

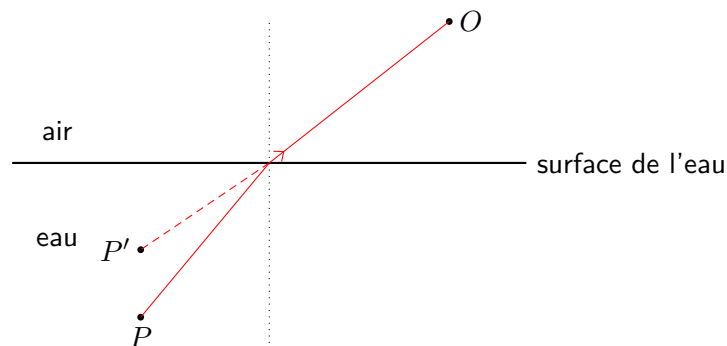
Thème 01 : Optique géométrique

Corrigé des travaux dirigés

1 Chapitre 1 : Lois et limites de l'optique géométrique

1.1 – Un poisson est-il vraiment là où on le voit ?

1. À l'interface eau–air, le rayon passe d'un milieu d'indice $n > 1$ à l'air. Il s'écarte donc de la normale : $r > i$.
2. L'œil suppose que la lumière s'est propagée rectilignement. Le prolongement du rayon réfracté dans l'eau coupe la verticale de P en P' . Ce point est l'image virtuelle observée.



3. Si x est la distance horizontale entre la verticale du poisson et le point d'émergence,

$$\tan i = \frac{x}{h}, \quad \tan r = \frac{x}{h_{\text{app}}}.$$

4. Snell-Descartes donne $n \sin i = \sin r$. Aux petits angles, $\sin u \simeq \tan u \simeq u$, donc $ni \simeq r$. En remplaçant $i \simeq x/h$ et $r \simeq x/h_{\text{app}}$,

$$h_{\text{app}} = \frac{h}{n}.$$

5. Comme $n > 1$, $h_{\text{app}} < h$: le poisson paraît plus proche de la surface.
6. Le harpon ne subit pas la réfraction de la lumière. En visant P' , il suit une ligne située au-dessus de P : il passe au-dessus du poisson.

1.2 – Mesure de l'indice d'un liquide

1. Une réflexion totale ne peut se produire que lorsque la lumière passe du milieu le plus réfringent vers le moins réfringent. Il faut donc $n_g > n_\ell$.
2. À la limite de la réflexion totale, le rayon réfracté rase l'interface : $r = 90^\circ$. La loi de Snell-Descartes donne alors

$$n_g \sin i_c = n_\ell \sin(90^\circ), \quad \text{soit} \quad n_\ell = n_g \sin i_c.$$

3. L'application numérique s'écrit

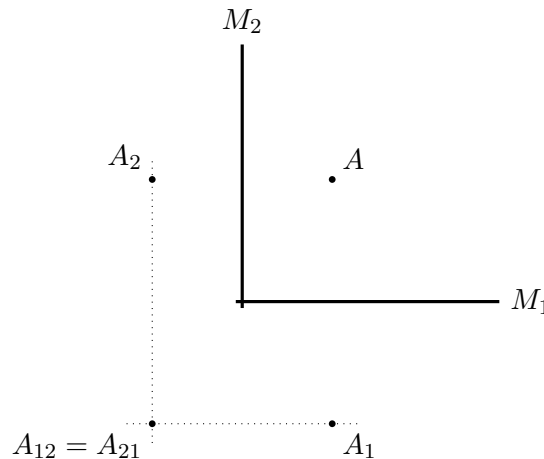
$$n_\ell = 1,70 \times \sin(52,0^\circ) \simeq 1,34.$$

Cette valeur est bien inférieure à n_g , ce qui est cohérent avec l'existence d'une réflexion totale.

4. Si le liquide était plus réfringent que le prisme, c'est-à-dire si $n_\ell \geq n_g$, aucun angle d'incidence dans le prisme ne conduirait à une réflexion totale. Le dispositif ne pourrait donc pas déterminer son indice par cette méthode.

1.3 – Deux miroirs perpendiculaires

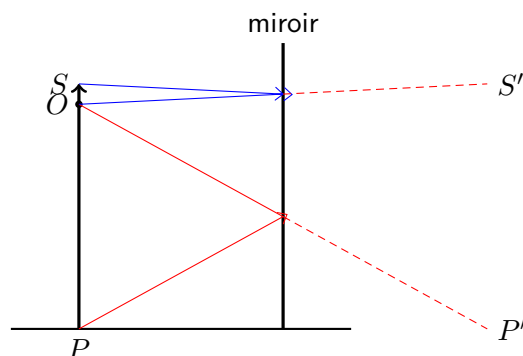
1. A_1 et A_2 sont les symétriques de A par rapport à M_1 et M_2 .
2. On réfléchit A_1 par M_2 et A_2 par M_1 .



3. Les deux doubles réflexions aboutissent au même point. Il existe donc trois images distinctes : A_1 , A_2 et A_{12} .
4. On constate $\overrightarrow{OA_{12}} = -\overrightarrow{OA}$.
5. Deux symétries d'axes perpendiculaires équivalent à une rotation de centre O et d'angle π .

1.4 – Quelle hauteur pour un miroir ?

1. On construit l'image P' des pieds, puis la droite (OP') . Son intersection avec le miroir donne le point de réflexion.
2. Par symétrie ou par triangles semblables, le point de réflexion est à la hauteur $h/2$.
3. Même construction avec l'image S' du sommet.



4. Le bord supérieur est à $(h + H)/2$. La hauteur minimale vaut

$$L_m = \frac{h + H}{2} - \frac{h}{2} = \boxed{\frac{H}{2}}.$$

5. Le résultat ne dépend pas de la distance au miroir.
6. Pour $H = 1,80\text{ m}$ et $h = 1,68\text{ m}$: bord inférieur à $0,84\text{ m}$, bord supérieur à $1,74\text{ m}$ et $L_m = 0,90\text{ m}$.

1.5 – Le cube de verre

1. À l'entrée dans le verre, la loi de Snell-Descartes donne

$$\sin i = n \sin r.$$

Ainsi,

$$\sin r = \frac{\sin 45^\circ}{1,50},$$

d'où

$$r \simeq 28,1^\circ.$$

2. Le rayon part du centre de la face gauche et se propage vers le bas. S'il atteignait directement la face droite, sa descente verticale serait

$$a \tan r.$$

Or

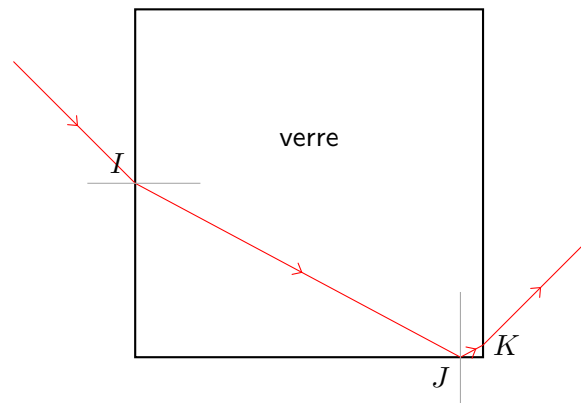
$$\tan 28,1^\circ \simeq 0,534,$$

donc

$$a \tan r > \frac{a}{2}.$$

Le rayon atteint donc la **face inférieure** avant la face droite.

La construction est la suivante :



3. La normale à la face inférieure est verticale. Les normales aux faces gauche et inférieure étant perpendiculaires, l'angle d'incidence sur la face inférieure vaut

$$i_2 = 90^\circ - r.$$

Numériquement,

$$i_2 \simeq 90^\circ - 28,1^\circ = 61,9^\circ.$$

4. L'angle critique pour le passage du verre vers l'air vérifie

$$n \sin i_c = 1,$$

soit

$$i_c = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,50}\right) \simeq 41,8^\circ.$$

Comme

$$i_2 > i_c,$$

le rayon subit une réflexion totale sur la face inférieure.

Après cette réflexion, il se propage vers la droite et vers le haut. Il atteint alors la face droite du cube, où son angle d'incidence vaut r . Comme $r < i_c$, il n'y a pas réflexion totale sur cette face : le rayon ressort du cube.

