

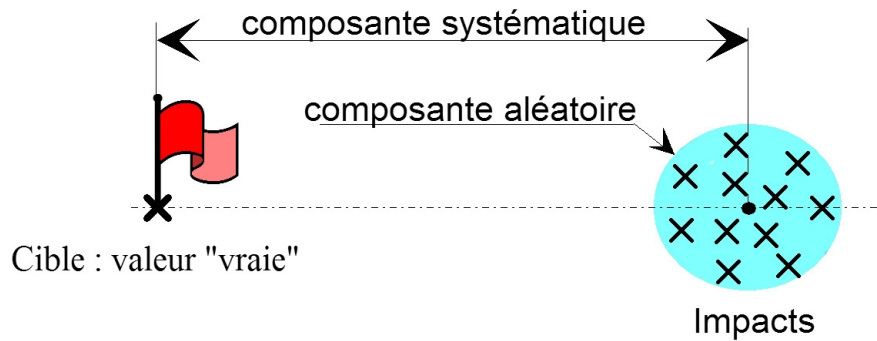
Chapitre 2 : Mesures et incertitudes

 Objectifs du programme	
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A) ou par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. Capacité numérique : simuler un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure. Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé et analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité.
Régression linéaire.	Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés. Capacité numérique : mettre en œuvre une simulation Monte-Carlo pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

1 Variabilité d'une mesure et incertitude

En métrologie, une **mesure** (ou un mesurage) est le processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.

La **valeur vraie** d'une grandeur est sa valeur considérée comme unique et, en pratique, impossible à connaître exactement. Lorsque l'on répète un mesurage, le résultat peut varier d'une expérience à l'autre.



Erreur, biais et variabilité

L'**erreur de mesure** est la différence entre une valeur mesurée et la valeur vraie. Puisque la valeur vraie est généralement inaccessible, l'erreur de mesure l'est elle aussi.

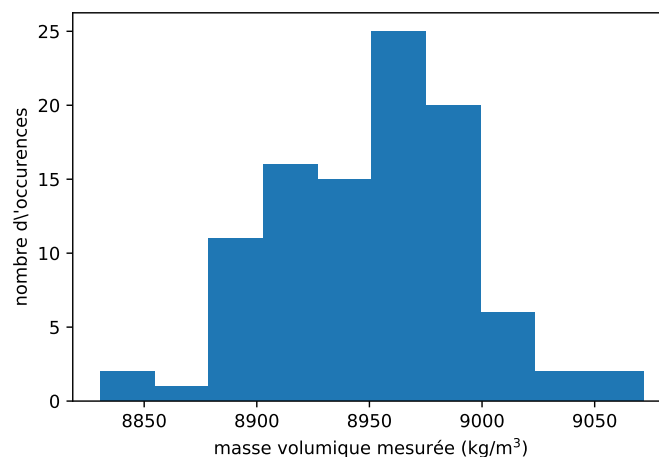
On distingue conceptuellement :

- une **composante systématique**, ou **biais**, qui demeure constante ou varie de façon prévisible lorsque l'on répète les mesures ;
- une **composante aléatoire**, qui varie de façon imprévisible d'un mesurage à l'autre.

L'**incertitude-type** $u(x)$ quantifie la variabilité des valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur x . Elle s'exprime dans la même unité que x .

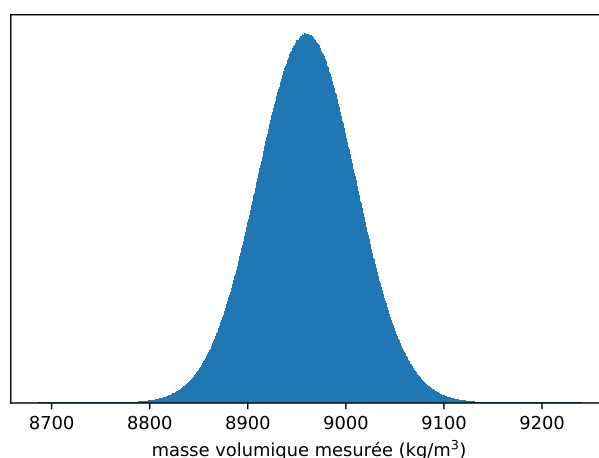
Un génie omnipotent et physicien décide de mesurer « aussi précisément que possible » la masse volumique du cuivre ρ_{Cu} . Il dispose d'une centaine de morceaux de cuivre de tailles et de masses différentes. Il veille à écarter les échantillons poreux ou oxydés et utilise un protocole rigoureux avec des instruments que l'on supposera parfaits.

