^+) = R i_L(0^+) = R \frac{E}{R} = E.$$

3. Dans la boucle de décharge, $u_R + u_L = 0$, donc $u_L(0^+) = -E$ avec les mêmes orientations réceptrices. La bobine fournit alors de l'énergie au reste du circuit.
4. Sans chemin fermé, la bobine tenterait de maintenir son courant : $u_L = L di/dt$ peut devenir très grande lors d'une variation très rapide. On obtient une surtension, pouvant provoquer un arc électrique.

2.5 – Échange d'énergie entre deux condensateurs

1. Initialement, seul le premier condensateur est chargé. Sa charge vaut $Q = Cu_C = CE$, tandis que le second est déchargé. La charge totale portée par les armatures positives est donc

$$Q_{\text{tot},i} = CE.$$

2. Une fois les deux condensateurs reliés, des charges circulent de l'un vers l'autre, mais la charge totale portée par l'ensemble des deux armatures supérieures se conserve. À l'état final, les condensateurs identiques sont en parallèle : ils ont la même tension U_f et portent chacun la charge CU_f . Ainsi

$$CE = CU_f + CU_f = 2CU_f,$$

d'où

$$U_f = \frac{E}{2}.$$

3. Initialement,

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}CE^2.$$

Finalement,

$$\mathcal{E}_f = 2 \times \frac{1}{2}C \left(\frac{E}{2} \right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}CE^2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_i}.$$

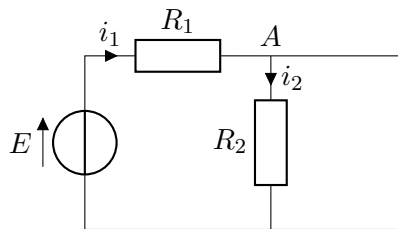
4. L'énergie manquante, $\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f = CE^2/4$, est dissipée par effet Joule dans les résistances du circuit réel, ici modélisées par r .

2.6 – Deux mailles avec un condensateur

1. Le condensateur est initialement déchargé :

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0}.$$

2. À 0^+ , le condensateur impose une tension nulle : il est instantanément équivalent à un fil. Le circuit équivalent est donc :



Ainsi $\boxed{V_A(0^+) = 0}$.

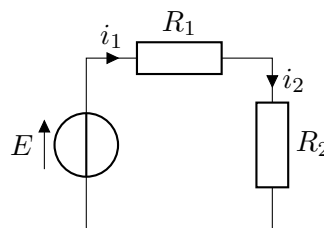
3. Comme $V_A(0^+) = 0$, la résistance R_2 a une tension nulle à ses bornes : $i_2(0^+) = 0$. La totalité de la tension E est donc aux bornes de R_1 , ce qui donne par la loi d'Ohm

$$i_1(0^+) = \frac{E}{R_1} = \frac{12 \text{ V}}{2,0 \text{ k}\Omega} = \boxed{6,0 \text{ mA}}, \quad \boxed{i_2(0^+) = 0}.$$

Au nœud A , $i_1 = i_2 + i_C$; on en déduit

$$\boxed{i_C(0^+) = 6,0 \text{ mA}}.$$

4. À long terme, C est un circuit ouvert. On obtient :



Il reste donc le diviseur R_1 - R_2 :

$$\boxed{u_C(+\infty) = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 8,0 \text{ V}}.$$

Le courant de la branche série vaut

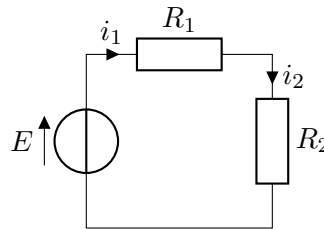
$$\boxed{i_1(+\infty) = i_2(+\infty) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2,0 \text{ mA}}, \quad \boxed{i_C(+\infty) = 0}.$$

2.7 – Deux mailles avec une bobine

1. La branche est initialement ouverte et $i_L(0^-) = 0$. Par continuité,

$$i_L(0^+) = 0.$$

2. À 0^+ , la branche (R_3, L) impose un courant nul et peut être ouverte pour déterminer le reste :



Il reste R_1 et R_2 en série. Le même courant traverse donc les deux résistances. Littéralement,

$$i_1(0^+) = i_2(0^+) = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

L'application numérique n'est effectuée qu'après avoir obtenu cette expression :

$$i_1(0^+) = i_2(0^+) = \frac{18 \text{ V}}{3 \Omega + 6 \Omega} = \boxed{2,0 \text{ A}}.$$

