
Thème 03 : Électrocinétique

Cours



Alessandro Volta

1745–1827

Physicien italien, Alessandro Volta mène de nombreuses expériences sur l'électricité et met au point en 1800 la pile qui porte son nom, première source permettant de produire durablement un courant électrique. Son invention joue un rôle majeur dans le développement de l'électrochimie et de l'étude des circuits électriques. L'unité de tension électrique, le volt, porte son nom.



André-Marie Ampère

1775–1836

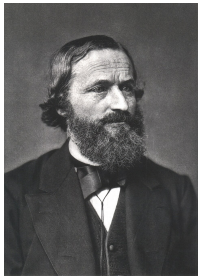
Mathématicien et physicien français, André-Marie Ampère est l'un des fondateurs de l'électrodynamique. À la suite des expériences d'Oersted, il étudie les interactions entre courants électriques et établit des lois reliant électricité et magnétisme. Ses travaux contribuent à faire du courant électrique une grandeur physique fondamentale. L'unité d'intensité électrique, l'ampère, porte son nom.



Georg Simon Ohm

1789–1854

Physicien allemand, Georg Simon Ohm étudie expérimentalement la conduction électrique dans les circuits. Il établit la relation entre la tension aux bornes d'un conducteur, l'intensité du courant qui le traverse et sa résistance, aujourd'hui connue sous le nom de loi d'Ohm. Ses travaux constituent l'un des fondements de l'électrocinétique. L'unité de résistance électrique, l'ohm, porte son nom.



Gustav Kirchhoff

1824–1887

Physicien allemand, Gustav Kirchhoff contribue à l'étude des circuits électriques en formulant les lois qui portent son nom. La loi des nœuds traduit la conservation de la charge électrique, tandis que la loi des mailles permet de relier les tensions au sein d'un circuit. Il réalise également d'importants travaux en spectroscopie et sur le rayonnement thermique.

Table des matières

1	Circuits en régime permanent	4
1.1	Grandeurs électriques dans un circuit	4
1.1.1	Généralités	4
1.1.2	Charge, courant et loi des nœuds	7
1.1.3	Potentiel, tension et loi des mailles	9
1.2	Étude de quelques dipôles	12
1.2.1	Puissance électrique	12
1.2.2	Caractéristique d'un dipôle	13
1.2.3	Les résistors	14
1.2.4	Les sources d'énergie électrique	15
1.3	Associations de résistances	17
1.3.1	Résistances en série et pont diviseur de tension	17
1.3.2	Résistances en parallèle et pont diviseur de courant	18
2	Continuités dans les circuits	21
2.1	Rappels sur la dérivée et l'intégrale	21
2.1.1	La dérivée	21
2.1.2	L'intégrale	22
2.2	De la puissance électrique à l'énergie électrique	23
2.3	Condensateurs et capacité électrique	24
2.4	Bobines et inductance	25
2.5	Applications à des circuits soumis à des échelons de tension	27
2.5.1	Dans un circuit RC série	28
2.5.2	Dans un circuit RL série	29
2.5.3	Dans un circuit RLC parallèle	30
3	Circuits linéaires du premier ordre	32
3.1	Charge d'un condensateur dans un circuit <i>RC</i> série	32
3.1.1	Établissement de l'équation électrique	33
3.1.2	Solutions de l'équation électrique	34
3.1.3	Régime transitoire, régime permanent	35
3.1.4	Recherche des conditions initiales	36
3.1.5	Résolution de l'équation électrique	37
3.2	Établissement du courant dans un circuit <i>RL</i> série	40
3.2.1	Détermination de $i(t)$	40
3.2.2	Bilan énergétique	41
4	Circuits linéaires du deuxième ordre	44
4.1	Oscillations harmoniques d'un circuit <i>LC</i>	44
4.1.1	Solutions	45
4.1.2	Bilan énergétique	49
4.2	Réponses amorties d'un circuit <i>RLC</i>	49
4.2.1	Équation électrique	50
4.2.2	Équation caractéristique	51
4.2.3	Régime apériodique ($Q < 1/2$)	52
4.2.4	Régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$)	55
4.2.5	Régime apériodique critique	58

Chapitre 1 : Circuits en régime permanent

Objectifs du programme	
Charge électrique, intensité du courant. Potentiel, référence de potentiel, tension. Puissance.	Justifier que l'utilisation de grandeurs électriques continues est compatible avec la quantification de la charge électrique. Exprimer l'intensité du courant électrique en termes de débit de charge. Relier la loi des nœuds au postulat de la conservation de la charge. Utiliser la loi des mailles. Algébriser les grandeurs électriques et utiliser les conventions récepteur et générateur. Citer les ordres de grandeur des intensités et des tensions dans différents domaines d'application.
Dipôles : résistances, sources décrites par un modèle linéaire.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeur de résistances. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance. Modéliser une source en utilisant la représentation de Thévenin.
Association de deux résistances.	Remplacer une association série ou parallèle de deux résistances par une résistance équivalente. Établir et exploiter les relations des diviseurs de tension ou de courant.

1.1 Grandeurs électriques dans un circuit

On dit qu'un circuit est en **régime permanent** lorsque les grandeurs qui le décrivent (courant électrique, tension électrique...) ne dépendent pas du temps.

1.1.1 Généralités

Dipôles

On appelle **dipôle** un élément possiblement conducteur d'électricité et possédant deux bornes (ou pôles). On définit pour chaque dipôle un symbole permettant de les schématiser (voir figure 1.1).

Question 1 : Indiquer les noms de chacun des dipôles de la figure 1.1.

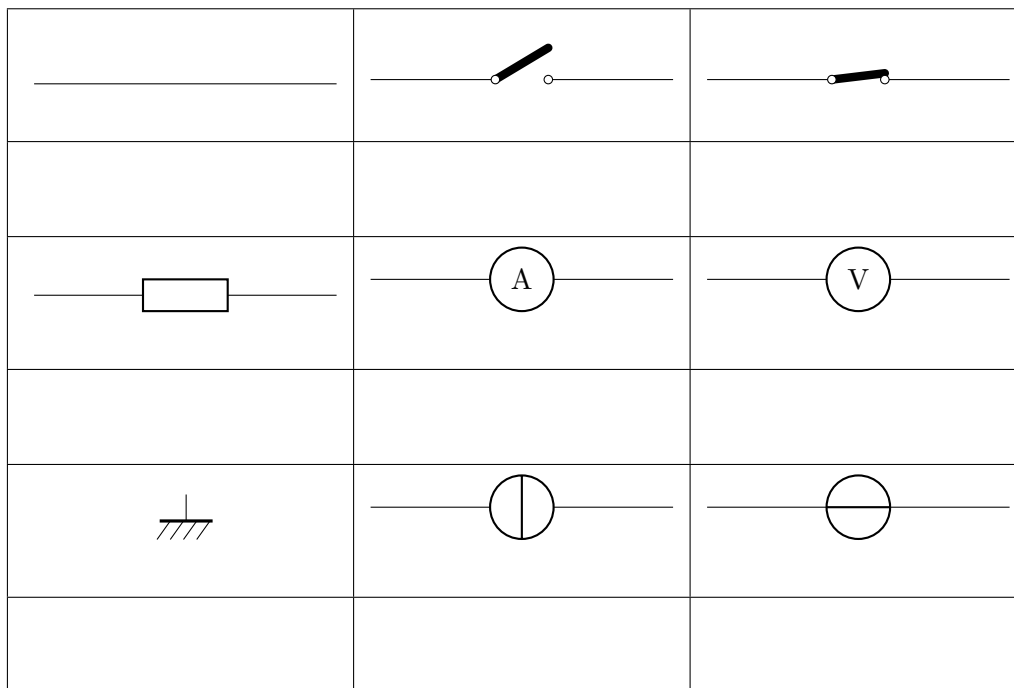


FIGURE 1.1 – Exemple de dipôles.

Un circuit électrique (utile) est composé d'au moins un générateur, un récepteur (résistor, moteur, DEL, etc.) et de fils de connexion. Ainsi, les deux schémas de la figure 1.2 modélisent des circuits électriques.

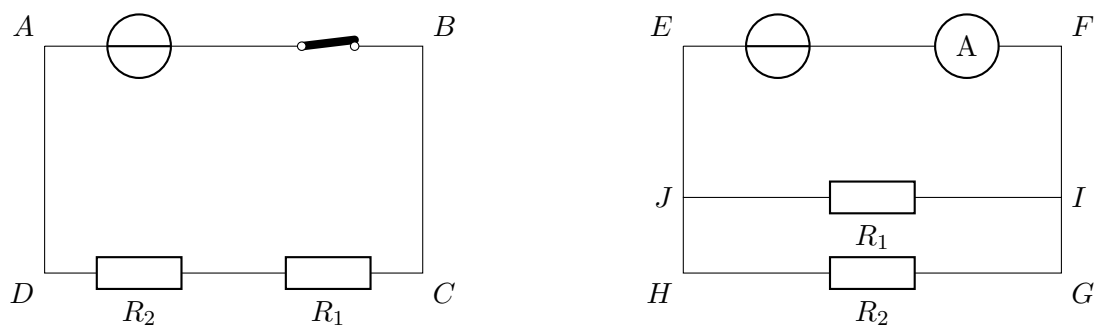
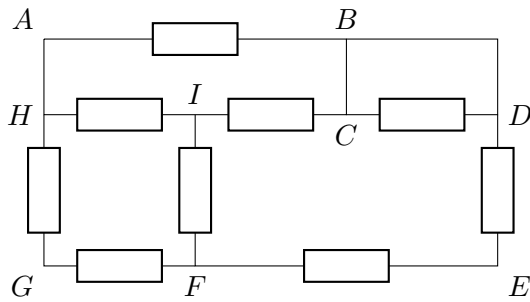


FIGURE 1.2 – Exemples de circuits électriques.

Nœuds et mailles

Un **nœud** est une connexion qui relie au moins trois dipôles entre eux. Par exemples, les points I et J sont des nœuds dans le deuxième circuit de la figure 1.2.

Une **maille** est un chemin fermé dans un circuit électrique. Par exemple, le chemin $ABCD$ est une maille dans le premier circuit de la figure 1.2.



Question 2 : Entourer en rouge tous les nœuds du circuit ci-contre.

Question 3 : Identifier six mailles du circuit ci-dessus.

Série et dérivation

Deux dipôles sont montés en **série** si aucun nœud n'est présent entre les deux. Par exemple, les résistors du premier circuit de la figure 1.2 sont en série.

Deux dipôles sont montés en **dérivation**^a si leurs bornes sont connectées aux mêmes nœuds. Par exemple, les résistors du deuxième circuit de la figure 1.2 sont en dérivation.

^a. On dit aussi que les dipôles sont montés en **parallèle**.

Question 4 : La source de tension et les deux résistors du premier circuit de la figure 1.2 sont-ils en série ou en dérivation ?

Question 5 : Que dire de la source de tension et du résistor de résistance R_1 du deuxième circuit de la figure 1.2 ?

1.1.2 Charge, courant et loi des nœuds

Charge électrique

La **charge électrique** est une grandeur physique portée par certains corps qui caractérise leur capacité à créer ou à être influencées par un champ électromagnétique. L'unité de la charge électrique est, dans le Système International, le coulomb C.

Les charges électriques proviennent de la présence d'électrons, de charge électrique négative $q_e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, et/ou de protons, de charge électrique positive $q_p = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. On remarque que $q_p = -q_e$: on note alors $e = |q_p| = |q_e|$ la **charge élémentaire** : la charge électrique d'un corps est nécessairement un multiple entier de e . On dit que la charge électrique est **quantifiée**.

Question 6 : Pourquoi le courant ne paraît-il pas quantifié expérimentalement, alors que la charge électrique l'est bien ?