Il obtient la répartition suivante :



Question 1 : Que montre cet histogramme? Une mesure unique permettrait-elle de déterminer exactement la masse volumique du cuivre?

Le génie étant omnipotent, il parvient ensuite à obtenir un nombre arbitrairement grand d'échantillons et réalise un nombre immense de mesurages. La distribution obtenue tend alors vers la courbe suivante :



On observe une distribution en forme de cloche, centrée ici autour de $8960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Question 2 : À quoi peut-on associer le centre de cette distribution? Que représente intuitivement sa largeur?

Moyenne, dispersion et valeur vraie

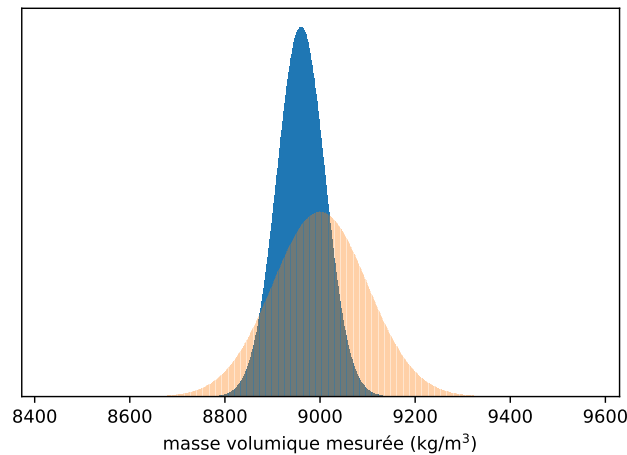
Lorsque le mesurage est sans biais, les résultats se répartissent autour de la valeur vraie. La moyenne d'un très grand nombre de mesures permet alors de s'en approcher.

La **dispersion** de la distribution caractérise la variabilité des mesures individuelles. Elle est quantifiée par son écart-type σ .

Il faut donc distinguer :

- la dispersion des résultats individuels autour de leur moyenne ;
- l'incertitude avec laquelle on connaît la valeur moyenne ;
- un éventuel biais, qui décale l'ensemble de la distribution.

Le génie augmente maintenant la température de son laboratoire. Il obtient les deux distributions ci-dessous (en bleu : à basse température ; en orange : à haute température) :



Question 3 : Comparer les deux distributions. Pourquoi la température peut-elle être qualifiée de **grandeur d'influence** ?

Grandeur d'influence

Une **grandeur d'influence** est une grandeur extérieure à la grandeur mesurée mais susceptible de modifier le résultat du mesurage : température, pression, humidité, alimentation électrique, position de l'expérimentateur, etc.

2 Évaluation de type A : approche statistique

Moyenne et écart-type

Pour n mesures indépendantes $(x_1, \dots, x_n)$, on définit la moyenne empirique et l'écart-type empirique par :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

L'écart-type s_x caractérise la dispersion des **mesures individuelles** autour de leur moyenne.

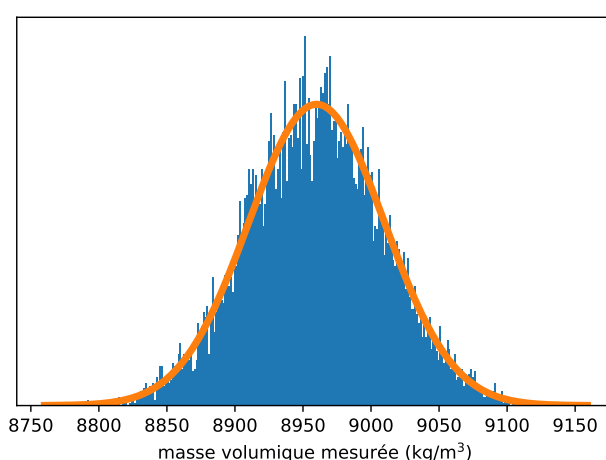
On mesure quinze fois la durée T_{10} de dix oscillations d'un pendule :

Essai	1	2	3	4	5
T_{10} (s)	15,91	15,84	15,96	15,88	15,93
Essai	6	7	8	9	10
T_{10} (s)	15,86	15,90	15,98	15,87	15,92
Essai	11	12	13	14	15
T_{10} (s)	15,89	15,95	15,83	15,94	15,90

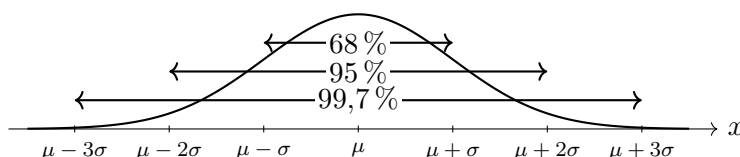
Question 4 : Calculer la valeur moyenne $\overline{T_{10}}$ et l'écart-type expérimental $s_{T_{10}}$ de cette série.