3. Comme $i_3(0^+) = i_L(0^+) = 0$, la chute de tension dans R_3 est nulle. La tension aux bornes de la bobine est donc égale à la tension aux bornes de R_2 :

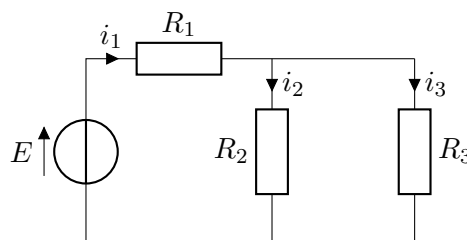
$$u_L(0^+) = R_2 i_2(0^+) = \frac{E R_2}{R_1 + R_2}.$$

Ainsi,

$$u_L(0^+) = \frac{18 \text{ V} \times 6 \Omega}{3 \Omega + 6 \Omega} = \boxed{12 \text{ V}}.$$

Cette valeur est écrite en convention récepteur avec la tension orientée du haut vers le bas.

4. À long terme, la bobine est un fil. Le circuit se réduit à :



Les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle. On introduit leur résistance équivalente

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Elle est en série avec R_1 , donc

$$i_1(+\infty) = \frac{E}{R_1 + R_{23}} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}.$$

La tension commune aux deux branches parallèles vaut ensuite

$$U = R_{23} i_1(+\infty),$$

puis

$$i_2(+\infty) = \frac{U}{R_2}, \quad i_L(+\infty) = i_3(+\infty) = \frac{U}{R_3}.$$

On effectue alors les applications numériques :

$$R_{23} = \frac{6\,\Omega \times 3\,\Omega}{6\,\Omega + 3\,\Omega} = 2,0\,\Omega,$$

$$i_1(+\infty) = \frac{18\,\text{V}}{3\,\Omega + 2\,\Omega} = \boxed{3,6\,\text{A}},$$

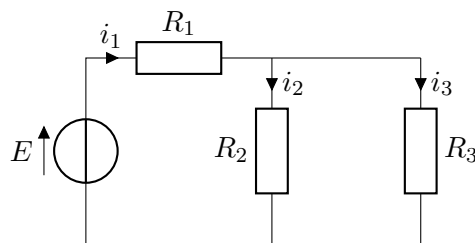
$$U = 2,0\,\Omega \times 3,6\,\text{A} = 7,2\,\text{V},$$

d'où

$$\boxed{i_2(+\infty) = 1,2\,\text{A}}, \quad \boxed{i_L(+\infty) = i_3(+\infty) = 2,4\,\text{A}}.$$

2.8 – Trois mailles avec R , L et C

1. Pour $t < 0$, le condensateur est un circuit ouvert et la bobine un fil. Le circuit utile devient :



Les résistances R_2 et R_3 sont en parallèle, donc

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Cette résistance équivalente est en série avec R_1 . On obtient donc d'abord, littéralement,

$$i_1(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_{23}} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}.$$

La tension U commune aux branches R_2 et R_3 vaut

$$U = R_{23} i_1(0^-),$$

d'où

$$i_2(0^-) = \frac{U}{R_2}, \quad i_L(0^-) = i_3(0^-) = \frac{U}{R_3}.$$

Ce n'est qu'à ce stade que l'on remplace par les valeurs numériques :

$$R_{23} = \frac{6\,\Omega \times 4\,\Omega}{6\,\Omega + 4\,\Omega} = 2,4\,\Omega,$$

$$i_1(0^-) = \frac{12\,\text{V}}{2\,\Omega + 2,4\,\Omega} = \boxed{2,73\,\text{A}},$$

$$U = 2,4\,\Omega \times 2,73\,\text{A} = 6,55\,\text{V},$$

puis

$$\boxed{i_2(0^-) = 1,09\,\text{A}}, \quad \boxed{i_L(0^-) = i_3(0^-) = 1,64\,\text{A}}.$$