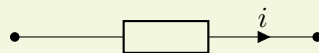
Courant électrique

Le **courant électrique** correspond au mouvement d'ensemble de porteurs de charges dans un conducteur. Ceux-ci sont généralement des électrons, qui sont mis en mouvement par un générateur.

L'**intensité i d'un courant électrique**^a en un point donné se définit à partir du nombre de charges électriques dq passant par ce point en un temps infinitésimal dt :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

On représente l'intensité du courant i traversant un dipôle par une flèche entrant dans ce dipôle :



L'unité de l'intensité d'un courant est, dans le Système International, l'ampère A.

^a. Souvent appelée « intensité électrique », voire « intensité » tout court.

☛ **Remarque** : L'intensité peut aller du microampère (circuits électroniques sensibles) à quelques ampères pour les appareils domestiques, et atteindre plusieurs kiloampères dans les installations industrielles ou lors de courts-circuits.

☛ **Remarque** : Le courant électrique représente par définition le mouvement des charges positives. Seulement, dans la plupart des circuits électriques, les charges se déplaçant sont des électrons de charge négative. Ainsi, lorsqu'on représente un courant allant de la gauche vers la droite, cela signifie en réalité que les électrons vont de la droite vers la gauche...

Faisons à présent une analogie simple avec une canalisation. L'analogie du courant électrique est un courant d'eau d'un certain débit ; les nœuds correspondent alors à des intersections de canalisations (voir figure 1.3).

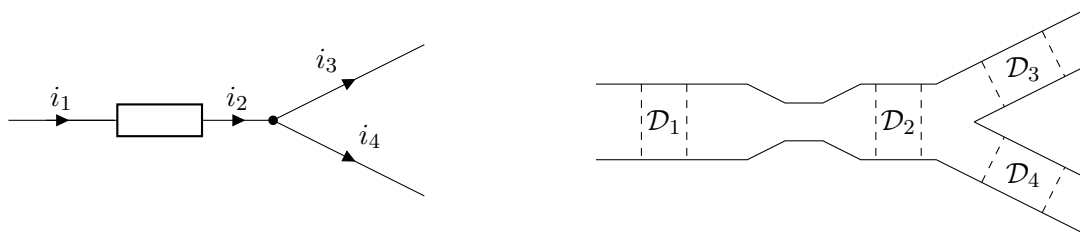


FIGURE 1.3 – Analogie hydro-électrique : les courants i deviennent des débits $\mathcal{D}$.

Question 7 : Que peut-on dire des débits $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, en supposant que l'eau circulant dans les canalisations remplit totalement ces dernières ?

Conservation du courant électrique

Entre deux nœuds, l'intensité du courant électrique est la même, quel que soit le nombre de dipôles que ce courant traverse. En particulier, au sein d'une unique maille ne possédant aucun nœud, l'intensité du courant électrique est en tout point du circuit la même.

Cette propriété est due à la **conservation de la charge électrique** : on ne peut perdre ou créer des charges dans un circuit électrique.

Question 8 : Que peut-on dire des débits $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ par rapport au débit $\mathcal{D}_2$?

Loi des nœuds

La **loi des nœuds** énoncé que la somme des intensités de courant entrant à un nœud est égale à la somme des intensités de courant sortant de ce nœud :

$$\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}$$

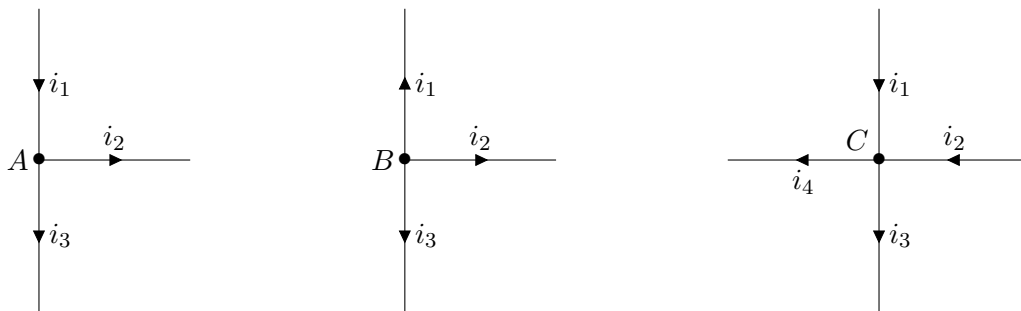


FIGURE 1.4 – Trois nœuds.

Question 9 : En appliquant les lois des nœuds en A , B et C , déterminer dans chaque cas de la figure 1.4 l'expression de i_2 en fonction de i_1 , i_3 et i_4 .

☛ **Remarque :** L'intensité du courant peut être positive ou négative : cela dépend du sens que l'on définit sans connaissance de cause de la réalité. Par exemple, si l'on mesure ou calcule que i_2 est négative, cela signifie que le courant irait en réalité non pas vers la droite mais vers la gauche.

1.1.3 Potentiel, tension et loi des mailles

Potentiel électrique

Le **potentiel électrique** ^a ϕ est une grandeur définie en tout point de l'espace. Il correspond au rapport entre l'énergie potentielle électrique que posséderait une charge électrique en ce point et sa charge électrique : ^b

$$\phi = \frac{\mathcal{E}_{p,\text{élec}}}{q}$$

^a. Plus souvent noté V , mais je ne veux pas de confusion entre le potentiel V et son unité, qui s'avère être le volt que l'on note également V ...

^b. Le potentiel électrique sera défini plus rigoureusement plus tard dans l'année.

☛ **Remarque :** Le potentiel électrique est en fait défini à une constante additive près : choisir $\phi' = \phi + \text{cste}$ ne change pas la description physique du système. En effet, nous verrons que la tension électrique repose sur des différences de potentiels et que l'étude d'un système repose sur les variations (et donc les différences) de son énergie au cours du temps.

☛ **Remarque :** Afin de fixer une origine des potentiels, on décide souvent que la présence d'une masse indique là où le potentiel est égal à 0 V , ce qui simplifie souvent les calculs. Nous aborderons ce point en travaux pratiques.

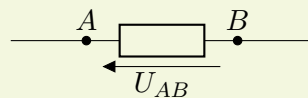
Question 10 : On admet¹ que tout corps a pour but de minimiser son énergie potentielle. Une particule chargée positivement est-elle attirée ou repoussée par les hauts potentiels ? Les faibles potentiels ? Que dire des courants vis-à-vis des potentiels électriques ?

Tension électrique

La **tension électrique** U_{AB} entre deux points A et B est égale à la différence de potentiels entre ces deux points :

$$U_{AB} = \phi_A - \phi_B$$

On la représente, sur un circuit électrique, par une flèche externe au circuit allant du point B au point A .



L'unité de la tension électrique est, dans le Système International, le volt V.

☛ **Remarque :** Comme écrit précédemment, un courant a naturellement tendance à aller des hauts potentiels vers les faibles potentiels. Ainsi, en définissant positivement l'intensité i parcourant un dipôle et la tension U à ses bornes, on aura naturellement i opposé à U . Nous reviendrons sur cette remarque lorsque nous parlerons des conventions récepteur et générateur.

☛ **Remarque :** Dans les applications courantes, la tension varie de quelques millivolts (signaux électroniques) à quelques volts (appareils portables), jusqu'à 230 V pour le réseau domestique et plusieurs kilovolts dans les lignes haute tension.

Question 11 : Que peut-on dire de la tension U_{BA} par rapport à la tension U_{AB} ?

☛ **Remarque :** Une tension peut donc être positive ou négative. Une tension peut également être nulle : aux bornes d'un fil, la tension est toujours égale à 0 V.

1. Et on le démontrera en mécanique.

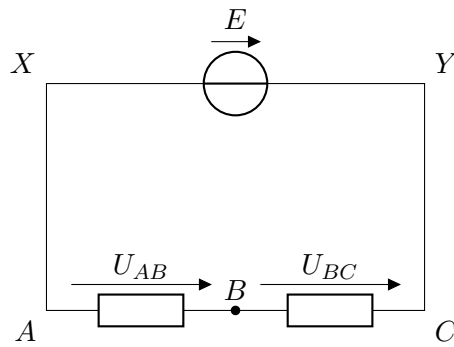


FIGURE 1.5 – Exemple de circuit électrique.

Question 12 : Montrer que la tension U_{AC} entre les points A et C de la figure 1.5 peut s'exprimer simplement en fonction des tensions U_{AB} et U_{BC} aux bornes des deux dipôles.

Question 13 : Montrer, en extrapolant le résultat précédent, que l'on a $E - U_{AB} - U_{BC} = 0$

Additivité des tensions et loi des mailles

Pour trois points quelconques A , B et C d'un circuit électrique, la **loi d'additivité des tensions** énonce que ^a :

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$$

La **loi des mailles** énonce alors que, dans une maille quelconque $(ABC...YZA)$, la somme des tensions est nulle :

$$U_{AB} + U_{BC} + \dots + U_{YZ} + U_{ZA} = 0$$

^a. C'est une loi très similaire à la loi de Chasles mathématique.

☛ **Remarque** : Il faut bien faire attention à la définition des tensions dans le circuit. Par exemple, dans la figure 1.6, on a bien $U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0$; en revanche, on n'a pas $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$. En effet, si l'on choisit par exemple le sens horaire pour appliquer la loi des mailles, on aura $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0$.

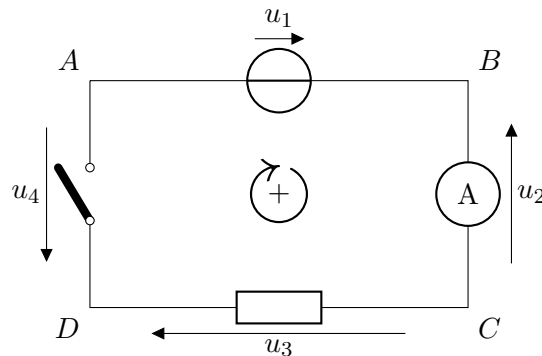


FIGURE 1.6 – Exemple de circuit électrique. Le symbole au centre du circuit explique dans quel sens on « décompte » les tensions électriques : positivement pour celles qui sont orientées dans le sens des aiguilles d'une montre, et négativement pour celles qui sont orientées dans l'autre sens.

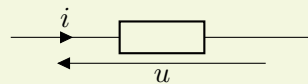
1.2 Étude de quelques dipôles

1.2.1 Puissance électrique

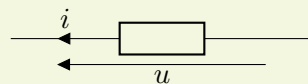
Au moment où l'on aborde l'étude d'un circuit électrique, il faut « baptiser » les tensions et courants des différents composants. Quand cela est possible, il est préférable de choisir des conventions de sens pour des tensions et courants correspondant à la réalité de façon à avoir des grandeurs positives.

Malheureusement, avant d'avoir fait le calcul, on ne sait pas toujours quel sera ce sens positif. Ce n'est pas grave : on peut faire un choix arbitraire et on verra si le résultat est positif ou négatif.

Conventions récepteur et générateur



Si les flèches de courant et de tension sont de sens opposés, on est en **convention récepteur**.



Si les flèches de courant et de tension sont dans le même sens, on est en **convention générateur**.

☛ **Remarque** : Le réflexe à avoir est donc de choisir la bonne convention quand on a à poser soi-même les tensions et intensités. **De manière générale, on posera les sources d'énergie électrique en convention générateur, et les autres dipôles en convention récepteur.**

Puissance électrique instantanée

Soit un dipôle parcouru par une intensité $i(t)$ et ayant une tension $u(t)$ à ses bornes, ces deux grandeurs étant définies en convention récepteur. La **puissance électrique** instantanée $\mathcal{P}(t)$ reçue par ce dipôle est le produit de l'intensité du courant par la tension :

$$\mathcal{P}(t) = u(t) \times i(t)$$

L'unité de la puissance électrique dans le système international est le watt W.