5. Pour que le rayon atteigne directement la face droite avant la face inférieure, sa descente verticale sur une distance horizontale a doit être inférieure à $a/2$. Il faut donc

$$a \tan r < \frac{a}{2},$$

soit

$$\tan r < \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r < \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

6. À l'entrée dans le verre,

$$\sin i = n \sin r.$$

La condition précédente devient donc

$$i < \arcsin\left[n \sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\right].$$

Avec $n = 1,50$,

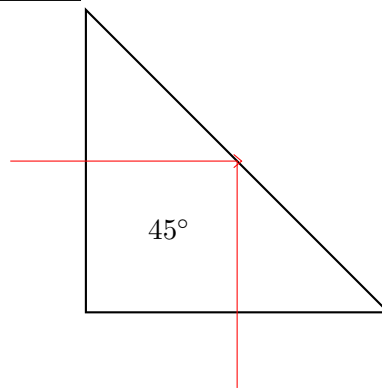
$$i < \arcsin\left[1,50 \times \sin\left(\arctan\frac{1}{2}\right)\right],$$

soit finalement

$$i < 42,2^\circ.$$

1.6 – Un prisme comme miroir

1. L'incidence est normale : le rayon n'est pas dévié.
2. La géométrie du triangle isocèle rectangle impose $i = 45^\circ$.
3. Il faut $45^\circ > \arcsin(1/n)$, donc $n > \sqrt{2}$.



4.

Le rayon incident horizontal ressort vertical : la déviation est de 90° .

5. $1,52 > \sqrt{2} \simeq 1,414$: la réflexion totale est possible.
6. La réflexion totale est très efficace et ne nécessite pas de dépôt métallique susceptible de s'oxyder ou de vieillir.

1.7 – Dispersion dans une goutte d'eau

1. $\sin r = \sin 60^\circ / n$: $r_R \simeq 40,6^\circ$ et $r_V \simeq 40,2^\circ$.
2. $D_R \simeq 19,4^\circ$ et $D_V \simeq 19,8^\circ$.
3. Le violet, pour lequel l'indice est plus grand, est davantage dévié.
4. Une réfraction unique ne suffit pas : le rayon subit une première réfraction, une réflexion interne, puis une seconde réfraction.
5. $a/\lambda = 10^{-4}/(5 \times 10^{-7}) \simeq 200 \gg 1$: la diffraction reste limitée et le modèle est raisonnable.

1.8 – Concevoir un réfractomètre

1. Il faut $n_p > 1.60$ sur toute la plage. A est donc exclu ; B et C conviennent.
2. $i_c = \arcsin(n_\ell/n_p)$. Pour B : $49,9^\circ$ à $70,3^\circ$. Pour C : $44,7^\circ$ à $59,9^\circ$.
3. En dérivant,

$$S = \frac{di_c}{dn_\ell} = \frac{1}{\sqrt{n_p^2 - n_\ell^2}}.$$

4. À $n_\ell = 1.45$, $S_B \simeq 1.13$ rad par unité d'indice et $S_C \simeq 0.86$ rad par unité d'indice.
5. B est plus sensible. C offre une marge plus grande vis-à-vis de la condition $n_\ell < n_p$; interviennent aussi transparence, dispersion, coût et résistance chimique.

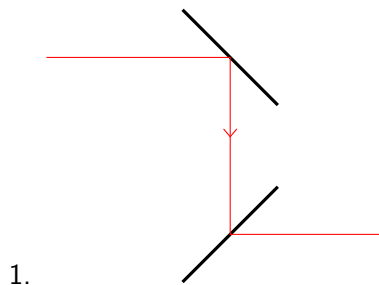
1.9 – Quelle fibre optique choisir ?

1. O.N. = $\sqrt{n_c^2 - n_g^2}$: A 0.121 ($\theta_{\max} \simeq 6,9^\circ$), B 0.209 ($12,1^\circ$), C 0.414 ($24,5^\circ$).
2. Plus l'ouverture numérique est grande, plus l'injection est facile : C, puis B, puis A.
3. La réflexion totale donne $\sin \beta_{\lim} = n_g/n_c$ et $\alpha_{\max} = 90^\circ - \beta_{\lim}$; ainsi $\cos \alpha_{\max} = n_g/n_c$.
4. $T_{\min} = n_c L / c_0$ et $T_{\max} = n_c L / (c_0 \cos \alpha_{\max})$, donc

$$\Delta t = \frac{L}{c_0} \left(\frac{n_c^2}{n_g} - n_c \right).$$

5. La dispersion croît de A vers C.
6. A pour une longue liaison, C pour un endoscope court ou une injection facile, B comme compromis.

1.10 – Le périscope

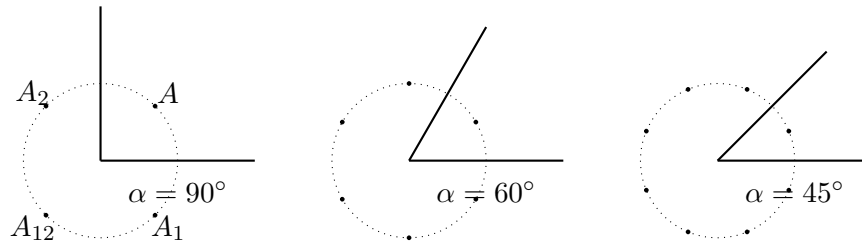


- 1.
2. Chaque miroir dévie le rayon de 90° ; après deux réflexions, le rayon émergent est parallèle à l'incident.
3. Deux symétries d'axes parallèles équivalent à une translation.
4. Une flèche verticale n'est pas renversée dans le plan étudié ; son image est translatée.
5. La propriété reste vraie tant que le rayon rencontre les deux miroirs : seules leurs orientations relatives comptent.

1.11 – Les miroirs d'un kaléidoscope

On peut raisonner de deux manières complémentaires : en construisant successivement les symétriques de l'objet, ou en utilisant la composition de deux symétries axiales.

1. Pour $\alpha = 90^\circ$, on construit d'abord les images A_1 et A_2 de A par chacun des miroirs. L'image de A_1 par le second miroir coïncide avec l'image de A_2 par le premier. On obtient donc trois images distinctes.
2. Pour $\alpha = 60^\circ$ puis $\alpha = 45^\circ$, on poursuit les réflexions : chaque nouvelle image est le symétrique de la précédente par l'un des deux miroirs. Toutes les images restent sur le cercle de centre O passant par A , car une symétrie conserve la distance au sommet commun O .



Dans ces trois constructions, l'un des points du cercle est l'objet réel A ; les autres sont ses images. On compte donc respectivement 3, 5 et 7 images distinctes.

3. Lorsque $2\pi/\alpha$ est un entier, les points obtenus sont régulièrement répartis sur le cercle. Le nombre total de positions, objet compris, vaut $2\pi/\alpha$. Le nombre d'images est donc

$$N = \frac{2\pi}{\alpha} - 1.$$

Cette formule donne bien $N = 3, 5$ et 7 pour les trois angles étudiés.

4. Une réflexion sur le premier miroir suivie d'une réflexion sur le second est équivalente à une rotation de centre O et d'angle 2α . Les images obtenues après des paires de réflexions sont donc les positions successives de A sous les rotations d'angles $2\alpha, 4\alpha, 6\alpha$, etc.

Si $2\pi/\alpha$ n'est pas entier, ces rotations ne reviennent pas nécessairement exactement sur la position initiale après un nombre entier d'étapes. La formule précédente ne peut donc pas être appliquée telle quelle ; de plus, la visibilité effective de certaines images dépend de la position de l'objet et de l'étendue réelle des miroirs.

5. La composition de deux symétries axiales dont les axes se coupent sous l'angle α est une rotation de centre leur point d'intersection et d'angle 2α . L'ordre des deux réflexions fixe le sens de cette rotation : inverser l'ordre change 2α en -2α .