Pourquoi rencontre-t-on si souvent une loi normale ?

Lorsque de nombreuses petites causes indépendantes contribuent à la variabilité d'une mesure, la distribution des résultats est très souvent bien décrite par une **loi normale**, ou loi de Gauss.



La loi normale est caractérisée par sa moyenne μ et son écart-type σ . Les aires sous la courbe permettent d'associer simplement un intervalle à une probabilité :



Théorème central limite – idée générale

Lorsque le résultat d'une mesure dépend de l'addition d'un grand nombre de petites contributions aléatoires indépendantes, sa distribution est souvent proche d'une loi normale. Plus précisément, le **théorème central limite** indique que, sous des hypothèses assez générales, la somme de nombreuses variables aléatoires indépendantes tend vers une distribution normale. Il implique également que la distribution des **moyennes** obtenues en répétant n mesures indépendantes devient approximativement normale lorsque n augmente. La dispersion de ces moyennes diminue lorsque le nombre de mesures augmente : c'est ce qui conduit à l'incertitude-type sur la moyenne en $1/\sqrt{n}$.

Question 5 : Donner quelques exemples de petites causes indépendantes pouvant contribuer à la variabilité de la mesure d'une période au chronomètre.

Incertitude-type de type A

Lorsque l'on dispose de n mesurages indépendants, l'incertitude-type sur la valeur moyenne est :

$$u_A(\bar{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi, répéter des mesures indépendantes permet de diminuer l'incertitude sur leur moyenne.

Question 6 : Calculer l'incertitude-type $u_A(\overline{T_{10}})$ sur la durée moyenne de dix oscillations.

Intervalles associés à une loi normale

Pour une variable suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ , environ 68 % des valeurs appartiennent à $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ et environ 95 % à $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$.

On retient donc, lorsque cette modélisation est pertinente, les ordres de grandeur suivants :

$$x \pm u(x) \longleftrightarrow 68\%, \quad x \pm 2u(x) \longleftrightarrow 95\%.$$

Question 7 : On mesure $R = 100,0 \Omega$ avec $u(R) = 0,8 \Omega$. Donner les intervalles associés approximativement aux niveaux de confiance de 68 % et 95 %.

3 Évaluation de type B

Lorsque l'on ne dispose pas d'une série statistique adaptée, une incertitude peut être évaluée à partir d'une résolution, d'une tolérance constructeur, d'une lecture graphique ou d'une estimation raisonnée.

Évaluation de type B : loi uniforme

Si l'on sait que la valeur x appartient à l'intervalle $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$ et que l'on modélise toutes les valeurs de cet intervalle comme équiprobables, alors :

$$x = x_0 \quad \text{et} \quad u_B(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

Le nombre ε est la **demi-largeur** de l'intervalle.

Question 8 : Une règle graduée au millimètre permet de mesurer une longueur $\ell = 62,4$ cm. On estime que la lecture est fiable à $\pm 0,5$ mm. Évaluer $u(\ell)$.

Attention : type A et type B

Les termes « type A » et « type B » ne désignent pas deux sortes d'erreurs, mais deux **méthodes d'évaluation d'une incertitude-type**.

Une même expérience peut faire intervenir simultanément plusieurs contributions à l'incertitude, certaines évaluées statistiquement (type A), d'autres à partir d'informations non statistiques (type B).

4 Écriture du résultat d'une mesure

Écriture d'un résultat

Un résultat de mesure s'écrit sous la forme :

$$x = (x_{\text{mes}} \pm u(x)) \text{ unité}.$$

En pratique, on conserve généralement un ou deux chiffres significatifs pour l'incertitude-type, puis on arrondit la valeur mesurée au **même rang décimal**.

Question 9 : Réécrire correctement les résultats suivants :

- a) $R = 12,3478 \, \Omega$ et $u(R) = 0,183 \, \Omega$;
- b) $g = 9,81426 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $u(g) = 0,0317 \, \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

5 Incertitude-type d'une grandeur composée

Une grandeur recherchée est souvent obtenue à partir de plusieurs grandeurs mesurées.