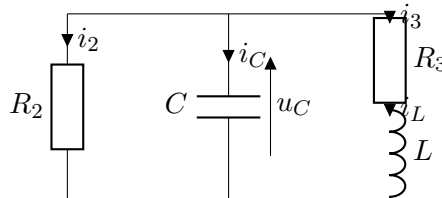
2. Le condensateur est branché entre les deux rails : sa tension est donc exactement la tension U calculée à la question précédente. Ainsi

$$u_C(0^-) = 6,55 \text{ V}.$$

Par continuité,

$$u_C(0^+) = 6,55 \text{ V}, \quad i_L(0^+) = 1,64 \text{ A}.$$

3. Après ouverture de K , la source et R_1 disparaissent du circuit actif. À 0^+ , le condensateur conserve sa tension et la bobine son courant :



Les trois branches sont en parallèle. Le condensateur impose donc instantanément

$$U(0^+) = u_C(0^+) = 6,55 \text{ V}.$$

4. La tension commune aux branches vaut $U(0^+) = u_C(0^+)$. On garde d'abord les expressions littérales :

$$i_2(0^+) = \frac{u_C(0^+)}{R_2}, \quad i_3(0^+) = i_L(0^+) = i_L(0^-).$$

En utilisant les résultats précédents,

$$i_2(0^+) = \frac{6,55 \text{ V}}{6 \Omega} = 1,09 \text{ A},$$

$$i_3(0^+) = i_L(0^+) = 1,64 \text{ A}.$$

Avec les trois courants orientés vers le bas, la loi des nœuds donne

$$i_C + i_2 + i_3 = 0,$$

d'où

$$i_C(0^+) = -2,73 \text{ A}.$$

Le courant réel dans le condensateur est donc dirigé vers le haut.

5. Dans la branche R_3-L ,

$$U = R_3 i_3 + u_L.$$

Or $R_3 i_3 = 4 \Omega \times 1,64 \text{ A} = 6,55 \text{ V} = U$, donc

$$u_L(0^+) = 0.$$

La loi des mailles est bien vérifiée.

6. Le réseau n'est plus alimenté. À long terme, toute l'énergie initialement stockée est dissipée dans les résistances :

$$u_C(+\infty) = 0, \quad i_C(+\infty) = i_2(+\infty) = i_3(+\infty) = i_L(+\infty) = 0.$$

Les tensions aux bornes de R_2 , R_3 et L sont également nulles.

3 Chapitre 3 : Circuits linéaires du premier ordre

3.1 – Décharge libre d'un circuit RC

1. On choisit u_C comme grandeur d'étude. La loi des mailles s'écrit

$$u_R + u_C = 0.$$

Or $u_R = Ri$ et, avec les conventions du schéma, $i = C du_C/dt$. On obtient donc

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0,$$

soit, après division par RC ,

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0.$$

On identifie avec $df/dt + f/\tau = f_\infty/\tau$:

$$\tau = RC, \quad u_{C,\infty} = 0.$$

2. Par continuité $u_C(0^+) = U_0$, donc

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/(RC)}.$$

Le courant de décharge est opposé au courant récepteur du condensateur ; avec la convention réceptrice associée à u_C ,

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-t/(RC)}.$$

3. L'expression littérale a été obtenue à la première question : $\tau = RC$. On effectue seulement maintenant l'application numérique :

$$\tau = RC = 10 \text{ ms}.$$

Pour atteindre 1 % de la tension initiale,

$$\frac{u_C(t)}{U_0} = e^{-t/\tau} = 0.01.$$

On prend le logarithme :

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0.01) = -\ln(100) \quad \Rightarrow \quad t = \tau \ln(100).$$

Numériquement,

$$t = 10 \text{ ms} \times \ln(100) = 46 \text{ ms}.$$

3.2 – Établissement du courant dans un circuit RL

1. On applique la loi des mailles dans le sens du courant. La tension du résistor vaut Ri et celle de la bobine, en convention récepteur, vaut $L di/dt$. On obtient donc

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

On divise ensuite par L afin de comparer directement avec la forme canonique du cours :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}.$$

En identifiant avec

$$\frac{dF}{dt} + \frac{1}{\tau}F = \frac{1}{\tau}F_{\infty},$$

on obtient

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}}, \quad \frac{i_{\infty}}{\tau} = \frac{E}{L} \implies \boxed{i_{\infty} = \frac{E}{R}}.$$

2. La solution d'un premier ordre s'écrit

$$i(t) = i_{\infty} + (i(0^+) - i_{\infty})e^{-t/\tau}.$$

Comme le courant de la bobine est continu et que le circuit était initialement au repos, $i(0^+) = 0$. Ainsi