1.12 – Principe de Fermat et loi de Snell-Descartes

1. Les triangles rectangles donnent

$$AM = \sqrt{x^2 + h_1^2}, \quad MB = \sqrt{(D-x)^2 + h_2^2}.$$

2. Dans le milieu j , la célérité est $c_j = c_0/n_j$. La durée totale est donc la somme des durées dans chaque milieu :

$$T(x) = \frac{AM}{c_1} + \frac{MB}{c_2} = \frac{1}{c_0} \left[n_1 \sqrt{x^2 + h_1^2} + n_2 \sqrt{(D-x)^2 + h_2^2} \right].$$

3. On dérive chaque racine en utilisant la dérivée d'une fonction composée :

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x^2 + h_1^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}},$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{(D-x)^2 + h_2^2} = -\frac{D-x}{\sqrt{(D-x)^2 + h_2^2}}.$$

Ainsi,

$$c_0 \frac{dT}{dx} = n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} - n_2 \frac{D-x}{\sqrt{(D-x)^2 + h_2^2}}.$$

4. Le principe de Fermat impose une durée stationnaire pour le trajet réellement suivi. L'abscisse choisie vérifie donc $T'(x) = 0$, soit

$$n_1 \frac{x}{AM} = n_2 \frac{D-x}{MB}.$$

5. Sur le schéma, $x/AM = \sin i_1$ et $(D-x)/MB = \sin i_2$. La condition précédente devient

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2,$$

qui est la loi de Snell-Descartes.

6. Si $n_1 = n_2$, alors $\sin i_1 = \sin i_2$. Les angles étant compris entre 0 et $\pi/2$, on a $i_1 = i_2$: les deux segments AM et MB sont alignés. Le trajet est donc rectiligne.
7. Avec les données numériques,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 1,50 \times \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2 + 1}}.$$

Une résolution numérique donne $x \simeq 3,31$ m. Le point de traversée est donc situé à 3,31 m de la projection de A sur le dioptré.

2 Chapitre 2 : Lentilles minces

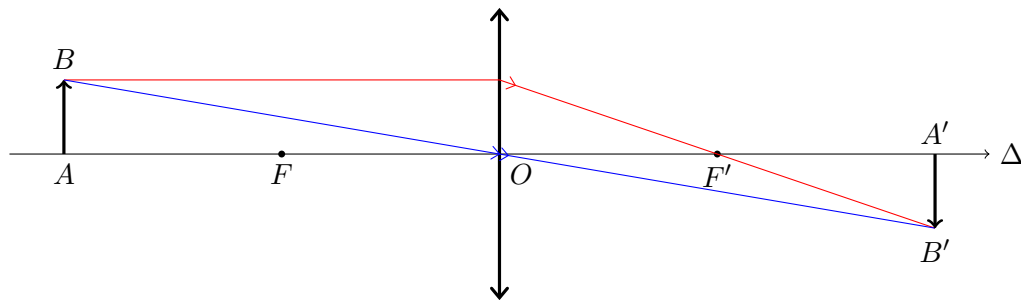
2.1 – Constructions élémentaires avec une lentille mince

Pour tous les cas, on utilise

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}, \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

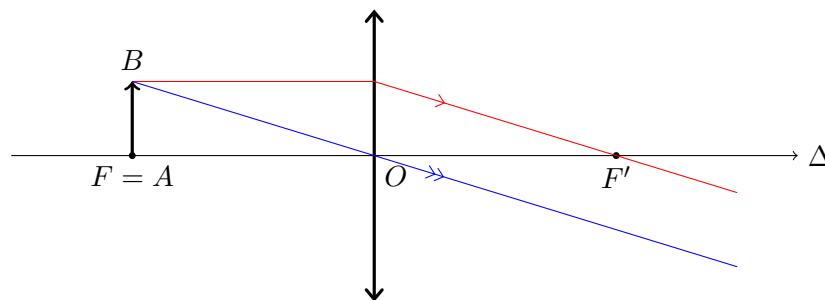
A. Lentille convergente, $f' = 4,0 \text{ cm}$

Cas 1. $\overline{OA} = -8,0 \text{ cm}$. Le rayon parallèle à l'axe ressort par F' ; le rayon passant par O n'est pas dévié. Leur intersection donne B' .



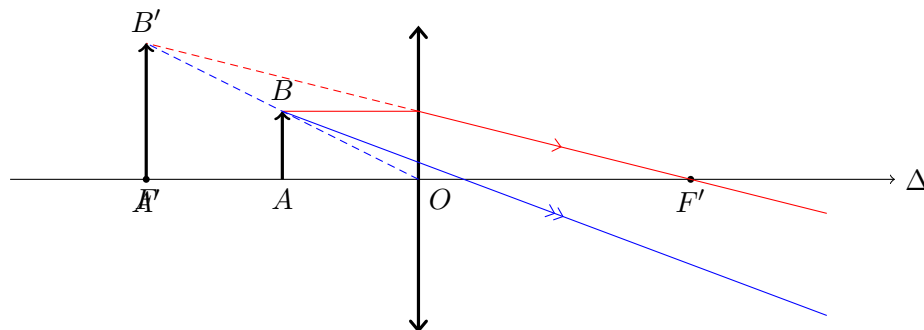
Le calcul donne $\overline{OA'} = +8,0 \text{ cm}$ et $\gamma = -1$. L'image est réelle, renversée et de même taille.

Cas 2. $\overline{OA} = f' = -4,0 \text{ cm}$. Les rayons émergents sont parallèles : l'image est située à l'infini.



La relation de conjugaison conduit bien à $1/\overline{OA'} = 0$.

Cas 3. $\overline{OA} = -2,0 \text{ cm}$. Les rayons émergents divergent; leurs prolongements se coupent en B' .

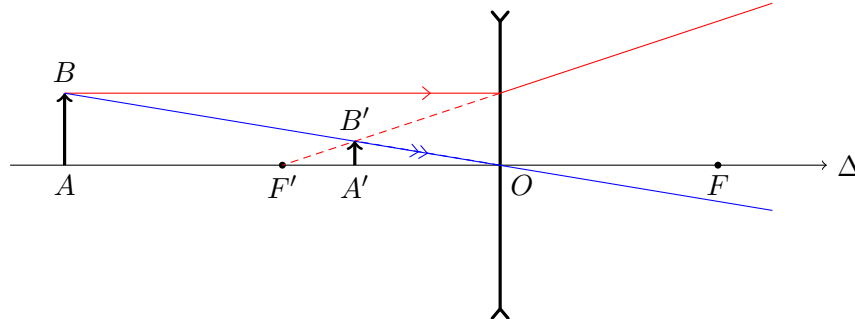


On trouve $\overline{OA'} = -4,0 \text{ cm}$ et $\gamma = +2$. L'image est virtuelle, droite et agrandie.

B. Lentille divergente, $f' = -4,0$ cm

Pour chacun des trois objets, on utilise deux rayons issus de B : le premier passe par O sans être dévié ; le second arrive parallèlement à l'axe et ressort en divergeant comme s'il provenait de F' . L'intersection de leurs prolongements virtuels donne B' .

Cas 1. $\overline{OA} = -8,0$ cm.

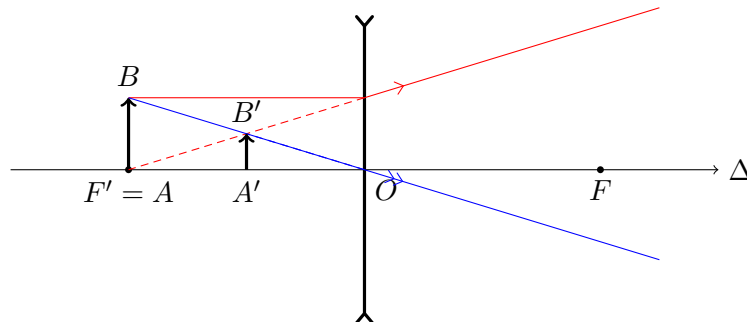


La relation de conjugaison donne

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{8},$$

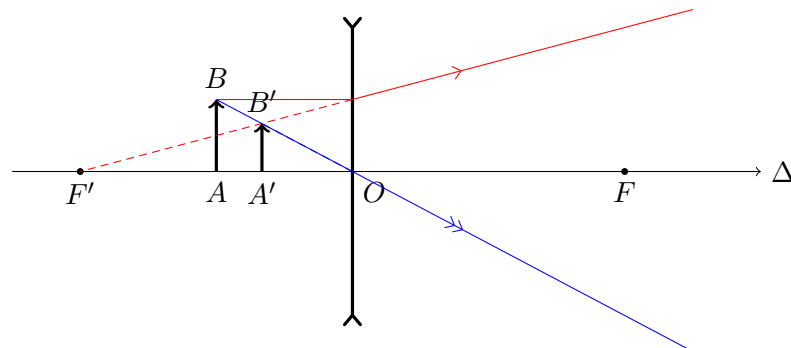
d'où $\overline{OA'} = -\frac{8}{3}$ cm $\simeq -2,67$ cm et $\gamma = 1/3$. L'image est virtuelle, droite et réduite.