Propagation des incertitudes

Pour des grandeurs indépendantes x et y :

$$u(x \pm y) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}.$$

Pour un produit ou un quotient :

$$\frac{u(xy)}{|xy|} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}$$

et

$$\frac{u(x/y)}{|x/y|} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}.$$

Enfin, si $z = x^\alpha$:

$$\frac{u(z)}{|z|} = |\alpha| \frac{u(x)}{|x|}.$$

Pour un pendule simple, la période T vérifie :

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}.$$

On dispose de $\ell = (0.6240 \pm 0.0003) \text{ m}$ et $T = (1.5900 \pm 0.0030) \text{ s}$.

Question 10 : Montrer que l'incertitude-type relative sur g peut s'écrire :

$$\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{u(\ell)}{\ell}\right)^2 + \left(2\frac{u(T)}{T}\right)^2}.$$

Calculer ensuite g et $u(g)$.

Question 11 : Comparer les contributions $\frac{u(\ell)}{\ell}$ et $2\frac{u(T)}{T}$. Quelle mesure faudrait-il améliorer en priorité pour diminuer $u(g)$?

6 Simulation de Monte-Carlo

Une autre méthode consiste à simuler un très grand nombre d'expériences compatibles avec les valeurs mesurées et leurs incertitudes.

Principe d'une simulation Monte-Carlo

Pour déterminer la variabilité de $z = f(x, y)$:

1. on choisit une distribution adaptée pour x et pour y ;
2. on effectue un grand nombre N de tirages aléatoires x_i et y_i ;
3. on calcule $z_i = f(x_i, y_i)$ pour chaque tirage ;
4. la dispersion des valeurs z_i permet d'estimer l'incertitude-type $u(z)$.

Pour une grandeur décrite par une loi normale de valeur centrale x_0 et d'incertitude-type $u(x)$, on peut utiliser en Python :

```
np.random.normal(x0, u_x, N)
```

Pour une loi uniforme sur $[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon]$:

```
np.random.uniform(x0-epsilon, x0+epsilon, N)
```

On souhaite retrouver par simulation l'incertitude sur g calculée précédemment. Pour cette simulation, on modélise ℓ et T par des lois normales centrées sur les valeurs mesurées, dont les écarts-types sont respectivement $u(\ell)$ et $u(T)$.

Question 12 : Compléter le script Python suivant afin qu'il effectue $N = 100\,000$ simulations de ℓ et de T , calcule les valeurs correspondantes de g , puis affiche la valeur moyenne de g et son écart-type.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 N = 100000 # Nombre d'expériences simulées
5
6 # Valeurs mesurées et incertitudes-types associées
7 l0, ul = 0.6240, 0.0003
8 T0, uT = 1.5900, 0.0030
9
10 # Simulation de N valeurs compatibles avec les mesures
11 l = np.random.normal(....., ....., .....)
12 T = np.random.normal(....., ....., .....)
13
14 # Calcul de g pour chacune des expériences simulées
15 g = .....
16
17 # Estimation de la valeur de g et de son incertitude-type
```