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})}, \quad \tau = \frac{L}{R}.$$

3. Les résultats littéraux sont

$$\boxed{i(0^+) = 0}, \quad \boxed{i(+\infty) = \frac{E}{R}}, \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R}}.$$

Avec les valeurs de l'énoncé,

$$i(+\infty) = \frac{E}{R} = \boxed{0,30 \text{ A}}, \quad \tau = \frac{L}{R} = \boxed{3,0 \text{ ms}}.$$

4. On cherche t tel que $i(t) = 0.95i_{\infty}$. À partir de

$$\frac{i(t)}{i_{\infty}} = 1 - e^{-t/\tau},$$

on obtient

$$e^{-t/\tau} = 0.05 \implies \boxed{t = -\tau \ln(0.05) = \tau \ln(20)}.$$

Numériquement,

$$t = 3,0 \text{ ms} \times \ln(20) = \boxed{9,0 \text{ ms}}.$$

3.3 – Bilan énergétique d'une charge RC

1. Le condensateur est initialement déchargé, donc $u_C(0^+) = 0$, et sa tension tend vers E en régime permanent. Pour un circuit RC série, la constante de temps vaut $\tau = RC$. La solution du premier ordre est donc

$$\boxed{u_C(t) = E (1 - e^{-t/(RC)})}.$$

Le courant s'obtient ensuite par $i = C du_C/dt$, soit

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/(RC)}}.$$

2. La source idéale fournit la puissance $P_G = Ei(t)$. L'énergie fournie pendant toute la charge est donc l'intégrale de cette puissance :

$$W_G = \int_0^{\infty} Ei(t) dt = \frac{E^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-t/(RC)} dt.$$

Or $\int_0^{\infty} e^{-t/(RC)} dt = RC$, d'où

$$\boxed{W_G = CE^2}.$$

3. À l'état final, le condensateur est chargé sous la tension E . L'énergie qu'il stocke vaut donc

$$W_C = \frac{1}{2}CE^2.$$

4. Par bilan,

$$W_J = W_G - W_C = \frac{1}{2}CE^2.$$

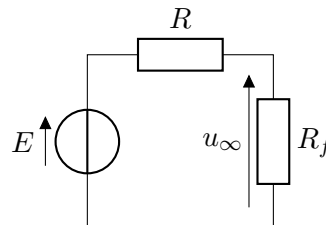
Directement,

$$W_J = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/(RC)} dt = \frac{1}{2}CE^2.$$

5. Le résultat ne dépend pas de R : augmenter R diminue la puissance instantanée mais allonge le transitoire dans la même proportion.

3.4 – Condensateur réel

1. Par continuité, $u_C(0^+) = 0$. À long terme, le condensateur idéal est ouvert ; le circuit devient :



$$u_C(+\infty) = u_\infty = E \frac{R_f}{R + R_f}.$$

2. Au nœud de tension u_C ,

$$\frac{E - u_C}{R} = \frac{u_C}{R_f} + C \frac{du_C}{dt}.$$

Donc

$$C \frac{du_C}{dt} + \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_f} \right) u_C = \frac{E}{R}.$$

3. On part de l'équation différentielle obtenue à la question précédente et on la divise par C :

$$\frac{du_C}{dt} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{1}{R_f C} \right) u_C = \frac{E}{RC}.$$

On l'identifie à la forme canonique utilisée dans le cours,

$$\frac{dF}{dt} + \frac{1}{\tau} F = \frac{1}{\tau} F_\infty.$$

Ici $F = u_C$. L'identification du coefficient de u_C donne

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{1}{R_f C} = \frac{R + R_f}{RR_f C},$$

d'où

$$\tau = \frac{RR_f}{R + R_f} C.$$

L'identification du second membre donne ensuite

$$\frac{u_\infty}{\tau} = \frac{E}{RC}.$$

En remplaçant τ par l'expression précédente, on retrouve bien

$$u_\infty = E \frac{R_f}{R + R_f}.$$

4. Finalement,

$$u_C(t) = u_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

3.5 – Condensateur alimenté par deux générateurs

1. Les courants arrivant au nœud sont

$$i_1 = \frac{E_1 - u}{R_1}, \quad i_2 = \frac{E_2 - u}{R_2}.$$

2. La loi des nœuds $i_1 + i_2 = C \, du/dt$ donne

$$C \frac{du}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}.$$

3. On divise l'équation différentielle par C afin de faire apparaître la forme canonique :

$$\frac{du}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} u = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 C}.$$

On identifie avec

$$\frac{dF}{dt} + \frac{1}{\tau} F = \frac{1}{\tau} F_\infty.$$

On obtient d'abord

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C.$$

Puis

$$\frac{u_\infty}{\tau} = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2 C}.$$

En utilisant l'expression de τ obtenue juste au-dessus,

$$u_\infty = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

Ainsi, τ et u_∞ sont tous les deux obtenus directement par identification de l'équation différentielle.