1.2.2 Caractéristique d'un dipôle**Caractéristique d'un dipôle**

La **caractéristique d'un dipôle électrique** est la relation ^a existant entre l'intensité i du courant traversant le dipôle et la tension u aux bornes de celui-ci.

^a. Au sens mathématique du terme : $i = f(u)$, c'est-à-dire que i dépend de u selon une fonction f .

☛ **Remarque** : Expérimentalement, le montage le plus simple pour étudier la caractéristique d'un dipôle est celui en figure 1.7. On notera que l'ampèremètre, qui mesure l'intensité, se branche en série du dipôle (car on mesure l'intensité dans la branche) ; en revanche, le voltmètre, qui mesure la tension, se branche en dérivation du dipôle (car on mesure la différence de potentiel entre les deux bornes du dipôle). Le résistor de résistance R en série de la source de tension est présent pour éviter un possible court-circuit si l'intensité du courant est trop importante.

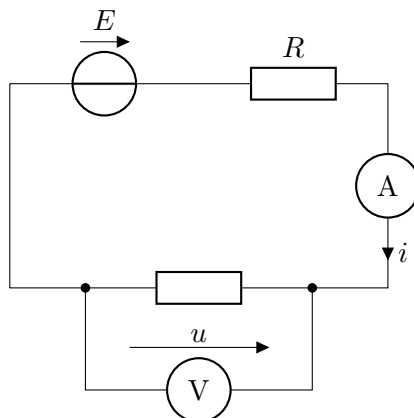


FIGURE 1.7 – Mesure de la caractéristique d'un dipôle.

Question 14 : Tracer la caractéristique d'un fil, et celle d'un interrupteur ouvert.

1.2.3 Les résistors

Un résistor est un dipôle ayant pour but de réguler l'intensité du courant électrique dans une branche. Étudions la caractéristique d'un résistor (figure 1.8).

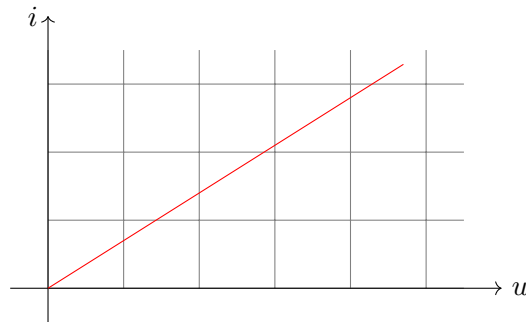


FIGURE 1.8 – Caractéristique d'un résistor.

Question 15 : Que peut-on dire de la caractéristique d'un résistor ? Quel lien y a-t-il entre la tension à ses bornes et l'intensité le parcourant ?

Loi d'Ohm

En convention récepteur, la tension u aux bornes d'un résistor est proportionnelle à l'intensité i la parcourant : c'est la **loi d'Ohm**. Mathématiquement, on a :

$$u = R \times i$$

avec R la **résistance** du résistor, qui s'exprime en ohm Ω dans le Système International. Elle quantifie la difficulté que le courant a à traverser un résistor face à une tension donnée.

☛ *Remarque :* En convention générateur, on aura alors $u(t) = -R \times i(t)$. Il faut donc être très vigilant à la façon dont on indique les tensions et les intensités pour un résistor.

☛ *Remarque :* Les résistances utilisées en travaux pratiques sont comprises, en ordre de grandeur, entre $10\text{ k}\Omega$ et $100\text{ k}\Omega$. On peut également citer d'autres résistances typiques, comme celle d'un ampèremètre ($10\text{ }\Omega$) et celle d'un voltmètre ($1\text{ M}\Omega$).

Question 16 : Par quelle valeur de résistance peut-on modéliser un fil ? Un interrupteur ouvert ?

Question 17 : Déterminer la puissance reçue par un résistor en fonction de R et de $i(t)$, puis en fonction de R et de $u(t)$. Commenter le signe.

Effet Joule

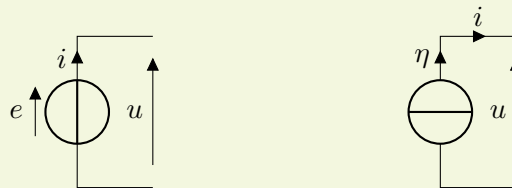
Soit un résistor de résistance R parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ et possédant une tension $u(t)$ à ses bornes. Le résistor perçoit une puissance électrique :

$$\mathcal{P}_R = R \times i^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

L'énergie emmagasinée est libérée plus tard sous forme de chaleur : c'est l'**effet Joule**.

1.2.4 Les sources d'énergie électrique

Sources idéales d'énergie électrique



Une **source idéale de tension** (gauche) délivre la tension $u = e$ quel que soit le courant i la traversant. e est alors appelée la **force électromotrice** (ou fém).

Une **source idéale de courant** (droite) délivre le courant d'intensité $i = \eta$ quelle que soit la tension u à ses bornes. η est alors appelé le **courant électromoteur**.

En réalité, les caractéristiques que l'on observe pour des sources de tension sont de la forme de la figure 1.9.

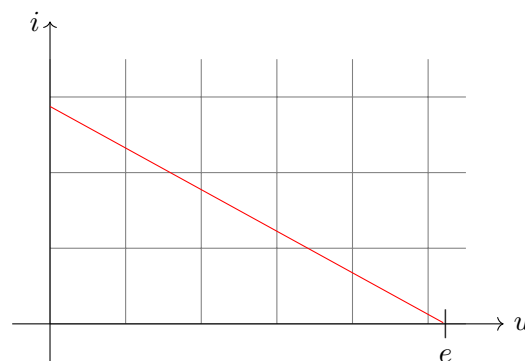


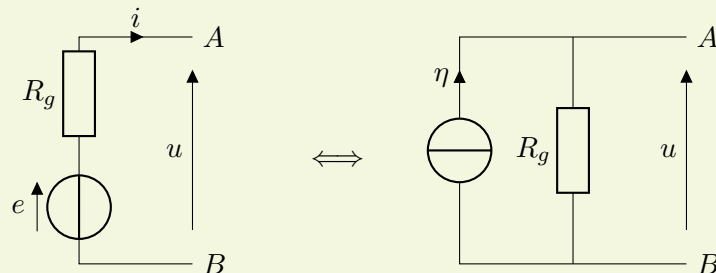
FIGURE 1.9 – Caractéristique d'une source de tension réelle.

Question 18 : Que vaut u si $i = 0$? Est-ce cohérent ?

Question 19 : Sachant que la pente de la droite de la figure 1.9 est $-\frac{1}{R_g}$, montrer que l'on a $u = e - R_g i$. Par quoi pourrait-on alors modéliser une source de tension réelle ?

Sources réelles d'énergie électrique

Il existe deux modèles équivalents pour décrire une **source réelle d'énergie électrique** entre deux points A et B :



Ainsi, une **source réelle de tension**, qui est constituée d'une source idéale de tension et d'une résistance en série, est équivalente à une **source réelle de courant**, qui est constituée d'une source idéale de courant et d'une résistance en dérivation.

☛ **Remarque :** Les deux sources sont liées par la formule $e = R_g \eta$, où R_g est la résistance interne du générateur. Cette relation n'est pas à connaître.

☛ **Remarque :** Dans un circuit électrique, on pourra indifféremment passer d'une représentation à une autre (dans les faits, on préférera souvent la première) car elles amèneront aux mêmes résultats. Il faut cependant bien savoir où sont placées la tension u et l'intensité i dans les deux cas...

1.3 Associations de résistances

Le but de cette partie est de pouvoir simplifier des schémas électriques lorsque plusieurs résistances sont présentes en série ou en dérivation. On réutilisera cette technique avec les condensateurs et les bobines dans quelques chapitres...

1.3.1 Résistances en série et pont diviseur de tension

On suppose que deux résistances R_1 et R_2 sont en série (voir figure 1.10).

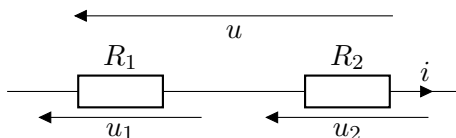


FIGURE 1.10 – Deux résistances en série.

Question 20 : Montrer que l'on a $u = (R_1 + R_2)i$.

Résistances en série

Deux résistors de résistances R_1 et R_2 en série sont équivalentes à un résistor de résistance :

$$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2$$

En généralisant, n résistors de résistances $R_1, \dots, R_n$ en série sont équivalentes à un résistor de résistance :

$$R_{\text{éq}} = R_1 + \dots + R_n = \sum_{k=1}^n R_k$$

Prenons maintenant l'exemple d'un circuit constitué d'une source de tension e et de trois résistances en série R_1 , R_2 et R_3 (figure 1.11).

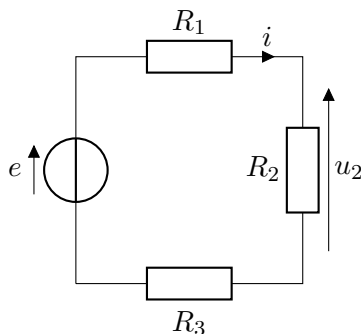


FIGURE 1.11 – Pont diviseur de tension.

Question 21 : Après avoir montré que l'on a $e = (R_1 + R_2 + R_3)i$, donner une expression de u_2 en fonction de e , R_1 , R_2 et R_3 .

Pont diviseur de tension

Un **pont diviseur de tension** est un montage électronique permettant de diviser une tension d'entrée à l'aide d'au moins deux résistances (voir figure 1.11). La tension de sortie $\tilde{u}$ mesurée aux bornes de la résistance $\tilde{R}$ est :

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{R}}{\sum_k R_k}$$

☛ *Remarque :* Dans les sujets et exercices, la difficulté n'est pas vraiment de savoir appliquer cette formule, mais surtout de repérer des cas un peu calculatoires qui seraient très vite simplifiés si l'on identifiait une branche à un pont diviseur de tension. Comme toute chose, c'est à force de faire des exercices que l'on repère ces ponts diviseurs au premier (ou au moins au deuxième) coup d'œil.

1.3.2 Résistances en parallèle et pont diviseur de courant

Supposons à présent que l'on ait deux résistors, non plus en série mais en parallèle. Les résistances associées sont toujours R_1 et R_2 (voir figure 1.12).

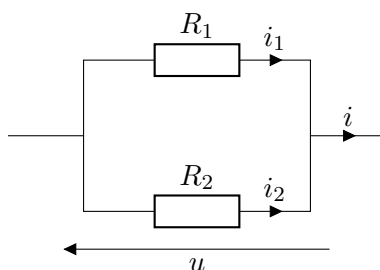


FIGURE 1.12 – Deux résistances en parallèle.

Question 22 : Après avoir appliqué la loi des nœuds, exprimer i en fonction de u , R_1 et R_2 .

Résistances en parallèle

Deux résistors de résistances R_1 et R_2 en parallèle sont équivalentes à un résistor de résistance R_{eq} telle que :

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

En généralisant, n résistors de résistances $R_1, \dots, R_n$ en parallèle sont équivalentes à un résistor de résistance R_{eq} telle que :

$$R_{\text{eq}} = \frac{1}{R_1} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

Question 23 : Quelle est la résistance équivalente de n résistors identiques, chacun de résistance R_0 ?

Prenons à présent l'exemple d'un circuit constitué d'une source de courant η et de trois résistances en parallèle R_1 , R_2 et R_3 (figure 1.13).

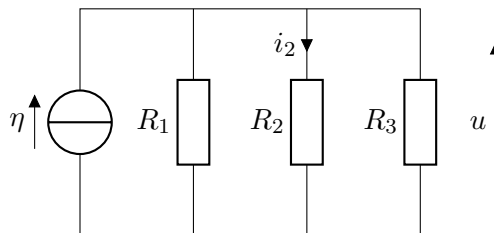


FIGURE 1.13 – Pont diviseur de courant.