Cas 2. $\overline{OA} = -4,0$ cm.



On obtient $\overline{OA'} = -2,0$ cm et $\gamma = +0.50$. L'image est encore virtuelle, droite et réduite.

Cas 3. $\overline{OA} = -2,0$ cm.

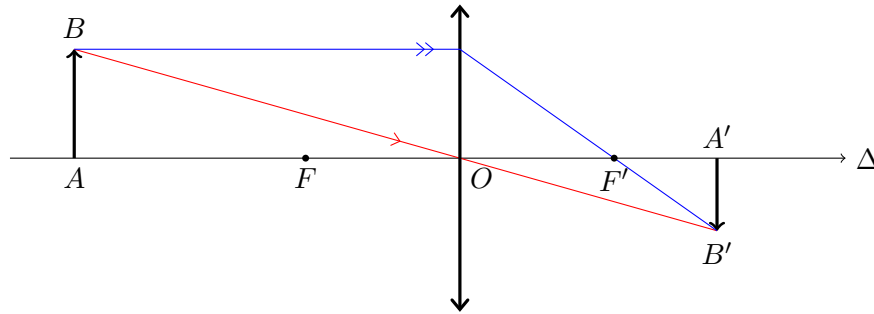


Le calcul conduit à $\overline{OA'} = -\frac{4}{3}$ cm $\simeq -1,33$ cm et $\gamma = 2/3$. L'image est virtuelle, droite et réduite, mais elle est moins réduite que dans les deux cas précédents.

Dans les trois cas, le signe négatif de $\overline{OA'}$ confirme que l'image se trouve du côté de l'objet : elle est virtuelle. Le signe positif de γ indique qu'elle est droite, et $0 < \gamma < 1$ qu'elle est réduite.

2.2 – Retrouver les caractéristiques d'une lentille

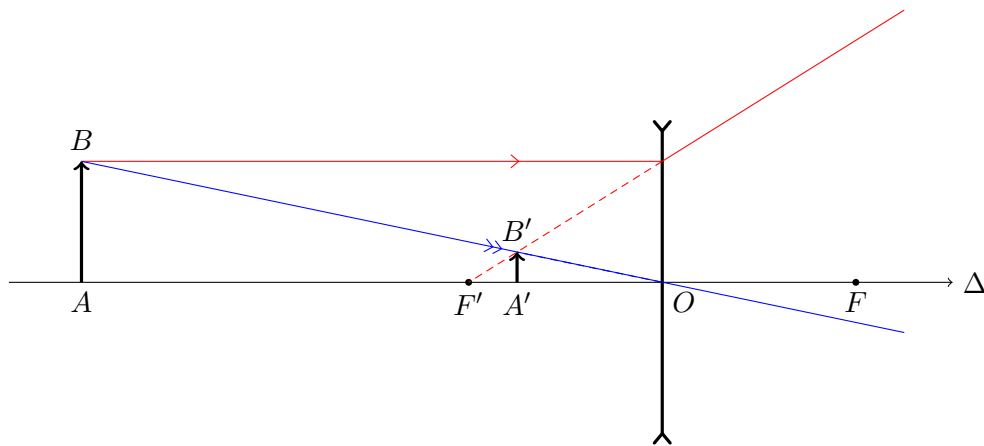
1. Le rayon joignant B à B' n'est pas dévié ; son intersection avec l'axe optique est donc O .
2. La lentille est représentée par la droite perpendiculaire à l'axe passant par O .
3. On trace depuis B un rayon incident parallèle à l'axe. Après la lentille, il doit passer par B' . Son intersection avec l'axe donne F' .
4. Par retour inverse, on trace un rayon issu de B' parallèle à l'axe du côté image ; son antécédent coupe l'axe en F .



5. Une image réelle renversée d'un objet réel est obtenue ici avec une lentille convergente.
6. Si les rayons sont trop inclinés ou trop éloignés de l'axe, le stigmatisme approché n'est plus assuré ; la construction par rayons particuliers n'est plus pertinente.

2.3 – Une lentille divergente

1. Même méthode que dans la partie B de l'exercice 2.1 : rayon passant par O et rayon parallèle à l'axe, prolongé virtuellement vers F' .



2. L'image est virtuelle, droite et réduite.
3. Avec $f' = -8,0 \text{ cm}$ et $\overline{OA} = -24 \text{ cm}$,

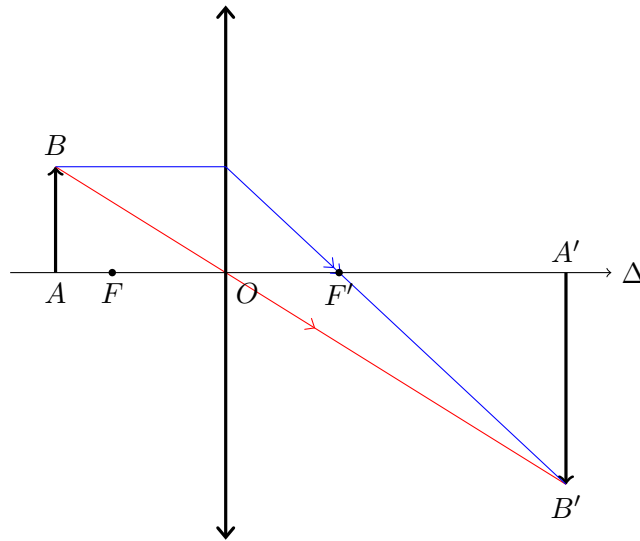
$$\overline{OA'} = -6,0 \text{ cm}.$$
4. $\gamma = \overline{OA'}/\overline{OA} = +0.25$, donc $\overline{A'B'} = 0,50 \text{ cm}$.
5. Le signe positif confirme une image droite ; $|\gamma| < 1$ confirme une image réduite ; $\overline{OA'} < 0$ confirme une image virtuelle située du côté objet.

2.4 – Où placer la lentille ?

1. On pose $x = -\overline{OA} > 0$ et $x' = \overline{OA'} > 0$. Puisque l'image réelle est deux fois plus grande et renversée, $\gamma = -x'/x = -2$. Avec $x + x' = D$, on obtient $x = D/3$ et $x' = 2D/3$.
2. Pour $D = 90$ cm, la lentille est à 30 cm de l'objet et 60 cm de l'écran.
3. La relation de conjugaison donne

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = \frac{xx'}{x+x'} = 20 \text{ cm.}$$

4. Le centre O est l'intersection de (BB') avec l'axe. Le rayon incident parallèle à l'axe permet ensuite de placer F' ; F est symétrique de F' par rapport à O .



5. On échange x et x' . La même lentille peut être placée à 60 cm de l'objet ; le grandissement vaut alors $-1/2$.

2.5 – Méthode de Bessel

1. Avec $x = -\overline{OA} > 0$ et $D - x = \overline{OA'}$, la conjugaison conduit à

$$x(D - x) = f'D \iff x^2 - Dx + f'D = 0.$$

2. $x_1 + x_2 = D$. La distance entre les deux positions est $d = |x_2 - x_1|$.
3. Comme $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = D^2 - 4f'D$,

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}.$$

4. $f' = (1.20^2 - 0.720^2)/(4 \times 1.20) = \boxed{0,192 \text{ m}}$.
5. Les positions sont $x_1 = 0,240$ m et $x_2 = 0,960$ m. Ainsi $\gamma_1 = -4$ et $\gamma_2 = -1/4$, donc $|\gamma_1\gamma_2| = 1$.