4. Comme $u(0^+) = 0$,

$$u(t) = u_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

5. On utilise les expressions littérales obtenues à la question précédente :

$$u_\infty = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}, \quad \tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C.$$

Après remplacement par les valeurs de l'énoncé,

$$u_\infty = 7,33 \text{ V}, \quad \tau = 6,67 \text{ ms}.$$

3.6 – Identification expérimentale d'un premier ordre

1. La première valeur donne $u_0 = 1,00 \text{ V}$. Les données tendent vers environ $u_\infty \simeq 4,2 \text{ V}$.
2. L'écart initial vaut $u_\infty - u_0 \simeq 3,2 \text{ V}$. Il doit être divisé par e à $t = \tau$, soit un écart d'environ $1,18 \text{ V}$, donc $u \simeq 3,02 \text{ V}$. Le tableau donne $3,03 \text{ V}$ à 4 ms :

$$\tau \simeq 4,0 \text{ ms}.$$

3.

$$u_\infty - u(t) = (u_\infty - u_0)e^{-t/\tau}.$$

Ainsi

$$\ln |u_\infty - u(t)| = \ln |u_\infty - u_0| - \frac{t}{\tau}.$$

Le tracé de $\ln |u_\infty - u|$ en fonction de t doit être affine, de pente $-1/\tau$.

Problème – Oscillateur à tube : une lampe au néon

1. En régime permanent, le condensateur est ouvert. Avec $R_L = \alpha R$,

$$u_\infty = E_0 \frac{R_L}{R + R_L} = E_0 \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$

2. Pendant une phase où la lampe possède la résistance $R_L = \alpha R$, on écrit la loi des nœuds au point de tension u :

$$\frac{E_0 - u}{R} = \frac{u}{R_L} + C \frac{du}{dt}.$$

En remplaçant R_L par αR et en divisant par C ,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1 + \alpha}{\alpha RC} u = \frac{E_0}{RC}.$$

On identifie avec la forme canonique

$$\frac{dF}{dt} + \frac{1}{\tau} F = \frac{1}{\tau} F_\infty.$$

On lit donc

$$\frac{1}{\tau_\alpha} = \frac{1 + \alpha}{\alpha RC} \quad \Rightarrow \quad \tau_\alpha = RC \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$

L'identification du second membre conduit aussi à

$$u_\infty = E_0 \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

ce qui est cohérent avec la valeur trouvée à la question précédente.

3. Pour $u(t_0) = u_0$,

$$u(t) = u_\infty + (u_0 - u_\infty)e^{-(t-t_0)/\tau_\alpha}.$$

4. Lampe éteinte, $\alpha \gg 1$: $u_\infty \simeq E_0$ et $\tau \simeq RC$. En prenant $t = 0$ au début de la charge, $u(0) = V_e$:

$$V_a = E_0 + (V_e - E_0)e^{-t_a/(RC)}.$$

Donc

$$t_a = RC \ln \left(\frac{E_0 - V_e}{E_0 - V_a} \right).$$

5. Lampe allumée, $\alpha \ll 1$:

$$\boxed{u_\infty \simeq \alpha E_0}, \quad \boxed{\tau \simeq \alpha RC}.$$

Pour que la tension puisse atteindre V_e , il faut que sa valeur asymptotique soit inférieure à V_e :

$$\boxed{\alpha E_0 < V_e}.$$

6. En prenant l'origine des temps au début de la décharge, $u(0) = V_a$:

$$V_e = u_\infty + (V_a - u_\infty)e^{-t_e/\tau}.$$

Ainsi

$$\boxed{t_e = \tau \ln\left(\frac{V_a - u_\infty}{V_e - u_\infty}\right)}.$$

Dans l'approximation $\alpha \ll 1$,

$$\boxed{t_e \simeq \alpha RC \ln\left(\frac{V_a - \alpha E_0}{V_e - \alpha E_0}\right)}.$$