Question 24 : Après avoir montré que l'on a $\eta = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) u$, donner une expression de i_2 en fonction de η , R_1 , R_2 et R_3 .

Pont diviseur de courant

Un **pont diviseur de courant** est un montage électronique permettant de diviser un courant d'entrée à l'aide d'au moins deux résistances (voir figure 1.13). Le courant de sortie $\tilde{i}$ mesuré aux bornes de la résistance $\tilde{R}$ est :

$$\tilde{i} = \frac{1/\tilde{R}}{\sum_k 1/R_k}$$

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Énoncer la loi de conservation de la charge électrique. Énoncer et justifier alors la loi des nœuds. Quelles sont les unités SI de la charge électrique et de l'intensité du courant électrique ? Citer des ordres de grandeur d'intensités dans différents domaines d'application.
- ☐ Énoncer la loi d'additivité des tensions et la loi des mailles. Quelle est l'unité SI de la tension électrique ? Citer des ordres de grandeur de tensions dans différents domaines d'application.
- ☐ Expliquer en quoi consistent la convention récepteur et la convention générateur pour un dipôle.
- ☐ Énoncer la loi d'Ohm et tracer la caractéristique d'un résistor. Citer des ordres de grandeur de résistances. Qu'est-ce que l'effet Joule ?
- ☐ Définir une source idéale de tension ainsi qu'une source réelle de tension. Tracer la caractéristique d'une source réelle de tension.
- ☐ Rappeler les expressions des résistances équivalentes à deux résistors en série ou en parallèle.
- ☐ Rappeler et démontrer la formule du pont diviseur de tension pour trois résistors en série.
- ☐ Rappeler et démontrer la formule du pont diviseur de courant pour trois résistors en parallèle.

Chapitre 2 : Continuités dans les circuits

Objectifs du programme	
Dipôles : condensateurs, bobines.	Utiliser les relations entre l'intensité et la tension. Citer des ordres de grandeur de capacités électriques et d'inductances. Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine.
Réponse à un échelon de tension.	Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.

2.1 Rappels sur la dérivée et l'intégrale

2.1.1 La dérivée

Soit une fonction f et deux réels a et h .

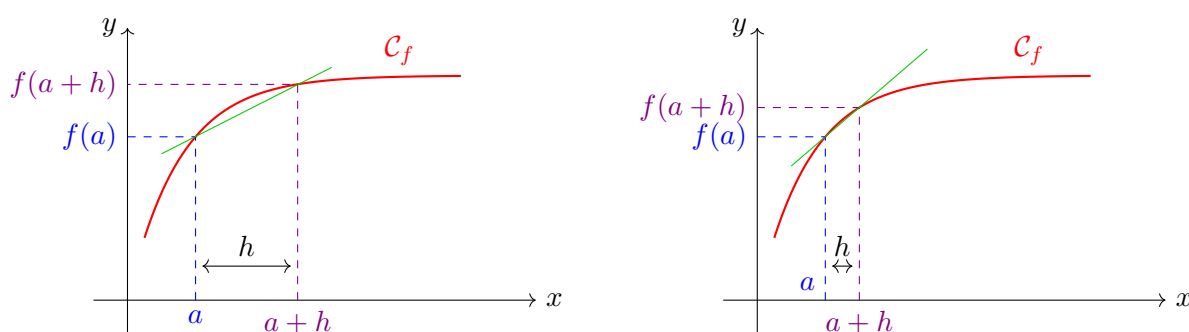


FIGURE 2.1 – Droite intersectant la courbe représentative d'une fonction f aux abscisses a et $a + h$, avec $a = 1$. À gauche, on a $h = 1,5$; à droite on a $h = 0,5$.

Question 1 : Déterminer le coefficient directeur/la pente passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(a + h, f(a + h))$.

La quantité $\tau_a(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction f en a pour un pas de h . Il indique si la fonction a été globalement croissante entre les abscisses a et $a + h$.

Lorsque h est de plus en plus petit¹, la droite devient progressivement tangente à C_f en l'abscisse a (voir figure 2.1). On définit alors la dérivée de f en un point a par la limite du taux d'accroissement :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

1. En mathématiques, on dit : lorsque h tend vers 0.

$f'(a)$ correspond alors au coefficient directeur de la tangente de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a : cette dérivée indique localement si une fonction est croissante ($f'(a) > 0$) ou décroissante ($f'(a) < 0$).

La notation dx , en physique, signifie *variation infinitésimale*² de x . Si h est suffisamment petit (c'est-à-dire infinitésimal), on peut ainsi le noter dx : il s'agit d'une très petite variation sur l'axe horizontale des x . De même, on peut donc remplacer $f(a+h) - f(a)$ par df : c'est une très petite variation de la fonction f .

Ainsi, la notation $f'(a)$ peut se remplacer, en physique, par la notation : $\frac{df}{dx}(a)$. On appelle l'écriture $\frac{df}{dx}(a)$ la notation de Leibniz, en « opposition » à l'écriture $f'(a)$, qui est la notation de Lagrange.

Il faut alors bien comprendre que cette dérivée, en physique-chimie³, correspond bien à un quotient entre une variation infinitésimale dx et la variation infinitésimale df de la fonction f associée.

2.1.2 L'intégrale

Supposons qu'une personne soit en train de courir sur une route plate ; on note v sa vitesse, pour l'instant constante. La distance L parcourue pendant une durée Δt est alors tout simplement $L = v \times \Delta t$.

En revanche, si la vitesse $v(t)$ dépend du temps (la personne se fatigue et court de moins en moins vite, par exemple), on ne peut pas simplement écrire la relation précédente pour L : quelle valeur de vitesse doit-on prendre ? Celle au début, celle à la fin, ... ?

L'astuce est de se dire que, si $v(t)$ ne varie pas trop vite, on peut « découper » L comme une somme de petites longueurs. Par exemple, si la personne court une heure, il n'est pas incohérent de décomposer le mouvement en soixante intervalles d'une minute, et d'écrire que :

$$L = v_0 \times 1 \text{ min} + v_1 \times 1 \text{ min} + v_2 \times 1 \text{ min} + \dots + v_{59} \times 1 \text{ min}$$

avec v_t correspondant à la vitesse à la minute t (ex : v_{30} est la vitesse à la trentième minute). En effet, chaque terme $v_t \times 1 \text{ min}$ correspond approximativement à la distance parcourue entre la m -ième et la $(m+1)$ -ième minute. On peut alors écrire :

$$L = \sum_{t=0 \text{ min}}^{t=59 \text{ min}} v(t) \times 1 \text{ min}$$

Si l'on cherche encore à affiner le calcul, on peut choisir des intervalles de temps de plus en plus courts ; tellement courts qu'on va les considérer infinitésimaux, et les noter dt . Cependant, alors que l'on avait plus tôt 60 termes à additionner, il y en a maintenant un nombre gigantesque, presque indénombrable...

Afin de signaler que la somme ne porte plus sur des quantités dénombrables mais plutôt indénombrables, on utilise alors le symbole $\int$ et non plus $\sum$. Il faut toutefois garder en tête qu'il s'agit toujours d'une somme⁴, que l'on écrit :

$$L = \int_{\text{instant initial}}^{\text{instant final}} v(t) dt$$

2. Relatif aux quantités infiniment petites ; infiniment petit.

3. Et uniquement ici : la théorie est en fait bien plus compliquée, et votre professeure de mathématiques vous taperait sur les doigts si vous lui expliquiez ça dans son cours !

4. C'est d'ailleurs l'origine du symbole $\int$, qui représente initialement une lettre « S » stylisée.

2.2 De la puissance électrique à l'énergie électrique

Énergie électrique reçue par un dipôle

Prenons l'exemple d'un dipôle étudié en convention récepteur.

L'énergie électrique $\Delta\mathcal{E}$ reçue par le dipôle entre deux instants t_1 et t_2 est alors :

$$\Delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt$$

- Pour un dipôle passif, on aura $\mathcal{P} > 0$ et donc $\Delta\mathcal{E} > 0$: le dipôle gagne de l'énergie de la part du circuit.
- Pour un dipôle actif, on aura $\mathcal{P} < 0$ et donc $\Delta\mathcal{E} < 0$: le dipôle cède de l'énergie au circuit.

☛ **Remarque** : L'énergie d'un système est toujours continue du temps : on ne peut avoir une perte ou un gain d'énergie instantané, car cela correspondrait à une puissance infinie.

Question 2 : Si la tension et l'intensité du courant sont indépendantes du temps, comment se simplifie l'expression de $\Delta\mathcal{E}$?

Puissance électrique et énergie électrique en régime indépendant du temps

Dans le cas d'un dipôle étudié en régime permanent pendant une durée Δt , on aura :

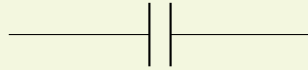
$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{P} \times \Delta t$$

2.3 Condensateurs et capacité électrique

Condensateur

Un **condensateur** est un dipôle constitué de deux armatures conductrices et séparées par un isolant. Chaque armature possède une charge $\pm Q$, opposée à celle de l'autre armature. C'est un dipôle capable de stocker temporairement des charges électriques, et donc de l'énergie.

Le symbole d'un condensateur dans un circuit électrique est le suivant :



La charge (en valeur absolue) Q présente sur chacune des armatures est proportionnelle à la tension u aux bornes du condensateur :

$$Q = C \times u$$

Le coefficient de proportionnalité C est la **capacité** du condensateur, dont l'unité SI est le farad F.

☛ *Remarque* : En pratique, les capacités varient typiquement entre 1 nF et 1 μF.

Relation intensité-tension pour un condensateur

L'intensité i parcourant un condensateur est proportionnelle à la dérivée temporelle de la tension u à ses bornes. En convention récepteur, on a :

$$i = C \frac{du}{dt}$$

☛ *Remarque* : En convention générateur, on aurait $i = -C \frac{du}{dt}$.

Question 3 : Rappeler le lien entre l'intensité i du courant électrique. En déduire une relation entre i , C et u .

Question 4 : Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_C$ reçue par le condensateur. En déduire, si le condensateur est initialement (à $t = 0$) à une tension nulle, que l'énergie électrique emmagasinée par celui-ci à l'instant t est proportionnelle à $u^2(t)$.

Énergie emmagasinée par un condensateur

L'énergie $\mathcal{E}_C$ stockée dans un condensateur dont la tension à ses bornes est u vaut :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2$$

On peut réécrire cette formule sous la forme : $\mathcal{E}_C = \frac{Q^2}{2C}$.

Si la tension du condensateur subissait une discontinuité, alors son énergie également : c'est impossible puisqu'une telle variation exigerait une puissance infinie ! On en déduit que la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

Question 5 : En régime permanent, u et i sont constants. Quelle est nécessairement la valeur de i ? Quel dipôle simple possède cette propriété ?

Comportement asymptotique d'un condensateur

En régime permanent, un condensateur est équivalent à **un interrupteur ouvert**.

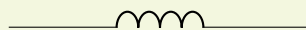
☛ *Remarque :* Le comportement asymptotique d'un dipôle est pertinent à utiliser lorsqu'il est étudié en régime permanent... donc lorsque le circuit est en route depuis très longtemps ! Cela n'arrive que dans deux cas : lorsque $t \rightarrow +\infty$, et très souvent en $t = 0^-$, si l'on suppose que le circuit était dans son état précédent depuis une durée suffisamment longue.

2.4 Bobines et inductance

Bobine

Une **bobine** est un dipôle constitué d'un enroulement de fils (des spires) autour d'un même axe. Le passage d'un courant dans une bobine crée un champ magnétique qui lui confère des propriétés électriques.

Le symbole d'une bobine dans un circuit électrique est le suivant :

**Relation intensité-tension pour une bobine**

La tension u aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée temporelle de l'intensité i la traversant. En convention récepteur, on a donc :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

Le coefficient de proportionnalité L est l'**inductance** de la bobine, dont l'unité SI est le henry H.