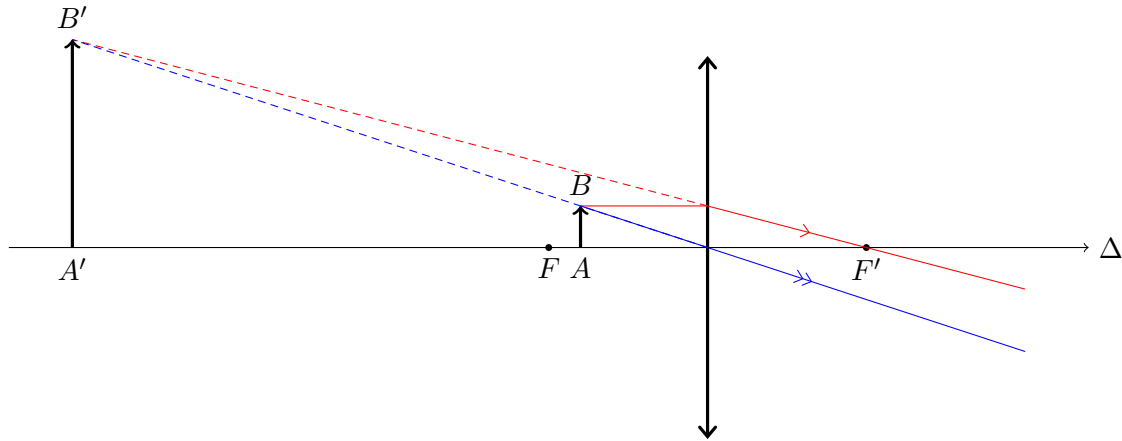
2.6 – Un vidéoprojecteur

1. $\gamma = -L/\ell = -200$: le signe négatif correspond à une image réelle renversée.
2. Avec $x' = 200x$ et $x + x' = 4,00$ m, $x \simeq 1,99$ cm et $x' \simeq 3,98$ m.
3. $f' = xx'/(x + x') \simeq \boxed{1,98 \text{ cm}}$.
4. L'image optique est renversée. La matrice peut être montée à l'envers ou l'image corrigée électroniquement.

5. Sur la branche de fort grandissement, si l'écran s'éloigne, la lentille se rapproche légèrement de la matrice.

2.7 – Une loupe

1. L'objet est entre F et O ; les rayons émergents divergent et leurs prolongements forment une image virtuelle, droite et agrandie, comme dans le cas A3 de l'exercice 2.1.



2. Pour $f' = 5,0 \text{ cm}$ et $\overline{OA} = -4,0 \text{ cm}$, $\overline{OA'} = -20 \text{ cm}$, $\gamma = +5$ et $A'B' = 25 \text{ mm}$.
 3. L'œil étant proche de la lentille, $\alpha \simeq AB/|OA| = 5/40 = 0.125 \text{ rad}$.
 4. $\alpha_0 \simeq AB/d_m = 5/250 = 0.020 \text{ rad}$.
 5. Pour un objet dans le plan focal, $\alpha \simeq AB/f'$ et $\alpha_0 \simeq AB/d_m$, donc

$$G \simeq \frac{d_m}{f'} = 5.$$

2.8 – Mise au point d'un appareil photographique

1. L'image se forme dans le plan focal image : le capteur est à $f' = 50 \text{ mm}$ de l'objectif.
 2. Avec $\overline{OA} = -2,0 \text{ m}$, $\overline{OA'} \simeq 51,28 \text{ mm}$.
 3. $\Delta x' = 51.28 - 50.00 \simeq \boxed{1,28 \text{ mm}}$.
 4. $\gamma \simeq -0.02564$. Une largeur de capteur de 36 mm correspond à une largeur objet $36/0.02564 \simeq 1,40 \text{ m}$.
 5. À $\overline{OA} = -2f'$, l'image est à $2f'$: le tirage passe de f' à $2f'$. La course devient donc de l'ordre de la focale.

2.9 – Profondeur de champ et diaphragme

1. Pour la mise au point à $2,0 \text{ m}$, $x'_0 = 51,28 \text{ mm}$.
 2. Les triangles formés par le diaphragme et le cône lumineux sont semblables :

$$d = D_d \left| 1 - \frac{x'_0}{x'} \right|.$$

3. Il faut $d \leq c$, donc

$$\left| 1 - \frac{x'_0}{x'} \right| \leq \frac{c}{D_d}.$$

4. $D_d = f'/N = 12,5 \text{ mm}$. Après détermination des deux valeurs limites de x' puis retour à la distance objet par Descartes, la zone nette va environ de $1,83 \text{ m}$ à $2,21 \text{ m}$.
 5. $D_d = 6,25 \text{ mm}$; la zone nette va environ de $1,68 \text{ m}$ à $2,46 \text{ m}$. Fermer le diaphragme augmente donc la profondeur de champ.

6. Un diaphragme plus fermé laisse entrer moins de lumière : il faut augmenter la durée d'exposition ou la sensibilité du capteur.

2.10 – Macrophotographie et bague-allonge

1. Avec $\overline{OA'} = f' + e$,

$$\frac{1}{f' + e} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \boxed{\overline{OA} = -\frac{f'(f' + e)}{e}}.$$

- 2.

$$|\gamma| = \left| \frac{f' + e}{\overline{OA}} \right| = \boxed{\frac{e}{f'}}.$$

3. $e = 0.50f' = 30 \text{ mm}$ et $\overline{OA} = -180 \text{ mm}$.

4. $e = f' = 60 \text{ mm}$ et $\overline{OA} = -2f' = -120 \text{ mm}$.

5. Le tirage augmente et le flux est réparti sur une image plus grande ; l'éclairement du capteur diminue fortement.

3 Chapitre 3 : Associations de lentilles minces

3.1 – Deux lentilles successives

1. Avec $f'_1 = 10 \text{ cm}$ et $\overline{O_1 A} = -30 \text{ cm}$, la relation de conjugaison de Descartes appliquée à L_1 donne

$$\frac{1}{\overline{O_1 A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f'_1}, \quad \frac{1}{\overline{O_1 A_1}} = \frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{30 \text{ cm}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\overline{O_1 A_1} = 15 \text{ cm}}.$$

L'image intermédiaire est donc réelle et située à droite de L_1 .

2. Comme $\overline{O_1 O_2} = 40 \text{ cm}$,

$$\overline{O_2 A_1} = \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 A_1} = -40 \text{ cm} + 15 \text{ cm} = \boxed{-25 \text{ cm}}.$$

Le point A_1 est situé à gauche de L_2 : il constitue donc un objet réel pour la seconde lentille.

3. Pour L_2 ,

$$\frac{1}{\overline{O_2 A'}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2},$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{O_2 A'}} = \frac{1}{15 \text{ cm}} - \frac{1}{25 \text{ cm}} = \frac{2}{75 \text{ cm}}.$$

On obtient

$$\boxed{\overline{O_2 A'} = 37,5 \text{ cm}}.$$

L'image finale est donc réelle.

4. Les grandissements valent

$$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} = \frac{15 \text{ cm}}{-30 \text{ cm}} = -0,50,$$

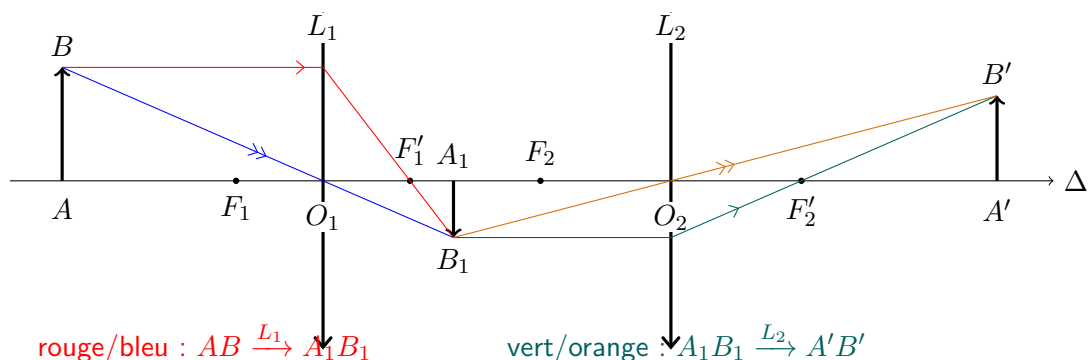
$$\gamma_2 = \frac{\overline{O_2 A'}}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{37,5 \text{ cm}}{-25 \text{ cm}} = -1,50.$$

Le grandissement total est le produit des deux grandissements :

$$\boxed{\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = +0,75}.$$

L'image finale est donc droite par rapport à l'objet initial et réduite.

5. La construction doit être faite en deux étapes. On construit d'abord $A_1 B_1$ comme image de AB par L_1 (rayons rouge et bleu). Puis $A_1 B_1$ devient l'objet de L_2 ; on effectue une seconde construction avec deux nouveaux rayons (vert et orange).