7.

$$\boxed{T = t_a + t_e}.$$

Si $t_e \ll t_a$,

$$\boxed{T \simeq RC \ln\left(\frac{E_0 - V_e}{E_0 - V_a}\right)}.$$

4 Chapitre 4 : Circuits linéaires du deuxième ordre

4.1 – Circuit LC parallèle

1. Avant $t = 0$, le circuit est au repos. Les grandeurs continues donnent

$$u(0^+) = 0, \quad i_L(0^+) = 0.$$

La loi des nœuds impose alors $i_C(0^+) = I$.

2. $I = i_L + i_C$, avec $u = L di_L/dt$ et $i_C = C du/dt$. Comme I est constant,

$$0 = \frac{di_L}{dt} + C \frac{du}{dt} = \frac{di_L}{dt} + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2},$$

soit

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L = I.$$

3. On divise l'équation précédente par LC :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{I}{LC}.$$

On compare avec la forme canonique d'un système du deuxième ordre,

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dF}{dt} + \omega_0^2 F = \omega_0^2 F_\infty.$$

Il n'y a ici aucun terme en di_L/dt : le circuit LC idéal n'est pas amorti, ce qui correspond formellement à $Q \rightarrow +\infty$. On identifie surtout

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega_0^2 i_{L,\infty} = \frac{I}{LC}.$$

Ainsi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad i_{L,\infty} = I.$$

La solution est $i_L = I + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. $i_L(0) = 0$ donne $A = -I$, et $u(0) = L \dot{i}_L(0) = 0$ donne $B = 0$. Ainsi

$$i_L(t) = I [1 - \cos(\omega_0 t)].$$

- 4.

$$u(t) = L \frac{di_L}{dt} = I \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega_0 t).$$

i_L oscille entre 0 et $2I$ autour de I ; u est sinusoïdale, de moyenne nulle, en quadrature avec la partie oscillante de i_L .

4.2 – Énergie dans un oscillateur LC

1. Le circuit ne contient ni source ni résistance. La loi des mailles, associée aux relations constitutives de L et C , conduit à l'équation d'un oscillateur harmonique

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

La solution générale s'écrit $u_C = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$. Les conditions initiales $u_C(0) = U_0$ et $i(0) = 0$ imposent $A = U_0$ et $B = 0$, donc

$$u_C(t) = U_0 \cos(\omega_0 t).$$

Avec les orientations de l'énoncé, le courant traverse le condensateur en convention générateur : $i = -C du_C/dt$. On en déduit

$$i(t) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t).$$

2. L'énergie électrique d'un condensateur vaut $\mathcal{E}_C = C u_C^2 / 2$ et l'énergie magnétique d'une bobine vaut $\mathcal{E}_L = L i^2 / 2$. En remplaçant $u_C(t)$ et $i(t)$ par les expressions obtenues à la question précédente,

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} C U_0^2 \cos^2(\omega_0 t), \quad \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} C U_0^2 \sin^2(\omega_0 t).$$

3. En sommant les deux énergies et en utilisant $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on obtient

$$\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} C U_0^2 [\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)],$$

donc

$$\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} C U_0^2 = \text{constante}.$$

Il n'y a en effet aucun dipôle dissipatif dans le circuit LC idéal : l'énergie passe périodiquement du condensateur à la bobine et réciproquement.

4. L'énergie est entièrement électrique lorsque $\sin(\omega_0 t) = 0$, soit

$$t = k \frac{\pi}{\omega_0}.$$

Elle est entièrement magnétique lorsque $\cos(\omega_0 t) = 0$, soit

$$t = \frac{\pi/2 + k\pi}{\omega_0}.$$

4.3 – RLC série : identifier le régime

Pour un RLC série,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

1. On utilise d'abord les expressions littérales

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Pour $R = 5 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ et $C = 4 \text{ F}$,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1 \text{ H} \times 4 \text{ F}}} = 0,50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$Q = \frac{1}{5\Omega} \sqrt{\frac{1\text{ H}}{4\text{ F}}} = \boxed{0.10 < \frac{1}{2}}.$$

Régime apériodique. Les racines valent environ $r_1 = -0,0505\text{ s}^{-1}$ et $r_2 = -4,95\text{ s}^{-1}$, soit des constantes de temps

$$\boxed{\tau_1 \simeq 19,8\text{ s}}, \quad \boxed{\tau_2 \simeq 0,202\text{ s}}.$$