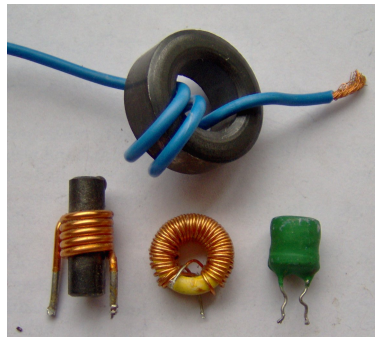


FIGURE 2.2 – Divers types de bobines. Par Miguel — Photograph, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1534586>

☛ *Remarque* : En pratique, les inductances varient typiquement entre 10 mH et 100 mH.

☛ *Remarque* : En convention générateur, on aurait $u = -L \frac{di}{dt}$.

Question 6 : Exprimer la puissance instantanée P_L reçue par la bobine. En déduire, si la bobine est initialement ($t = 0$) parcourue par un courant nul, que l'énergie électrique emmagasinée par celle-ci à l'instant t est proportionnelle à $i^2(t)$.

Énergie emmagasinée par une bobine

L'énergie $\mathcal{E}_L$ stockée dans une bobine traversée par un courant i est :

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} L i^2$$

On en déduit que l'intensité du courant parcourant une bobine ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

☛ *Remarque* : Ce que nous venons de modéliser n'est en fait pas une bobine réelle, mais ce que l'on appelle une bobine idéale. En effet, une bobine étant un enroulement de fils de longueur non négligeable, il s'avère qu'une bobine réelle est en fait modélisée par une bobine idéale L et un résistor r en série (voir figure 2.3). La résistance ajoutée correspond à celle des fils de l'enroulement.

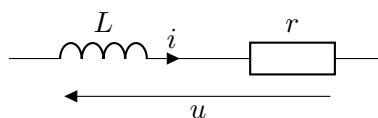


FIGURE 2.3 – Modélisation d'une bobine réelle.

Question 7 : Exprimer en fonction de i , L et r la tension u aux bornes d'une bobine réelle.

Question 8 : En régime permanent, u et i sont constants. Quelle est nécessairement la valeur de u ? Quel dipôle simple possède cette propriété ?

Comportement asymptotique d'une bobine

En régime permanent, une bobine est équivalente à **un fil**.

2.5 Applications à des circuits soumis à des échelons de tension

Un échelon de tension est une variation brutale de la tension aux bornes d'un dipôle ; par exemple : $u(t < 0) = -2 \text{ V}$ puis $u(t \geq 0) = 5 \text{ V}$.

Les grandeurs électriques ne sont pas toutes continues du temps suite à un échelon de tension : l'intensité du courant dans un condensateur peut⁵ varier brutalement, tout comme la tension aux bornes d'une bobine.

Seules deux grandeurs vérifient la continuité du temps :

- La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue du temps, c'est-à-dire que :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow t_0^-} u_C(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} u_C(t)$$

- L'intensité du courant traversant une bobine est toujours continue du temps, c'est-à-dire que :

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow t_0^-} i_L(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} i_L(t)$$

☛ **Remarque :** En physique, on note souvent $u(t = 0^+)$ à la place de $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)$ pour désigner la tension à l'instant juste après $t = 0$ (écriture analogue pour $t = 0^-$, donc juste avant $t = 0$).

On peut tirer de ces deux propriétés suffisamment d'informations pour déterminer l'état d'un circuit en $t = 0^+$ si on le connaît suffisamment en $t = 0^-$.

5. Il faut vraiment comprendre « pouvoir » comme une possibilité : parfois, l'intensité du courant dans un condensateur sera continue, mais parfois non. On ne peut donc pas tirer de vérité générale sans étudier le circuit.

2.5.1 Dans un circuit RC série

Un circuit RC série est composé d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C en série, possiblement alimentés par une source d'énergie électrique.

Dans notre étude, on supposera que le circuit est initialement éteint depuis « très longtemps ». À l'instant $t = 0$, on alimente le circuit par une source de tension : on passe instantanément de $e = 0$ à $e = E$ (voir figure 3.1).

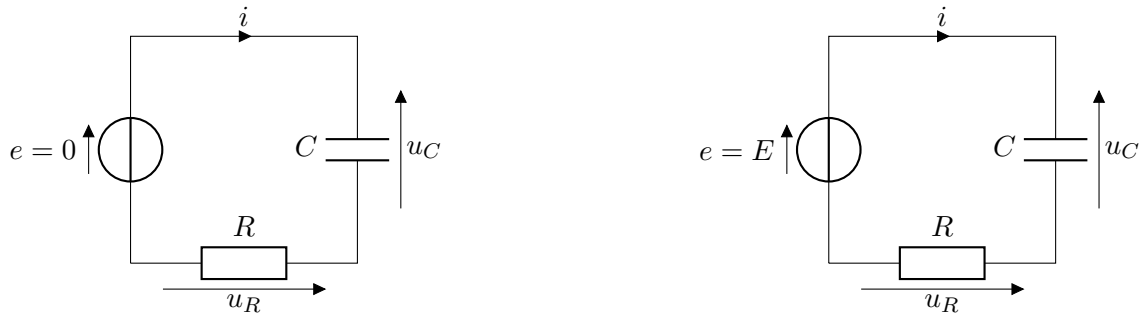


FIGURE 2.4 – Circuit RC série. Gauche : $t < 0$; droite : $t \geq 0$.

Question 9 : Tracer le circuit équivalent à $t = 0^-$. Que valent $u_R(t = 0^-)$ et $u_C(t = 0^-)$?

Question 10 : Déterminer la valeur de $u_C(t = 0^+)$ en la justifiant. En déduire celle de $u_R(t = 0^+)$. La tension aux bornes du résistor est-elle continue du temps ?

Question 11 : Que valent $i(t = 0^-)$ et $i(t = 0^+)$? Commenter.

2.5.2 Dans un circuit RL série

Le circuit ci-dessous est alimenté par un générateur idéal de tension continue et de force électromotrice E . À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur (voir figure 3.4).

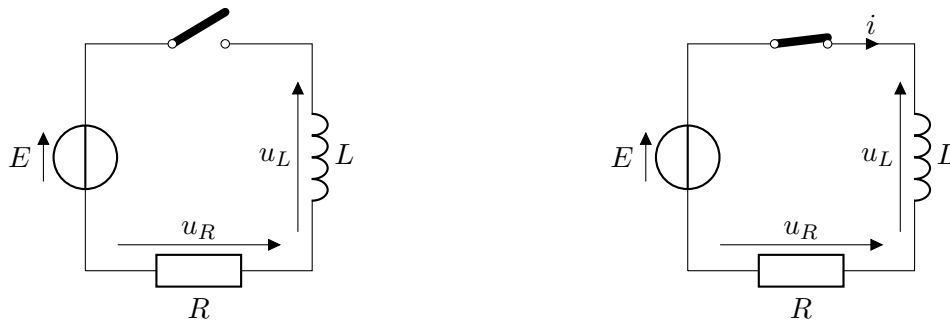


FIGURE 2.5 – Circuit RL série. Gauche : $t < 0$; droite : $t \geq 0$.

Question 12 : Que vaut $i(t = 0^-)$? En déduire, en justifiant, l'expression de $i(t = 0^+)$.

Question 13 : Tracer le circuit équivalent en $t = 0^-$, puis en déduire les expressions de $u_L(t = 0^-)$ et $u_R(t = 0^-)$.

Question 14 : Déterminer alors les expressions de $u_L(t = 0^+)$ et $u_R(t = 0^+)$. Ces tensions sont-elles continues du temps ?

2.5.3 Dans un circuit RLC parallèle

Le circuit ci-dessous est constitué d'une source idéale de courant, alimentant une résistance R , une bobine L et un condensateur C placés en dérivation.

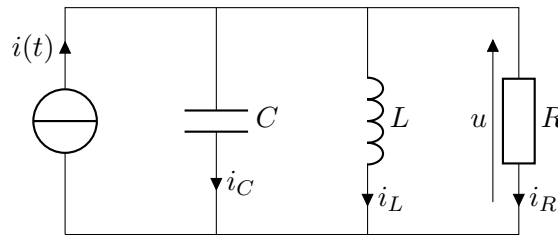


FIGURE 2.6 – Circuit RLC parallèle.

Pour $t < 0$, la source de courant débite un courant constant : $i(t < 0) = I$. À $t = 0$, on éteint le générateur : $i(t \leq 0) = 0$.

Question 15 : Tracer le circuit équivalent en $t = 0^-$, puis y déterminer les valeurs des différentes intensités et tensions en justifiant clairement les raisonnements.

Question 16 : Lesquelles des quatre grandeurs parmi i_C , i_L , i_R et u sont continues du temps ? Justifier.

Question 17 : Déterminer alors les expressions de ces intensités et tension en $t = 0^+$.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner le symbole d'un condensateur, ainsi que la relation intensité-tension correspondante. Rappeler l'unité SI et des ordres de grandeur de la capacité du condensateur.
- ☐ Donner l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur. Quelle grandeur est continue du temps dans ce dipôle ?
- ☐ Donner le symbole d'une bobine, ainsi que la relation intensité-tension correspondante. Rappeler l'unité SI et des ordres de grandeur de l'inductance d'une bobine.
- ☐ Donner l'expression de l'énergie stockée dans une bobine. Quelle grandeur est continue du temps dans ce dipôle ?
- ☐ En régime permanent, à quoi est équivalent un condensateur ? une bobine ?
- ☐  Soit un circuit RC série, longtemps alimenté par une tension E . On éteint le générateur à $t = 0$; déterminer les tensions et intensités dans le circuit en $t = 0^+$.
- ☐  Soit un circuit RL série, alimenté par une tension E . On rompt le courant à $t = 0$ à l'aide d'un interrupteur ; déterminer les tensions et intensités dans le circuit en $t = 0^+$.

Chapitre 3 : Circuits linéaires du premier ordre

Objectifs du programme

Régime libre, réponse à un échelon de tension.

Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.

Utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.

Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.

Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension.

Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

Stockage et dissipation d'énergie.

Réaliser un bilan énergétique.

3.1 Charge d'un condensateur dans un circuit RC série

Un circuit RC série est composé d'une résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C en série, possiblement alimentés par une source d'énergie électrique.

Dans notre étude, on supposera que le circuit est initialement éteint depuis « très longtemps ». À l'instant $t = 0$, on alimente le circuit par une source de tension : on passe instantanément de $e = 0$ à $e = E$ (voir figure 3.1).

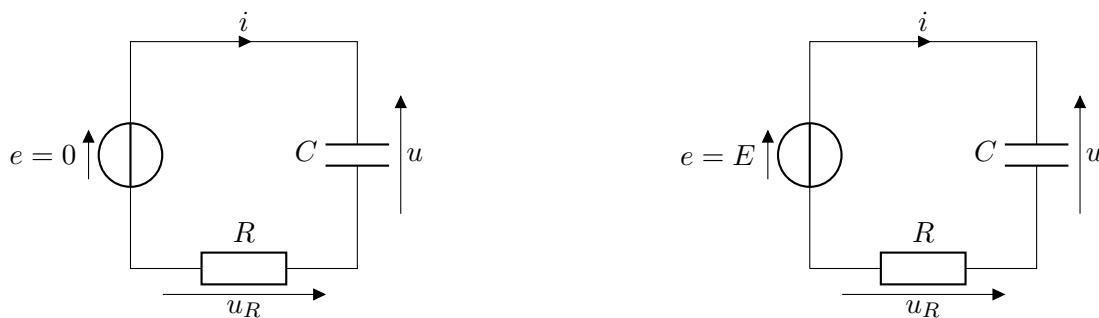


FIGURE 3.1 – Circuit RC série. Gauche : $t < 0$; droite : $t \geq 0$.