```
18 | g_moy = np.mean(g)
19 | ug = np.std(g, ddof=1)
20 |
21 | print(g_moy, ug)
22 |
23 | # Représentation de la distribution des valeurs simulées de g
24 | plt.hist(g, bins=100)
25 | plt.xlabel("g (m/s^2)")
26 | plt.ylabel("nombre d'occurrences")
27 | plt.show()
```

Question 13 : Interpréter l'histogramme obtenu : autour de quelle valeur est-il centré ? Que représente sa largeur ? Faire le lien avec les histogrammes étudiés au début du chapitre.

Question 14 : Que représentent les N valeurs contenues dans le tableau g ? Que doit-on comparer entre le résultat de cette simulation et celui obtenu par propagation analytique ?

Question 15 : On augmente progressivement N de 100 à 100 000. Quel effet attend-on sur la valeur estimée de $u(g)$?

7 Comparaison de deux valeurs : écart normalisé

Écart normalisé

Pour deux résultats indépendants $x_1 \pm u(x_1)$ et $x_2 \pm u(x_2)$, on définit l'**écart normalisé** :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}.$$

On considère usuellement que deux résultats sont compatibles si $E_N \lesssim 2$.

Si $E_N > 2$, il faut rechercher une cause possible : biais, incertitude sous-estimée, modèle inadapté, erreur de manipulation ou de traitement, etc.

Question 16 : On obtient expérimentalement $g = (9.77 \pm 0.04) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Comparer ce résultat à $g_{\text{ref}} = (9.81 \pm 0.01) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ à l'aide de l'écart normalisé.

8 Régression linéaire

On étudie la relation entre la période et la longueur d'un pendule à partir des données suivantes :

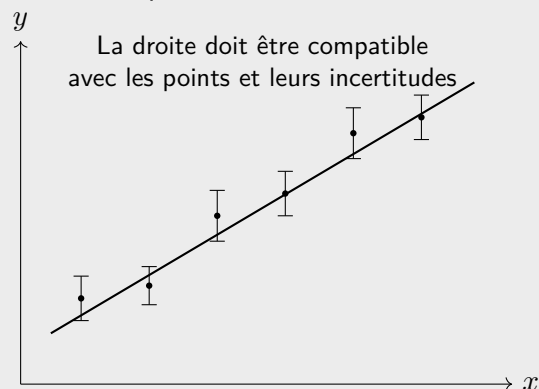
ℓ (m)	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75
$u(\ell)$ (m)	0,001					
T (s)	1,005	1,187	1,347	1,489	1,619	1,739
$u(T)$ (s)	0,010					

Question 17 : À partir de la relation théorique du pendule simple, indiquer quelle représentation graphique permet d'obtenir une relation affine. Quelle valeur théorique attend-on pour l'ordonnée à l'origine ? Exprimer également $u(T^2)$ en fonction de T et de $u(T)$.

Validation d'une régression linéaire

Un logiciel permet d'obtenir les paramètres du modèle affine $y = ax + b$.

La seule valeur du coefficient de détermination R^2 ne permet pas de valider un modèle. Il faut notamment examiner graphiquement si les points, compte tenu de leurs barres d'incertitude, sont compatibles avec la droite modélisée, ou étudier les écarts normalisés entre valeurs mesurées et valeurs prédites.



Question 18 : À l'aide d'un tableur ou de Python, effectuer la régression linéaire de T^2 en fonction de ℓ . Représenter les points avec leurs barres d'incertitude et commenter la compatibilité du modèle avec les données. En déduire une estimation de g .

Monte-Carlo appliqué à une régression

Pour évaluer l'incertitude sur les paramètres d'une régression, on peut simuler de nombreux jeux de données compatibles avec les incertitudes expérimentales et refaire la régression pour chacun d'eux.

Question 19 : Compléter le script suivant. À chaque itération, il doit simuler un nouveau jeu de longueurs et de périodes compatible avec les incertitudes expérimentales, calculer T^2 , effectuer une régression linéaire, puis conserver la pente obtenue.