2. Pour $R = 2\Omega$, $L = 81\text{ H}$ et $C = 9\text{ F}$,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{81\text{ H} \times 9\text{ F}}} = \boxed{0,0370\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}},$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\Omega} \sqrt{\frac{81\text{ H}}{9\text{ F}}} = \boxed{1.50 > \frac{1}{2}}.$$

Régime pseudo-périodique :

$$\boxed{\tau_a = \frac{2Q}{\omega_0} = 81\text{ s}},$$

$$\boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \simeq 0,0349\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}, \quad \boxed{T \simeq 180\text{ s}}.$$

3. Pour $R = 20\Omega$, $L = 100\text{ mH}$ et $C = 10\text{ }\mu\text{F}$,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \boxed{1000\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \boxed{5.0}.$$

Le régime est pseudo-périodique :

$$\boxed{\tau_a = 10,0\text{ ms}}, \quad \boxed{\Omega \simeq 995\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}, \quad \boxed{T \simeq 6,31\text{ ms}}.$$

4.4 – Réponse apériodique complète

1. La loi des mailles donne

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C, \quad i = C \frac{du_C}{dt},$$

d'où

$$\boxed{LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E}.$$

2. On divise l'équation différentielle par LC :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{E}{LC}.$$

On identifie avec

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dF}{dt} + \omega_0^2 F = \omega_0^2 F_\infty.$$

L'identification terme à terme donne

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 u_{C,\infty} = \frac{E}{LC}.$$

Donc

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \quad \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}, \quad \boxed{u_{C,\infty} = E}.$$

Avec les valeurs numériques,

$$\boxed{\omega_0 = 1,00\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}, \quad \boxed{Q = 0.167 < \frac{1}{2}}.$$

Le régime est donc apériodique.

3. Le polynôme $r^2 + 6r + 1 = 0$ a pour racines

$$\boxed{r_1 = -3 + 2\sqrt{2}}, \quad \boxed{r_2 = -3 - 2\sqrt{2}} \quad (\text{s}^{-1}).$$

4. $u_C(0) = 0$ et $\dot{u}_C(0) = i(0)/C = 0$. Avec $u_C = E + Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$,

$$A + B = -E, \quad r_1 A + r_2 B = 0.$$

On obtient

$$\boxed{A = -E \frac{3 + 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}}, \quad \boxed{B = E \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}}.$$

5. Le mode lent correspond à $|r_1| = 3 - 2\sqrt{2} \simeq 0,172 \text{ s}^{-1}$, soit

$$\boxed{\tau_{\text{lent}} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} \simeq 5,83 \text{ s}}.$$

Le transitoire devient faible après quelques constantes de temps, typiquement de l'ordre de 30 s.

4.5 – Lecture graphique d'un régime pseudo-périodique

La courbe a été construite autour de $u_\infty = 5 \text{ V}$, avec une pseudo-période de 4 ms et une enveloppe de constante de temps 6 ms.

1. Les oscillations se font autour d'une valeur constante. Sur le graphique, l'axe médian des oscillations et des deux enveloppes est situé à 5,0 V : c'est la valeur de régime permanent. On lit donc

$$\boxed{u_\infty = 5,0 \text{ V}}.$$

2. Deux maxima de même nature sont séparés d'environ 4,0 ms :

$$\boxed{T \simeq 4,0 \text{ ms}}, \quad \boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 1,57 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

3. L'écart à u_∞ sur l'enveloppe est divisé par e en 6 ms :

$$\boxed{\tau \simeq 6,0 \text{ ms}}.$$

4.

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{1 + (\Omega\tau)^2},$$

$$\text{d'où } \boxed{Q \simeq 4,74}.$$

5. Comme $\tau = 2Q/\omega_0$,

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2Q}{\tau} \simeq 1,58 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

6. À $5\tau \simeq 30 \text{ ms}$, l'amplitude est inférieure à 1 % de sa valeur initiale. Cela représente environ $30/4 \simeq 7,5$ oscillations. Un Q nettement supérieur à 1/2 est cohérent avec plusieurs oscillations visibles.