Le but de la partie est de déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$. Pour cela, nous allons :

- Établir une équation différentielle portant sur u ;
- Déterminer la forme générale des solutions ;
- Utiliser les conditions initiales pour déterminer l'unique solution.

3.1.1 Établissement de l'équation électrique

Question 1 : En appliquant la loi des mailles pour $t \geq 0$, montrer que $RC \times \frac{du}{dt} + u = E$.

Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation dans laquelle la grandeur inconnue est une fonction, et où cette fonction est liée à sa ou ses dérivées.

L'**ordre** d'une équation différentielle correspond à la dérivée de plus haut degré y apparaissant.

Forme canonique d'une équation différentielle d'ordre 1

Une équation différentielle d'ordre 1 est mise sous **forme canonique** si elle est écrite sous la forme :

$$\frac{dF}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_{\infty}$$

τ est appelée **constante de temps** ou **temps caractéristique**.

Question 2 : Mettre l'équation électrique sous forme canonique $\frac{du}{dt} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}u_{\infty}$. Donner les expressions de τ et u_{∞} en fonction de E , R et C .

Question 3 : Déterminer la dimension de τ .

3.1.2 Solutions de l'équation électrique

Solutions d'une équation différentielle d'ordre 1

Les solutions de l'équation différentielle $\frac{dF}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_{\infty}$ sont de la forme :

$$F(t) = F_{\infty} + A \times e^{-t/\tau}$$

où A est une constante.

Question 4 : Vérifier que $t \mapsto F_{\infty} + A \times e^{-t/\tau}$ obéit à l'équation différentielle $\frac{dF}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_{\infty}$ quelle que soit la valeur de A .

Il existe donc une infinité de solutions pour une équation différentielle d'ordre 1 : on peut effectivement écrire $F_{\infty} + A \times e^{-t/\tau}$ avec une infinité de choix pour la valeur de A ... ce qui n'est pas le cas en réalité ! Par exemple, deux condensateurs ayant des tensions initiales différentes n'auront pas la même évolution temporelle. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de répondre à ce problème (et de montrer que la physique est déterministe).

Théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle d'ordre 1

Soit un nombre F_0 quelconque fixé. Une équation différentielle d'ordre 1 à laquelle on impose la condition :

$$F(t = 0) = F_0$$

ne possède qu'une unique solution.

Une telle condition est appelée **condition initiale**. En d'autres termes, si à l'instant initial $t = 0$ on connaît une caractéristique du système (sa vitesse initiale si l'équation différentielle porte sur la vitesse, sa position initiale si l'équation différentielle porte sur la position...), alors il n'existe qu'une seule solution vérifiant l'équation différentielle $\frac{dF}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_{\infty}$ et la condition initiale... ce qui est rassurant !

3.1.3 Régime transitoire, régime permanent

Question 5 : On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Quelle est la limite de $F(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$?

Signification de F_∞

Soit une équation différentielle d'ordre 1 mise sous forme canonique $\frac{dF}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_\infty$.
 F_∞ représente la valeur de $F(t)$ lorsque t tend vers l'infini. En d'autres termes, il s'agit de la valeur de $F(t)$ « à l'équilibre ».

☛ **Remarque :** On note parfois F_{eq} au lieu de F_∞ .

Question 6 : Quelle est l'expression de $u(t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$? Et lorsque $t = 0$?

On aperçoit donc ici que la tension aux bornes du condensateur passe progressivement d'une valeur initiale $u(t = 0)$ à une valeur finale u_∞ différente de $u(t = 0)$. Ce passage de l'état initial à l'état final n'est pas instantané (voir figure 3.2).

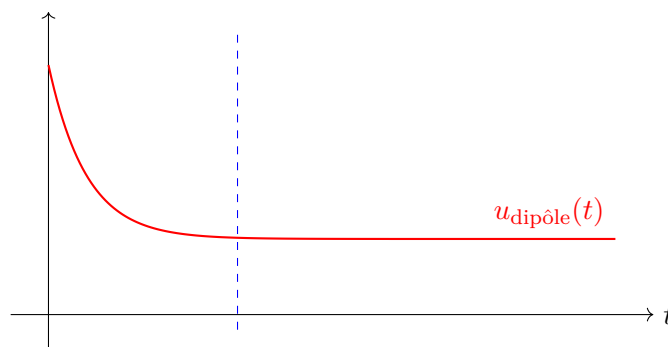


FIGURE 3.2 – Tension aux bornes d'un dipôle quelconque au cours du temps. On peut clairement identifier deux types de comportement (des régimes) : au départ, on a une évolution rapide du signal pour s'approcher d'un état final qui ne dépend plus du temps. La démarcation entre ces deux régimes est visible par le trait vertical en traitillés.

Régime transitoire et régime permanent

La dynamique d'un système dépend, pour des problèmes linéaires, uniquement des caractéristiques internes du système et de l'excitation extérieure agissant sur lui.

Le **régime permanent** du système correspond à la phase où la dynamique de ce système « ressemble » à l'excitation l'ayant mis en action (par exemple : vitesse constante si la force appliquée est constante, tension sinusoïdale si celle du générateur est sinusoïdale).

Le **régime transitoire** correspond alors à la phase où le système passe de son état initial jusqu'à son état permanent.

☛ *Remarque* : Le comportement asymptotique d'un dipôle est pertinent à utiliser lorsqu'il est étudié en régime permanent... donc lorsque le circuit est en route depuis très longtemps ! Cela n'arrive que dans deux cas : lorsque $t \rightarrow +\infty$, et très souvent en $t = 0^-$, si l'on suppose que le circuit était dans son état précédent depuis une durée suffisamment longue.

3.1.4 Recherche des conditions initiales

On a pour l'instant établi que l'on a :

$$u(t) = u_{\infty} + Ae^{-t/\tau}$$

avec $u_{\infty} = E$ et $\tau = RC$. Pour résoudre complètement l'équation différentielle, il faut déterminer la valeur de A d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Afin de connaître la valeur de ¹ $u(t = 0)$, il faut s'intéresser au circuit juste avant la mise en route de la source de tension (à $t = 0^-$) et juste après (à $t = 0^+$).

Question 7 : Représenter le circuit électrique équivalent en $t = 0^-$. Que valent $i(t = 0^-)$ et $u(t = 0^-)$?

Question 8 : Pourquoi peut-on affirmer que u est continue du temps, c'est-à-dire que $u(t = 0^-) = u(t = 0^+)$? En déduire l'expression de $u(t = 0^+)$.

1. À l'oral, on dit : « la valeur de u lorsque $t = 0$ ».

Question 9 : Peut-on déterminer l'expression de $i(t = 0^+)$ par un argument de continuité ? Expliquer.

Question 10 : Représenter le circuit électrique équivalent en $t = 0^+$. Déterminer l'expression de $i(t = 0^+)$.

Conditions initiales

Les valeurs des différentes grandeurs électriques du circuit à l'instant $t = 0^+$ sont appelées les **conditions initiales** du circuit. Elles sont nécessaires à toute étude quantitative et détaillée de l'évolution temporelle d'un circuit électrique.

3.1.5 Résolution de l'équation électrique

Question 11 : Déterminer l'expression totale de $u(t)$ en fonction des données de l'énoncé à l'aide de la condition initiale déterminée précédemment.

Question 12 : Que vaut $1 - e^{-t/\tau}$ lorsque $t = \tau$? En déduire une technique pour déterminer la valeur numérique de τ .

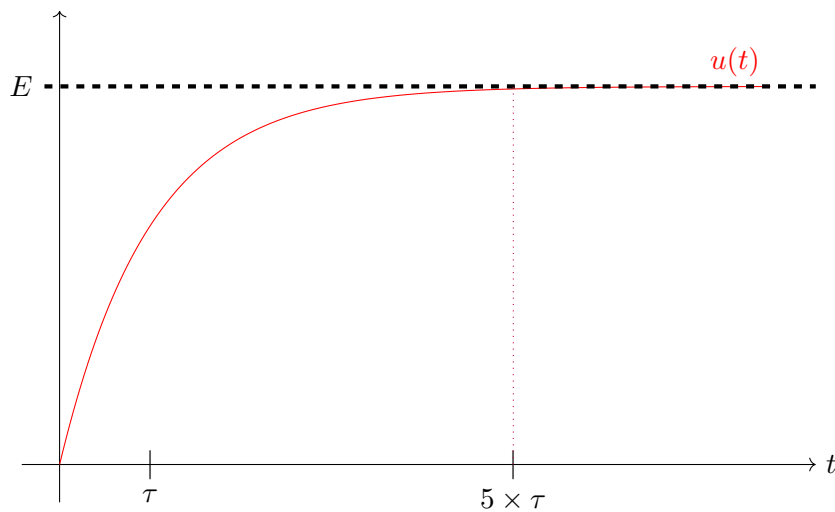


FIGURE 3.3 – Tracé de l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur.

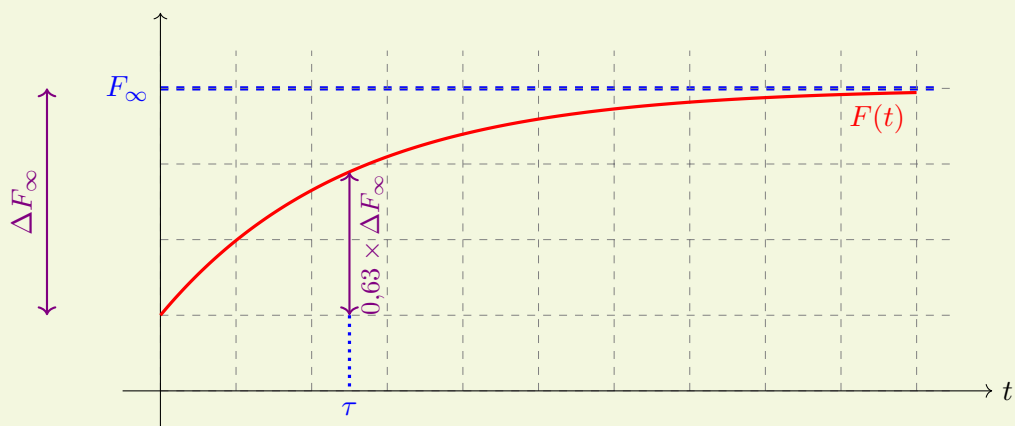
Détermination de la valeur numérique de τ par la méthode des 63 %

Si $F(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et de constante de temps τ , on peut déterminer celle-ci par :

$$F(t = \tau) - F(t = 0) = 0,63 \times (F_{\infty} - F(t = 0))$$

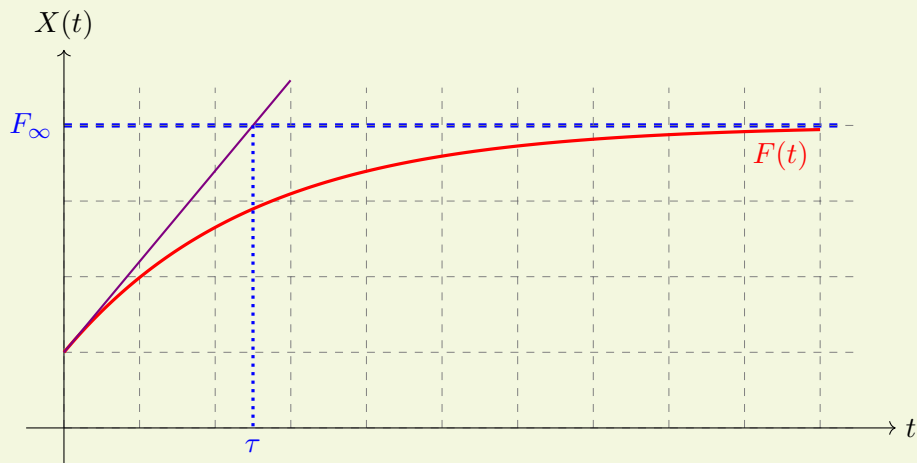
C'est-à-dire :

$$\Delta F_{\tau} = 0,63 \times \Delta F_{\infty}$$



Détermination de la valeur numérique de τ par la méthode de la pente à l'origine

Si $F(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et de constante de temps τ , on peut déterminer celle-ci en cherchant où la tangente à l'origine coupe la droite horizontale F_∞ .