La figure confirme les résultats du calcul : A_1B_1 est réelle et renversée par rapport à AB ; la seconde lentille la renverse à nouveau, si bien que l'image finale est droite par rapport à l'objet initial.

3.2 – Construire un système afocal

1. Un objet situé à l'infini envoie sur L_1 un faisceau de rayons parallèles. Une lentille convergente forme alors son image dans son plan focal image. Pour un objet hors axe, le point image intermédiaire B_1 appartient donc au plan passant par F'_1 et perpendiculaire à l'axe.
2. Pour que L_2 transforme à son tour ce point B_1 en une image située à l'infini, B_1 doit appartenir au plan focal objet de L_2 . Il faut donc que les deux plans focaux soient confondus, soit

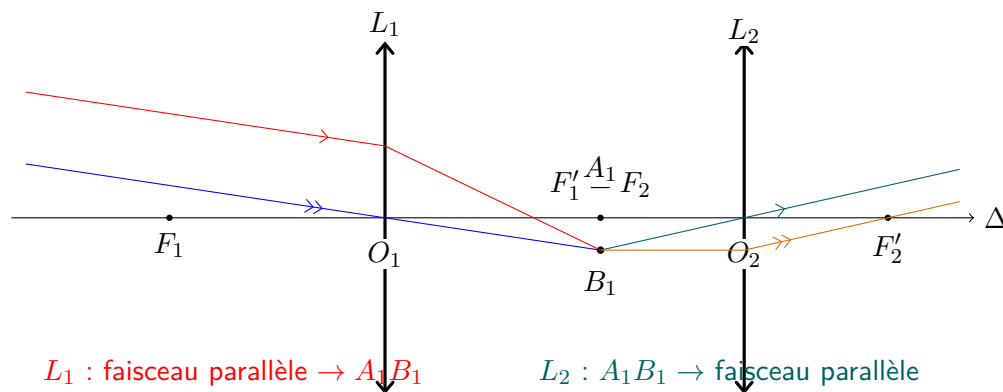
$$F'_1 = F_2.$$

Sur l'axe, cela donne

$$\overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2.$$

3. Le système est dit *afocal* parce qu'il transforme un faisceau incident parallèle en un faisceau émergent parallèle : un objet à l'infini donne une image finale à l'infini.

La figure suivante sépare volontairement les deux constructions. Les rayons rouge et bleu servent à construire B_1 par L_1 ; à partir de B_1 , les rayons vert et orange montrent que L_2 donne un faisceau parallèle.



4. Si $h = \overline{F'_1B_1}$ désigne la hauteur algébrique de l'image intermédiaire, l'approximation des petits angles donne, pour l'objectif,

$$h \simeq f'_1 \alpha.$$

Pour l'oculaire, puisque B_1 est dans son plan focal objet,

$$h \simeq -f'_2 \alpha'.$$

On en déduit

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}.$$

5. Le signe négatif indique que l'angle émergent est de signe opposé à l'angle incident : l'image angulaire est renversée. La valeur absolue

$$\left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = \frac{f'_1}{f'_2}$$

mesure le facteur par lequel l'instrument augmente l'angle apparent.

3.3 – Lentilles accolées et vergence

1. Les vergences de deux lentilles minces accolées s'additionnent :

$$V = V_1 + V_2 = 5,0 \delta - 2,0 \delta = \boxed{3,0 \delta}.$$

La distance focale image équivalente vaut donc

$$f' = \frac{1}{V} = \frac{1}{3,0 \text{ m}^{-1}} = \boxed{0,333 \text{ m}} \simeq 33,3 \text{ cm}.$$

2. La vergence équivalente étant positive, l'association est convergente.

3. Pour $\overline{OA} = -50 \text{ cm}$,

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{0,333 \text{ m}} - \frac{1}{0,50 \text{ m}} \simeq 1,0 \text{ m}^{-1},$$

d'où

$$\boxed{\overline{OA'} \simeq 1,00 \text{ m}}.$$

L'image est réelle car $\overline{OA'} > 0$.

4. Une focale équivalente de 50 cm correspond à la vergence

$$V = \frac{1}{0,50 \text{ m}} = 2,0 \delta.$$

Il faut donc

$$V_2 = V - V_1 = 2,0 \delta - 5,0 \delta = \boxed{-3,0 \delta}.$$

5. Les distances focales ne s'additionnent pas directement : pour des lentilles accolées, c'est la quantité $1/f'$, c'est-à-dire la vergence, qui est additive.

3.4 – Accommodation de l'œil réduit

1. Pour un objet à l'infini, l'œil au repos doit former l'image sur la rétine, située à $d = 17,0 \text{ mm}$ du centre optique. On a donc

$$f'_{\min} = d = 17,0 \text{ mm}, \quad V_{\min} = \frac{1}{d} \simeq \boxed{58,8 \delta}.$$

2. Au punctum proximum, $\overline{OA} = -25 \text{ cm}$ et $\overline{OA'} = 17,0 \text{ mm}$. Ainsi

$$V_{\max} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{0,0170 \text{ m}} + \frac{1}{0,25 \text{ m}} \simeq \boxed{62,8 \delta}.$$

3. L'amplitude d'accommodation vaut

$$\boxed{\mathcal{A} = V_{\max} - V_{\min} \simeq 4,0 \delta}.$$

4. Si l'œil ne peut plus augmenter sa vergence que de $2,0 \delta$, on a

$$V_{\max} - V_{\min} = \frac{1}{PP} = 2,0 \text{ m}^{-1},$$

d'où

$$\boxed{PP = 0,50 \text{ m} = 50 \text{ cm}}.$$

5. Le recul du punctum proximum correspond à une diminution de la capacité d'accommodation : c'est le comportement caractéristique de la presbytie.

3.5 – Corriger une myopie

1. Un œil myope au repos voit nettement les objets situés à son punctum remotum. Pour observer un objet à l'infini sans accommoder, le verre correcteur doit donc former de cet objet une image virtuelle située au punctum remotum de l'œil.
2. Si les lunettes sont accolées à l'œil, cette image doit être située à 50 cm devant le verre. Un objet à l'infini ayant son image dans le plan focal image de la lentille, on obtient

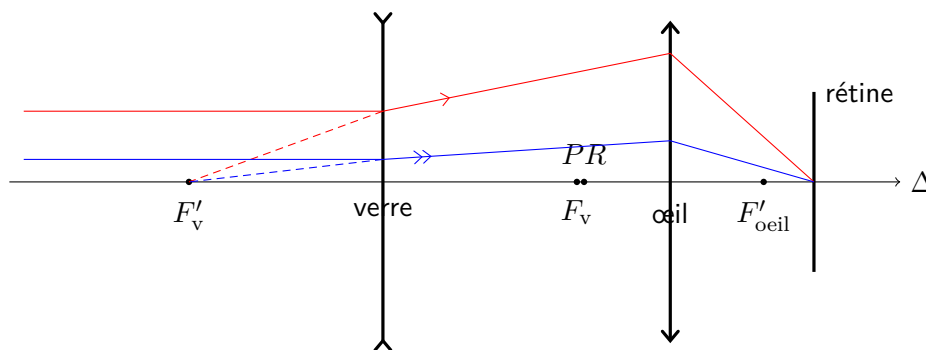
$$f' = -50 \text{ cm}, \quad \boxed{V = \frac{1}{f'} = -2,0 \delta}.$$

3. La vergence est négative : le verre correcteur est divergent.
4. Une correction de $-2,0 \delta$ correspond exactement à une focale image de $-0,50 \text{ m}$; elle est donc cohérente avec un punctum remotum situé à 50 cm devant l'œil.
5. Lorsque le verre est placé à $e = 12 \text{ mm}$ devant l'œil, l'image virtuelle doit toujours être située à 50 cm devant l'œil, donc à

$$50,0 \text{ cm} - 1,2 \text{ cm} = 48,8 \text{ cm}$$

devant le verre. Pour un objet à l'infini,

$$f' = -48,8 \text{ cm}, \quad \boxed{V \simeq -2,05 \delta}.$$



Le schéma montre le rôle du verre : il transforme le faisceau parallèle provenant de l'objet lointain en un faisceau divergent qui semble provenir d'un point accessible à l'œil myope au repos.