4.6 – Deux enregistrements, deux amortissements

Les deux courbes ont une pseudo-période voisine de 3,0 ms, donc

$$\Omega \simeq 2,09 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Les enveloppes correspondent approximativement à $\tau_1 = 8,0 \text{ ms}$ et $\tau_2 = 3,0 \text{ ms}$.

1.

$$\tau_1 \simeq 8,0 \text{ ms}, \quad \tau_2 \simeq 3,0 \text{ ms}.$$

2. Avec $Q = \frac{1}{2} \sqrt{1 + (\Omega\tau)^2}$,

$$Q_1 \simeq 8.39, \quad Q_2 \simeq 3.18.$$

Puis $\omega_0 = 2Q/\tau$:

$$\omega_{0,1} \simeq 2,10 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \omega_{0,2} \simeq 2,12 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. Les deux valeurs sont très proches : compte tenu d'une lecture graphique, elles sont compatibles avec un même produit LC .

4. $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$: la résistance la plus grande correspond au plus petit Q , donc la courbe 2.

5. On repart des relations littérales. Comme

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

on isole d'abord C :

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2}.$$

Avec $L = 100 \text{ mH}$ et $\omega_0 \simeq 2,1 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,

$$C \simeq \boxed{2,25 \text{ } \mu\text{F}}.$$

Les deux lectures donnent environ 2,22 μF à 2,27 μF . Par ailleurs,

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{2L}{\tau}}.$$

On obtient alors

$$\boxed{R_1 \simeq 25 \text{ } \Omega}, \quad \boxed{R_2 \simeq 66,7 \text{ } \Omega}.$$

Problème – Décharge oscillante d'un condensateur

1. Par continuité,

$$\boxed{u_C(0^+) = U_0}, \quad \boxed{i(0^+) = 0}.$$

La chute de tension dans R est nulle à cet instant ; la loi des mailles donne donc, avec les orientations du schéma,

$$\boxed{u_L(0^+) = -U_0}.$$

2. Avec $i = C du_C/dt$ tel qu'imposé par l'énoncé, la loi des mailles conduit à

$$\boxed{LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0}.$$

3. On divise l'équation différentielle par LC :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0.$$

On l'identifie à la forme canonique

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dF}{dt} + \omega_0^2 F = \omega_0^2 F_\infty.$$

On lit alors

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 u_{C,\infty} = 0.$$

D'où

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \quad \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}, \quad \boxed{u_{C,\infty} = 0}.$$

4. Des oscillations amorties imposent $\boxed{Q > 1/2}$. En posant

$$\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}, \quad \tau_a = \frac{2Q}{\omega_0},$$

la solution s'écrit

$$u_C(t) = e^{-t/\tau_a} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)].$$

5. $u_C(0) = U_0$ donne $A = U_0$. De plus $i(0) = C \dot{u}_C(0) = 0$, donc

$$-\frac{A}{\tau_a} + B\Omega = 0 \implies B = \frac{U_0}{\Omega \tau_a}.$$

Ainsi

$$\boxed{u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau_a} \left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega \tau_a} \sin(\Omega t) \right]}.$$

6. Le facteur exponentiel est e^{-t/τ_a} : l'enveloppe décroît donc avec

$$\boxed{\tau_a = \frac{2Q}{\omega_0}}.$$

7.

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T} = 3,14 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

L'amplitude étant divisée par 2 en une période,

$$e^{-T/\tau_a} = \frac{1}{2} \implies \boxed{\tau_a = \frac{T}{\ln 2} \simeq 2,89 \text{ ms}}.$$

Puis

$$\Omega \tau_a = \sqrt{4Q^2 - 1} \implies \boxed{Q \simeq 4,56}.$$

Enfin

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2Q}{\tau_a} \simeq 3,16 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

8. Pour un RLC série, $Q = \omega_0 L / R$, donc

$$\boxed{L = \frac{QR}{\omega_0} \simeq 28,9 \text{ mH}}.$$

Puis

$$\boxed{C = \frac{1}{L\omega_0^2} \simeq 3,47 \text{ }\mu\text{F}}.$$

9.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2.$$

Donc

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = Cu_C \frac{du_C}{dt} + Li \frac{di}{dt} = u_C i + Li \frac{di}{dt}.$$

La loi des mailles donne $u_C + Ri + L di/dt = 0$, donc après multiplication par i ,

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -Ri^2 \leq 0}.$$

L'énergie électromagnétique décroît : elle est dissipée par effet Joule dans la résistance.