Question 13 : Que vaut $1 - e^{-t/\tau}$ lorsque $t = 5 \times \tau$? En déduire que l'on a alors atteint à plus de 99% le régime permanent.

Interprétation qualitative de la constante de temps

On estime généralement que le régime permanent est atteint au bout de $5 \times \tau$. La constante de temps τ représente donc, en ordre de grandeur, une durée nécessaire pour passer du régime transitoire au régime permanent.

3.2 Établissement du courant dans un circuit RL série

Le circuit ci-dessous est alimenté par un générateur idéal de tension continue et de force électromotrice E . À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur (voir figure 3.4).

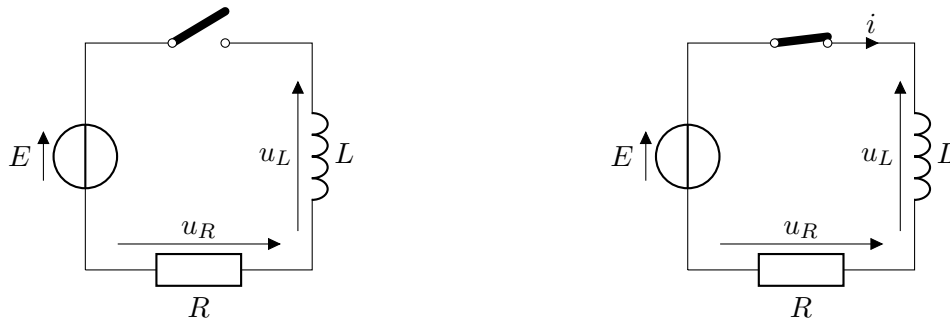


FIGURE 3.4 – Circuit RL série. Gauche : $t < 0$; droite : $t \geq 0$.

3.2.1 Détermination de $i(t)$

Question 14 : Que vaut $i(t = 0^-)$? En déduire, en justifiant, l'expression de $i(t = 0^+)$.

Question 15 : En appliquant la loi des mailles pour $t \geq 0$, montrer que $L \times \frac{di}{dt} + R \times i = E$.

Question 16 : Mettre l'équation électrique sous forme canonique. Donner les expressions de τ et i_∞ .

Question 17 : Déterminer l'expression de $i(t)$ en fonction des données de l'énoncé en utilisant notamment la condition initiale.

Question 18 : Tracer le circuit équivalent lorsque $t \rightarrow +\infty$. En déduire l'expression de $i(t \rightarrow +\infty)$. Est-ce cohérent avec les résultats déterminés précédemment ?

3.2.2 Bilan énergétique

Question 19 : Quelle est l'énergie stockée $\mathcal{E}_{L,\infty}$ par la bobine en régime permanent ?

Question 20 : Déterminer les valeurs de i_∞ , τ et $\mathcal{E}_{L,\infty}$ pour $E = 10 \text{ V}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ et $L = 100 \text{ mH}$.

Question 21 : En multipliant l'équation électrique issue de la loi des mailles par $i(t)$, montrer que l'on peut écrire $\mathcal{P}_{\text{gén}} = \mathcal{P}_J + \frac{d\mathcal{E}_L}{dt}$ où $\mathcal{P}_{\text{gén}}$ est la puissance cédée par le générateur, $\mathcal{P}_J$ la puissance dissipée par effet Joule par le résistor et $\mathcal{E}_L$ l'énergie emmagasinée par la bobine.

Détermination de l'équation énergétique en électrocinétique

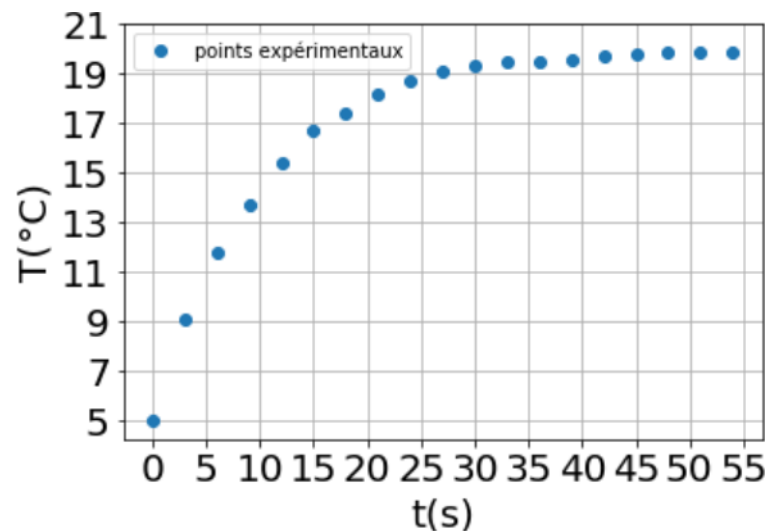
Afin d'aborder d'un point de vue énergétique un problème d'électrocinétique, il faut multiplier l'équation électrique issue de la loi des mailles par l'intensité du courant.

Question 22 : Interpréter le bilan de puissance précédent.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit l'équation différentielle $\frac{dF}{dt} + \frac{1}{\tau}F(t) = \frac{1}{\tau}F_{\infty}$. Que représentent physiquement F_{∞} et τ ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $T \times \frac{d\theta}{dt} + 2\theta(t) = 3\theta_0$. La résoudre, sachant que $\theta(t=0) = 5\theta_0$. Tracer l'allure de la solution.
- ☐ Soit la fonction $T(t) = T_f + (T_0 - T_f) \times e^{-t/\tau}$ tracée ci-dessous. Déterminer graphiquement T_0 et T_f . Mesurer également de deux manières différentes la valeur de τ .



- ☐ Proposer, à l'aide de vos propres mots, des définitions pour « régime permanent » et « régime transitoire ».
- ☐ ✎ Soit un circuit RC série, depuis longtemps éteint puis alimenté instantanément à $t = 0$ par une source idéale de tension E . Déterminer totalement l'expression de $u_C(t)$, tension aux bornes du condensateur.
- ☐ ✎ Soit un circuit RL série, depuis longtemps éteint puis alimenté instantanément à $t = 0$ par une source idéale de tension E . Déterminer totalement l'expression de $i(t)$, intensité du courant parcourant le circuit.

Chapitre 4 : Circuits linéaires du deuxième ordre

Objectifs du programme

Oscillateur harmonique : exemple du circuit LC.

Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales.
Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
Réaliser un bilan énergétique.

Circuit RLC série.

Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.
Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

4.1 Oscillations harmoniques d'un circuit LC

Prenons l'exemple d'un circuit LC série, initialement non alimenté. À $t = 0$, on alimente le circuit par une tension continue E (voir figure 4.1).

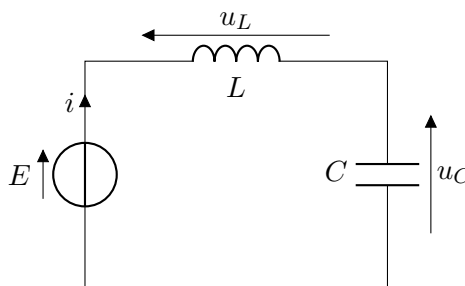


FIGURE 4.1 – Circuit LC pour $t \geq 0$.

4.1.1 Solutions

Question 1 : Par la loi des mailles, puis en utilisant à la suite les relations intensité-tension pour la bobine et pour le condensateur, montrer que l'on a $LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = E$.

Oscillateur harmonique

Une équation différentielle de la forme :

$$\alpha \times \frac{d^2 F}{dt^2}(t) + \gamma \times F(t) = \varepsilon$$

caractérise un **oscillateur harmonique**.

Forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur harmonique

Une équation différentielle d'oscillateur harmonique est mise sous forme canonique si elle est écrite sous la forme :

$$\frac{d^2 F}{dt^2}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty$$

ω_0 est la **pulsation propre**.

Par analogie avec les solutions d'une équation différentielle d'ordre 1, on décide de chercher les solutions de l'oscillateur harmonique sous la forme $F(t) = F_\infty + \alpha \times e^{rt}$.

Question 2 : Que vaut r pour une équation différentielle d'ordre 1 : $\frac{dF}{dt}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_\infty$?
Est-ce cohérent ?

Question 3 : Que vaut r pour une équation différentielle d'oscillateur harmonique ? Commenter.

Si les solutions $t \mapsto F_\infty + \alpha e^{j\omega_0 t}$ et $t \mapsto F_\infty + \beta e^{-j\omega_0 t}$ (avec α et β des constantes complexes quelconques) sont des solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, le théorème de superposition énonce que $t \mapsto F_\infty + \alpha e^{j\omega_0 t} + \beta e^{-j\omega_0 t}$ est également solution de l'équation différentielle.

Par ailleurs, la formule d'Euler énonce que $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, en posant $\theta = \omega_0 t$, on peut réécrire les solutions réelles de l'équation de l'oscillateur harmonique sous la forme : $F(t) = F_\infty + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

Solutions d'une équation différentielle d'oscillateur harmonique

Les solutions de l'équation différentielle $\frac{d^2 F}{dt^2}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty$ sont de la forme :

$$F(t) = F_\infty + A \times \cos(\omega_0 t) + B \times \sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont des constantes.

On peut également écrire $F(t)$ sous la forme :

$$F(t) = F_\infty + C \times \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ est l'**amplitude** de $F(t)$.

Fréquence et période d'un oscillateur harmonique

La **fréquence** f_0 d'un oscillateur harmonique est liée à sa **pulsation** ω_0 par la formule :

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

On peut également lier la pulsation ω_0 à la **période** T_0 par la formule :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Question 4 : Vérifier que $t \mapsto F_\infty + C \times \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est bien solution de l'équation différentielle pour toutes valeurs de C et φ .

Théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle d'ordre 2

Soient deux nombres F_0 et F'_0 quelconques fixés. Une équation différentielle d'ordre 2 à laquelle on impose la condition :

$$F(t = 0) = F_0$$

$$\frac{dF}{dt}(t = 0) = F'_0$$

ne possède qu'une unique solution.

Question 5 : Déterminer les valeurs initiales de u_C et i . En déduire $\frac{du_C}{dt}(t = 0)$.

Question 6 : Donner alors l'expression de $u_C(t)$ en fonction de E , ω_0 et t .

Question 7 : Tracer l'allure de $u_C(t)$.

4.1.2 Bilan énergétique

Question 8 : Effectuer le bilan énergétique du circuit LC , et montrer qu'une grandeur est conservée au cours du temps.

Question 9 : Que peut-on dire de $u_C(t)$ et $u_L(t)$?

4.2 Réponses amorties d'un circuit RLC

Le circuit RLC série est très similaire au circuit RC série : seule une résistance R est ajoutée en série du condensateur et de la bobine (figure 4.2). On se place, comme précédemment, dans le cas où l'alimentation continue E est mise en route à $t = 0$.

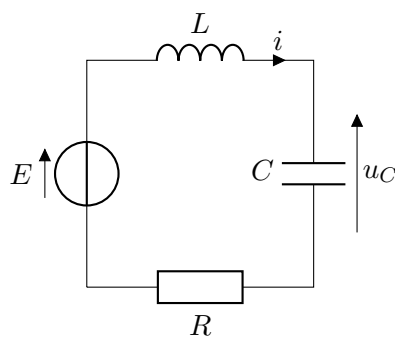


FIGURE 4.2 – Circuit RLC pour $t \geq 0$.

4.2.1 Équation électrique

Question 10 : Montrer que l'on a : $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} E$.