```
1 import numpy as np
2
3 # Donnees experimentales
4 l = np.array([0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75])
5 T = np.array([1.005, 1.187, 1.347, 1.489, 1.619, 1.739])
6 ul = 0.001
7 uT = 0.010
8
9 N = 10000 # Nombre de jeux de donnees simules
10 pentes = []
11
12 for k in range(N):
13     # Simulation d'un nouveau jeu de longueurs et de periodes
14     lsim = np.random.normal(....., .....)
15     Tsim = np.random.normal(....., .....)
16
17     # Grandeur a utiliser pour la regression lineaire
18     ysim = .....
19
20     # Regression lineaire de T^2 en fonction de l
21     a, b = np.polyfit(....., ....., 1)
22
23     # On conserve la pente obtenue lors de cette simulation
24     pentes.append(.....)
25
26 # Valeur moyenne et incertitude-type sur la pente
27 a_moy = np.mean(.....)
28 ua = np.std(....., ddof=1)
```

Question 20 : Pourquoi faut-il refaire la régression à chaque tirage ? Que représente l'écart-type de la liste pentes ?

Question 21 : La pente théorique vaut $a = \frac{4\pi^2}{g}$. Expliquer comment modifier le programme pour obtenir directement une distribution de valeurs de g , puis une estimation de $u(g)$.

Monte-Carlo et régression

Une simulation Monte-Carlo appliquée à une régression consiste à :

1. faire varier aléatoirement les données expérimentales selon leurs incertitudes ;
2. refaire le traitement complet pour chaque jeu simulé ;
3. observer la dispersion des paramètres obtenus.

Cette dispersion permet d'évaluer l'incertitude sur la pente, l'ordonnée à l'origine ou toute grandeur déduite de ces paramètres.

9 Exercices

9.1 Mesure d'une résistance

On mesure à plusieurs reprises la résistance d'un dipôle. On obtient, en Ω :

99,8, 100,4, 100,1, 99,9, 100,3, 100,0.

1. Calculer la moyenne, l'écart-type expérimental puis l'incertitude-type de type A sur la moyenne.
Le multimètre utilisé possède une résolution de $0,1\Omega$. On suppose que l'erreur de lecture est uniformément répartie dans un intervalle de demi-largeur $0,05\Omega$.
2. Évaluer l'incertitude-type associée à la résolution du multimètre. Comparer son ordre de grandeur à l'incertitude de type A et commenter.
3. Écrire le résultat final avec un nombre adapté de chiffres significatifs.

9.2 Masse volumique d'un cylindre

On mesure la masse $m = 84,32$ g d'un cylindre avec $u(m) = 0,02$ g, son diamètre $d = 20,10$ mm avec $u(d) = 0,05$ mm et sa hauteur $h = 30,20$ mm avec $u(h) = 0,05$ mm.

La masse volumique est donnée par :

$$\rho = \frac{4m}{\pi d^2 h}.$$

1. Calculer la masse volumique ρ du cylindre.
2. Établir l'expression de l'incertitude-type relative $\frac{u(\rho)}{\rho}$ en fonction des incertitudes-types relatives sur m , d et h .
3. Comparer les trois contributions. Quelle mesure faudrait-il améliorer en priorité ? Calculer $u(\rho)$ et écrire le résultat final.

9.3 Deux mesures incompatibles ?

Deux méthodes permettent de déterminer la célérité d'une onde dans un même milieu :

$$c_1 = (343,2 \pm 1,5) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad c_2 = (338,6 \pm 1,2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1. Calculer l'écart normalisé entre les deux résultats. Sont-ils compatibles selon le critère usuel ?
2. Proposer au moins trois causes qu'il serait pertinent d'examiner si les deux résultats sont jugés incompatibles.

9.4 Monte-Carlo : compléter et modifier un programme

On mesure une tension $U = 6,93$ V avec $u(U) = 0,04$ V et une intensité $I = 0,217$ A avec $u(I) = 0,003$ A. On souhaite déterminer $R = U/I$ et son incertitude-type par simulation Monte-Carlo.

1. Compléter le programme suivant. Les commentaires indiquent les différentes étapes du raisonnement.

```
1 | import numpy as np
2 |
3 | N = 100000
4 |
5 | U0, uU = 6.93, 0.04
6 | I0, uI = 0.217, 0.003
7 |
8 | # Simulation de valeurs de U et I compatibles avec les mesures
9 | Usim = np.random.normal(....., ....., .....)
10 | Isim = np.random.normal(....., ....., .....)
11 |
12 | # Calcul de R pour chaque experience simulee
13 | Rsim = .....
14 |
15 | # Estimation de R et de son incertitude-type
16 | R = np.....(Rsim)
17 | uR = np.....(Rsim, ddof=1)
18 |
19 | print(R, uR)
```

2. Modifier le programme dans le cas où la tension n'est plus modélisée par une loi normale, mais par une loi uniforme sur $[6,89; 6,97]$ V. Quelle ligne faut-il modifier ?
3. Que se passe-t-il si l'on remplace $N = 100\,000$ par $N = 100$? Le résultat physique devient-il nécessairement faux ?

9.5 Régression linéaire et Monte-Carlo

La charge d'un condensateur vérifie théoriquement :

$$\ln\left(1 - \frac{u_C}{E}\right) = -\frac{t}{\tau}.$$

1. Quelle représentation graphique doit-on tracer ? Quelle grandeur physique peut-on déduire de la pente ?
2. Un logiciel fournit une droite d'ajustement dont le coefficient de détermination vaut $R^2 = 0,999$. Expliquer pourquoi cette seule information ne suffit pas à valider le modèle. Indiquer une procédure de validation conforme au cours.

On suppose que l'incertitude-type $u(y_i)$ est connue pour chaque valeur expérimentale y_i . On souhaite maintenant évaluer l'incertitude sur la pente en tenant compte de ces incertitudes.

3. Remettre dans l'ordre les étapes suivantes d'une simulation Monte-Carlo :
 - a) calculer l'écart-type des pentes ;
 - b) simuler un nouveau jeu de valeurs expérimentales ;
 - c) effectuer une régression linéaire ;
 - d) répéter l'opération un grand nombre de fois ;
 - e) conserver la pente obtenue.
4. Expliquer ce que représente physiquement l'écart-type de la distribution des pentes ainsi obtenue.