3.6 – Hypermétropie et lecture

1. L'œil ne peut voir nettement, même en accommodant au maximum, qu'un objet situé au moins à $PP = 80 \text{ cm}$. Le verre doit donc former du texte placé à 25 cm une image virtuelle située au punctum proximum.
2. Les lunettes étant supposées accolées à l'œil,

$$\overline{OA} = -25 \text{ cm}, \quad \overline{OA'} = -80 \text{ cm}.$$

La vergence du verre vaut

$$V = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{-0,80 \text{ m}} - \frac{1}{-0,25 \text{ m}} = \boxed{+2,75 \delta}.$$

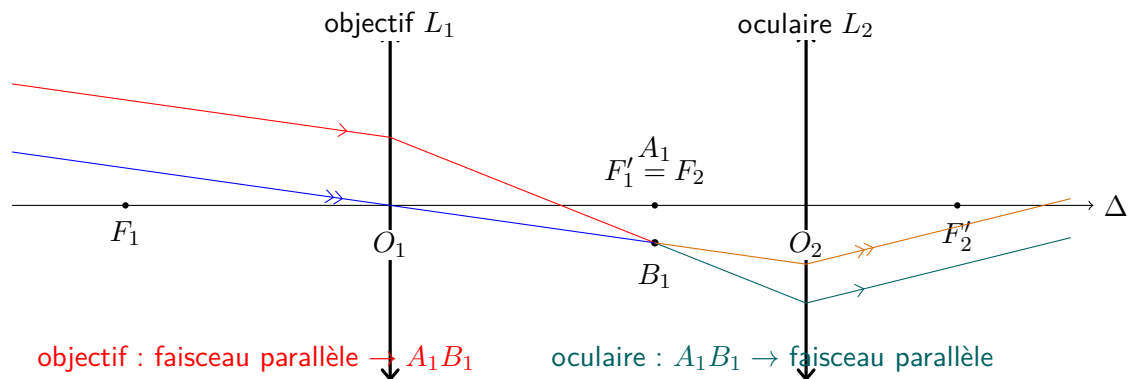
3. La vergence est positive : il faut un verre convergent.
4. Un verre de lecture de $+2,75 \delta$ convient exactement dans le modèle adopté.
5. La presbytie réduit principalement la capacité d'accommodation. La correction nécessaire pour voir de près peut donc être différente de celle éventuellement nécessaire pour voir de loin ; c'est la raison d'être des verres progressifs ou de lunettes différentes suivant l'usage.

3.7 – Lunette astronomique de Kepler

1. Une lunette de Kepler afocale doit vérifier $F'_1 = F_2$. Les deux lentilles étant convergentes,

$$\overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2 = 80 \text{ cm} + 4,0 \text{ cm} = 84 \text{ cm}.$$

2. L'objectif reçoit un faisceau parallèle incliné d'un angle α et forme une image intermédiaire A_1B_1 dans son plan focal image. Ce plan est aussi le plan focal objet de l'oculaire. La figure distingue la construction par l'objectif (rouge/bleu) de celle par l'oculaire (vert/orange).



3. En notant $h = \overline{A_1B_1}$, on a, aux petits angles,

$$h \simeq f'_1 \alpha \quad \text{et} \quad h \simeq -f'_2 \alpha'.$$

Par conséquent,

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}.$$

4. Numériquement,

$$G = -\frac{80 \text{ cm}}{4,0 \text{ cm}} = \boxed{-20}.$$

Le signe négatif traduit le renversement de l'image ; la valeur absolue indique que l'angle apparent est multiplié par 20.

5. Pour la Lune,

$$|\alpha'| = |G| |\alpha| = 20 \times 0,50^\circ = \boxed{10^\circ}.$$

6. Le faisceau émergent est parallèle : l'image finale est donc située à l'infini. L'œil peut l'observer sans accommodation, ce qui rend l'observation prolongée plus confortable.

3.8 – Lunette de Galilée

1. Pour être afocale, l'image que formerait l'objectif seul doit appartenir au plan focal objet de l'oculaire divergent. On impose donc

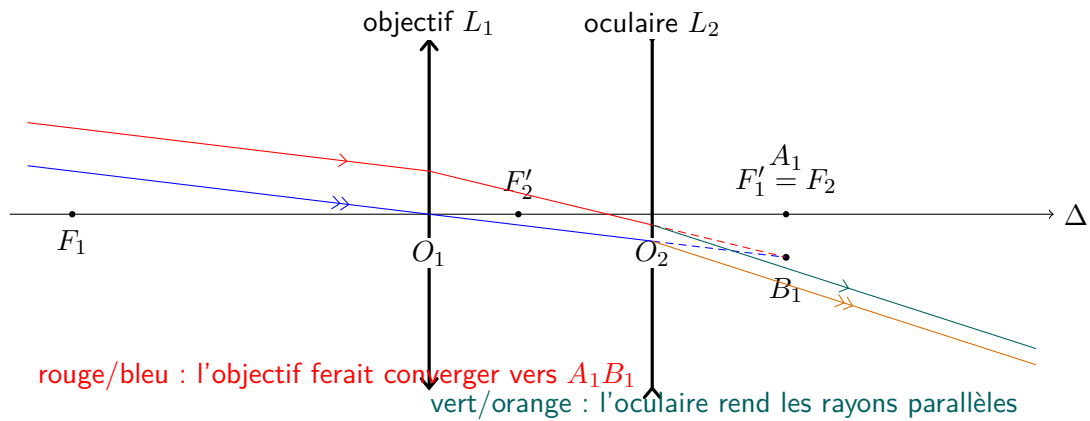
$$F'_1 = F_2.$$

Comme $f'_2 < 0$,

$$\overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2,$$

ce qui est plus court que f'_1 .

2. L'oculaire divergent est placé avant le foyer image de l'objectif : il intercepte donc un faisceau encore convergent. Dans la figure, les prolongements en pointillés des rayons rouge et bleu indiquent le point B_1 où l'objectif formerait son image en l'absence d'oculaire. Ce point est un *objet virtuel* pour L_2 . Les rayons deviennent vert et orange après l'oculaire ; ils ressortent parallèles.



3. Le même calcul angulaire que pour la lunette de Kepler conduit à

$$G = -\frac{f'_1}{f'_2}.$$

4. Ici $f'_2 < 0$, donc $G > 0$: l'angle émergent a le même signe que l'angle incident. L'image finale est droite.

5. Avec $f'_1 = 40 \text{ cm}$ et $f'_2 = -5,0 \text{ cm}$,

$$\overline{O_1O_2} = 40 \text{ cm} - 5,0 \text{ cm} = \boxed{35 \text{ cm}},$$

$$G = -\frac{40 \text{ cm}}{-5,0 \text{ cm}} = \boxed{+8}.$$

6. La lunette de Galilée est plus courte et fournit directement une image droite. En revanche, son champ de vision est généralement plus réduit. La lunette de Kepler est plus longue et renverse l'image, mais elle offre un champ plus confortable et se prête mieux à des grossissements importants.

3.9 – Un microscope simplifié

1. L'image intermédiaire A_1B_1 est placée dans le plan focal objet de l'oculaire. Une lentille convergente recevant un objet dans son plan focal objet donne un faisceau émergent parallèle : l'image finale est donc située à l'infini.
2. La conjugaison de Newton pour l'objectif s'écrit

$$\overline{F_1A} \overline{F'_1A_1} = -f_1'^2.$$

Or, puisque A_1 est dans le plan focal objet de l'oculaire,

$$\overline{F'_1A_1} = \Delta.$$

Ainsi

$$\overline{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}.$$

La formule de grandissement de Newton donne

$$\gamma_1 = \frac{f'_1}{\overline{F_1A}} = -\frac{\Delta}{f'_1}.$$

On retrouve donc

$$\boxed{\gamma_1 \simeq -\frac{\Delta}{f'_1}}.$$

3. L'oculaire est utilisé comme une loupe. Son grossissement commercial vaut

$$G_2 \simeq \frac{d_m}{f'_2}.$$

4. Numériquement,

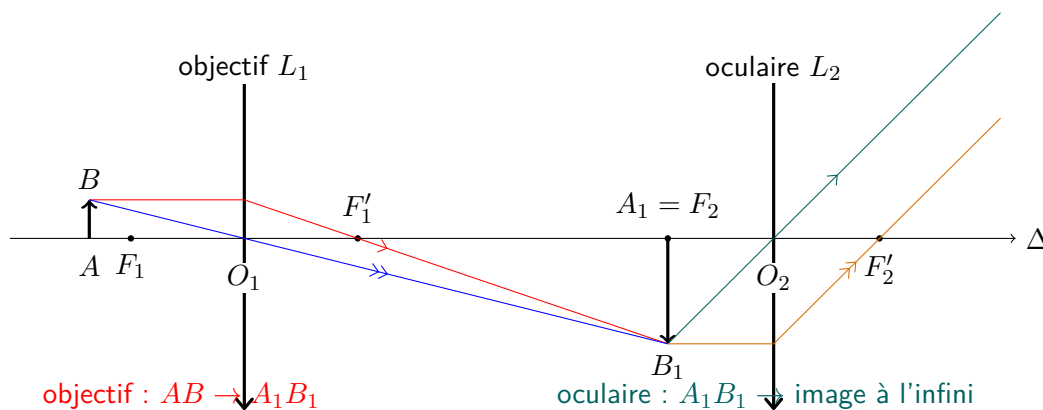
$$|\gamma_1| \simeq \frac{160 \text{ mm}}{4,0 \text{ mm}} = 40, \quad G_2 \simeq \frac{250 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = 10.$$

Donc

$$|G_c| = |\gamma_1| G_2 \simeq 400.$$

5. L'objectif forme une image intermédiaire réelle et renversée. L'oculaire grossit angulairement cette image sans introduire de nouveau renversement : l'image finale reste renversée par rapport à l'objet initial. Comme elle est à l'infini, l'œil peut l'observer sans accommoder.

La construction complète est représentée ci-dessous. Les rayons rouge et bleu construisent A_1B_1 par l'objectif ; les rayons vert et orange partent ensuite de B_1 et montrent que l'oculaire produit un faisceau parallèle.



3.10 – Une lunette terrestre à trois lentilles

1. Une image réelle renversée de même taille correspond à un grandissement $\gamma_2 = -1$. Pour une lentille convergente, cette situation est obtenue lorsque l'objet est placé à $2f'_2$ en amont et l'image à $2f'_2$ en aval :

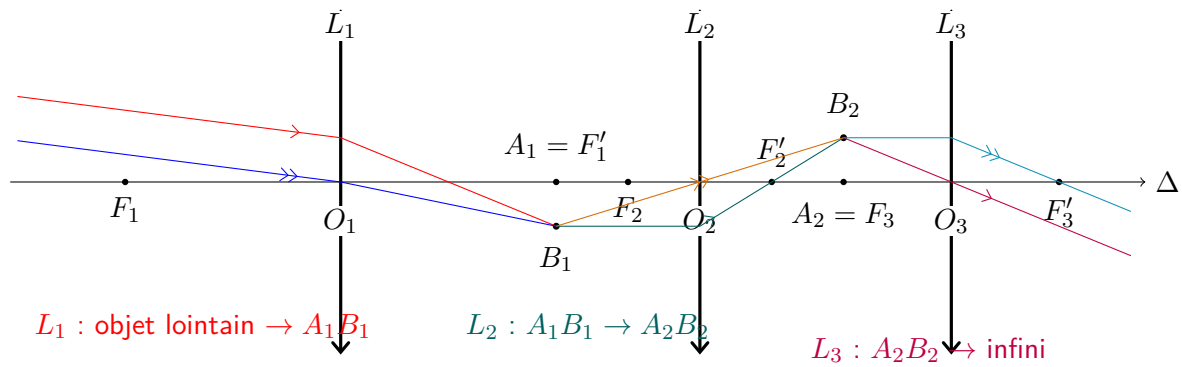
$$\overline{O_2A_1} = -2f'_2, \quad \overline{O_2A_2} = +2f'_2.$$

2. Les deux images intermédiaires sont donc séparées de

$$A_1A_2 = 4f'_2.$$

3. L'objectif L_1 forme une première image A_1B_1 renversée. La lentille redresseuse L_2 forme ensuite de A_1B_1 une image A_2B_2 renversée par rapport à A_1B_1 . Deux renversements successifs redonnent donc une image A_2B_2 droite par rapport à l'objet initial. L'oculaire L_3 est ensuite utilisé en configuration afocale et ne modifie pas cette orientation.

La figure montre les trois étapes avec trois paires de couleurs : rouge/bleu pour l'objectif, vert/orange pour la lentille redresseuse, violet/cyan pour l'oculaire.



4. L'objectif forme A_1B_1 dans son plan focal image, donc $O_1A_1 = f'_1$. La lentille redresseuse impose ensuite une distance $A_1A_2 = 4f'_2$. Enfin, pour que l'oculaire donne une image à l'infini, A_2 doit être dans son plan focal objet, donc $A_2O_3 = f'_3$. Ainsi

$$L = f'_1 + 4f'_2 + f'_3 = 60 \text{ cm} + 4 \times 5,0 \text{ cm} + 3,0 \text{ cm} = \boxed{83 \text{ cm}}.$$

5. La lentille redresseuse a $\gamma_2 = -1$: elle ne modifie donc pas la valeur absolue de la taille de l'image intermédiaire. Le rapport des angles avant l'objectif et après l'oculaire conserve ainsi la même valeur absolue que pour une lunette de Kepler construite avec L_1 et L_3 . Elle change l'orientation et augmente la longueur de l'instrument, mais pas la valeur absolue du grossissement angulaire.

3.11 – Concevoir une lunette astronomique

1. Pour une lunette de Kepler afocale,

$$L = f'_1 + f'_2, \quad |G| = \frac{f'_1}{f'_2}.$$

On obtient :

f'_2	longueur	$ G $
25 mm	925 mm	36
10 mm	910 mm	90
5 mm	905 mm	180

2. Le diamètre angulaire de Jupiter vaut

$$\theta_J = 40'' = 40 \times \frac{\pi}{180 \times 3600} \simeq 1,94 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

Les angles apparents valent donc environ

$$36 \times 1,94 \times 10^{-4} \text{ rad} = 7,0 \times 10^{-3} \text{ rad},$$

$$90 \times 1,94 \times 10^{-4} \text{ rad} = 1,75 \times 10^{-2} \text{ rad},$$

$$180 \times 1,94 \times 10^{-4} \text{ rad} = 3,49 \times 10^{-2} \text{ rad}.$$

Ils sont tous supérieurs à la résolution angulaire de l'œil $\theta_{\text{œil}} = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$: les trois oculaires permettent théoriquement de percevoir Jupiter comme un disque.

3. La limite de diffraction vaut

$$\theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \times \frac{550 \times 10^{-9} \text{ m}}{80 \times 10^{-3} \text{ m}} \simeq \boxed{8,4 \times 10^{-6} \text{ rad}}.$$

Cela correspond à environ $1,7''$.

4. Pour que l'œil exploite cette résolution, il faut que la tache correspondant à l'angle $\theta_{\min}$ soit grossie jusqu'à la résolution angulaire de l'œil :

$$G_{\min} = \frac{\theta_{\text{œil}}}{\theta_{\min}} \simeq \frac{3 \times 10^{-4} \text{ rad}}{8,4 \times 10^{-6} \text{ rad}} \simeq \boxed{36}.$$

5. L'oculaire de 25 mm fournit précisément un grossissement proche de 36 : il permet déjà d'exploiter presque toute la résolution de l'objectif. Les oculaires de 10 mm et 5 mm grossissent davantage, mais ce grossissement supplémentaire ne fait pas apparaître de détails plus fins que ceux imposés par la diffraction.
6. Lorsque l'image de la tache de diffraction est déjà suffisamment grande pour être résolue par l'œil, augmenter encore $|G|$ agrandit essentiellement cette tache. On obtient une image plus grande, mais pas une information spatiale supplémentaire.
7. Pour raccourcir la lunette tout en conservant le grossissement de l'oculaire de 10 mm, il faut conserver le rapport

$$\frac{f'_1}{f'_2} = 90$$

tout en diminuant les deux focales. Par exemple, on pourrait choisir $f'_1 = 450 \text{ mm}$ et $f'_2 = 5,0 \text{ mm}$: le grossissement resterait 90 et la longueur afocale passerait de 910 mm à 455 mm.

8. Le renvoi coudé exploite la réflexion totale dans un prisme : pour une incidence suffisante depuis le milieu le plus réfringent, la réflexion est pratiquement totale et ne nécessite aucun dépôt métallique. Le prisme permet donc de dévier géométriquement le faisceau tout en limitant les pertes par réflexion.