Équation d'un oscillateur amorti

On dit qu'une grandeur $F(t)$ suit l'équation d'un oscillateur amorti si l'équation différentielle portant sur son évolution est du type :

$$\frac{d^2 F}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{dF}{dt}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty$$

ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur amorti, et Q est son **facteur de qualité**, sans dimension. $F_\infty = F(t \rightarrow \infty)$ est la valeur de $F(t)$ à l'équilibre du système lorsque t tend vers l'infini.

Question 11 : Donner l'expression de ω_0 du système masse-ressort amorti, puis l'expression du facteur de qualité Q .

Question 12 : Que vaut $u_C(t \rightarrow \infty)$?

Question 13 : Que se passe-t-il lorsque Q tend vers l'infini ? À quoi correspond physiquement ce cas, à capacité C et inductance L fixées ? Est-ce cohérent ?

4.2.2 Équation caractéristique

Les solutions de l'équation différentielle peuvent s'écrire comme une somme de deux solutions : la première est celle du régime transitoire, et la deuxième celle du régime permanent.

Ici, on aura donc :

$$u_C(t) = u_{C,\text{transitoire}}(t) + \underbrace{E}_{\text{rég. permanent}}$$

Le but est, dans cette partie, de déterminer les solutions associées au régime transitoire. On cherche ces solutions sous la forme $u_{C,\text{transitoire}}(t) = U_0 \times e^{rt}$ où U_0 et r sont des inconnues.

Question 14 : Exprimer $\frac{du_C}{dt}(t)$ et $\frac{d^2u_C}{dt^2}(t)$ en fonction de $u_{C,\text{transitoire}}(t)$ et r . Montrer, en réinjectant ces expressions dans l'équation du mouvement, qu'elle se transforme en une équation du second degré portant sur r .

Équation caractéristique d'une équation différentielle

À l'équation différentielle $\frac{d^2 F}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{dF}{dt}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty$, on associe l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times r + \omega_0^2 = 0$$

r est ici une inconnue, que l'on cherche à déterminer.

Question 15 : Calculer le discriminant Δ de cette équation du second degré. Pour quelles valeurs de Q le discriminant est-il positif ? négatif ?

4.2.3 Régime apériodique ($Q < 1/2$)

Régime apériodique d'un oscillateur amorti

Lorsque le facteur de qualité Q d'un oscillateur amorti est plus petit que $1/2$, on parle de **régime apériodique**.

Question 16 : Quelles sont les solutions r_1 et r_2 de l'équation du second degré ?

Question 17 : Montrer que r_1 et r_2 sont négatifs.

Question 18 : Montrer que r_1 et r_2 sont homogènes à l'inverse d'une durée.

On déduit des deux questions précédentes que l'on peut noter $r_1 = -1/\tau_1$ et $r_2 = -1/\tau_2$ avec τ_1 et τ_2 des durées positives.

Question 19 : Donner les expressions de τ_1 et τ_2 en fonction de ω_0 et Q .

Deux familles de fonctions sont alors solutions de l'équation différentielle : celles du type $t \mapsto Ae^{-t/\tau_1}$ et celles du type $t \mapsto Be^{-t/\tau_2}$. La solution générale de l'équation différentielle régissant l'évolution de u_C est alors une somme de ces solutions :

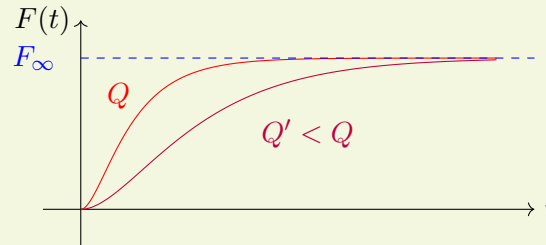
$$u_C(t) = E + Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$$

Solutions de l'équation d'un oscillateur amorti en régime aperiodique

En régime aperiodique, les deux solutions $-\frac{1}{\tau_1}$ et $-\frac{1}{\tau_2}$ de l'équation caractéristique sont réelles et négatives. On a alors :

$$F(t) = \underbrace{Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{F_\infty}_{\text{régime permanent}}$$

avec A et B deux constantes qui dépendent des conditions initiales.



τ_1 et τ_2 représentent deux durées caractéristiques afin d'atteindre le régime permanent. La durée du régime transitoire sera alors $5 \times \max(\tau_1, \tau_2)$.

Question 20 : Justifier que l'on appelle ce régime le régime « aperiodique ».

Question 21 : Exprimer $\frac{du_C}{dt}(t)$. En utilisant les conditions initiales $u_C(t=0) = 0$ et $\frac{du_C}{dt}(t=0) = 0$, montrer que l'on a un système portant sur A et B (on ne cherchera pas à le résoudre).

4.2.4 Régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$)

Régime pseudo-périodique d'un oscillateur amorti

Lorsque le facteur de qualité Q d'un oscillateur amorti est plus grand que $1/2$, on parle de **régime pseudo-périodique**.

Question 22 : Quelles sont les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique ? On rappelle que $\Delta < 0$, et on notera j le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$.

Question 23 : Montrer que ces solutions sont complexes conjuguées, et que leur partie réelle est strictement négative.

Question 24 : On pose τ et Ω positifs tels que $r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$. Donner les expressions de τ et Ω en fonction de ω_0 et Q .

Les solutions générales de l'équation différentielle sont donc du type :

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= E + \alpha e^{(-\frac{1}{\tau} + j\Omega)t} + \beta e^{(-\frac{1}{\tau} - j\Omega)t} \\
 &= E + \alpha e^{-t/\tau + j\Omega t} + \beta e^{-t/\tau - j\Omega t} \\
 &= E + \alpha e^{-t/\tau} e^{j\Omega t} + \beta e^{-t/\tau} e^{-j\Omega t} && \text{car } e^{a+b} = e^a \times e^b \\
 &= E + [\alpha e^{j\Omega t} + \beta e^{-j\Omega t}] \times e^{-t/\tau} && \text{en factorisant par } e^{-t/\tau}
 \end{aligned}$$

Or, on sait que l'on peut écrire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 u_C(t) &= E + [\alpha \cos(\Omega t) + j\alpha \sin(\Omega t) + \beta \cos(\Omega t) - j\beta \sin(\Omega t)] \times e^{-t/\tau} \\
 &= E + [(\alpha + \beta) \cos(\Omega t) + (j\alpha - j\beta) \sin(\Omega t)] \\
 &= E + [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \times e^{-t/\tau}
 \end{aligned}$$

avec $A = \alpha + \beta$ et $B = j\alpha - j\beta$.

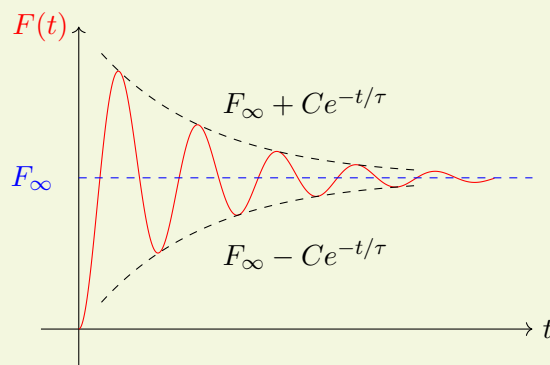
Solutions de l'équation d'un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique

En régime pseudo-périodique, les deux solutions $-\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$ de l'équation caractéristique sont complexes et conjuguées. On a alors :

$$F(t) = \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{F_\infty}_{\text{régime permanent}}$$

avec A et B deux constantes qui dépendent des conditions initiales.

☛ **Remarque :** On peut également écrire $F(t) = C \cos(\Omega t + \varphi) e^{-t/\tau} + F_\infty$.



$\Omega = \omega_0 \times \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ est la pulsation des oscillations du système, qui toujours inférieure à ω_0 . Un système oscillera d'autant plus lentement qu'il est amorti.

$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ représente la durée caractéristique afin d'atteindre le régime permanent. La durée du régime transitoire sera alors $5 \times \tau$.

Question 25 : Justifier que l'on appelle ce régime le régime « pseudo-périodique ».

Question 26 : Uniquement pour cette question : si $Q \gg 1$, comment évoluent Ω et τ ? À quoi cela correspond-il, physiquement ?

Question 27 : Exprimer $\frac{du_C}{dt}(t)$.

Question 28 : En utilisant les conditions initiales $u_C(t=0) = 0$ et $\frac{du_C}{dt}(t=0) = 0$, montrer que l'on a un système portant sur A et B . Le résoudre pour donner l'expression de $u_C(t)$ en fonction de Ω , τ , E et t .

Question 29 : Quel est le temps caractéristique d'amortissement du système étudié ? Et son temps caractéristique d'oscillation ?

Question 30 : Un grand facteur de qualité implique-t-il un nombre faible ou élevé d'oscillations visibles ?

4.2.5 Régime apériodique critique

Régime apériodique critique

Si $Q = 1/2$, on se situe dans le cas **apériodique critique**. Ce cas est uniquement théorique, car Q n'est jamais exactement égal à $1/2$.

La seule solution de l'équation caractéristique est réelle et négative : $r_0 = -\frac{1}{\tau_0}$. Les solutions sont alors du type :

$$F(t) = \underbrace{(At + B)e^{-t/\tau_0}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{F_\infty}_{\text{régime permanent}}$$

avec A et B deux constantes qui dépendent des conditions initiales.

En particulier, il s'agit du régime apériodique dont la durée du régime transitoire est la plus courte ; en d'autres termes, il s'agit du régime apériodique allant le plus rapidement jusqu'à son régime permanent.

Mathématiquement, on a donc $\tau_0 < \min(\tau_1, \tau_2)$ avec τ_1 et τ_2 les durées caractéristiques de tout régime apériodique.

Rappels et compléments sur les équations du second degré

Soient a , b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. L'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

est une **équation du second degré**.

Solutions d'une équation du second degré si son discriminant est strictement positif

Soit l'équation du second degré $a^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif, l'équation admet deux solutions réelles :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Solutions d'une équation du second degré si son discriminant est nul

Soit l'équation du second degré $a^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul, l'équation admet une unique solution réelle :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Solutions d'une équation du second degré si son discriminant est strictement négatif

Soit l'équation du second degré $a^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement négatif, l'équation admet deux solutions complexes :

$$x = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

avec j l'unité imaginaire^a telle que $j^2 = -1$.

a. On note j et non pas i l'unité imaginaire en physique pour ne pas la confondre avec l'intensité du courant.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit l'équation différentielle $\frac{d^2 F}{dt^2} + \omega_0^2 F(t) = \omega_0^2 F_\infty$. Que représentent physiquement F_∞ et ω_0 ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $\tau \times \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{4}{\tau} y(t) = \frac{1}{\tau} y_0$. La résoudre, sachant que $y(t=0) = 5y_0$ et $\frac{dy}{dt}(t=0) = \frac{6y_0}{\tau}$. Tracer l'allure de la solution.
- ☐  Soit un circuit LC série, éteint depuis longtemps puis alimenté à partir de $t = 0$ par une source idéale de tension E constante. Déterminer l'expression de $u_C(t)$ en fonction de E , L , C et t .
- ☐ Soit l'équation différentielle $\frac{d^2 F}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dF}{dt} + \omega_0^2 F(t) = \omega_0^2 F_\infty$. Que représentent physiquement F_∞ , ω_0 et Q ? Quel lien peut-on qualitativement faire entre Q et le nombre d'oscillations visibles ?
- ☐ À quel régime correspond le cas $Q < 1/2$? le cas $Q > 1/2$? Donner la forme mathématique des solutions dans chacun des deux cas, puis tracer leurs allures.

- ☐ Montrer que, dans le cas d'un régime pseudo-périodique, le temps caractéristique d'amortissement s'écrit $\frac{2Q}{\omega_0}$ et le temps caractéristique d'oscillation s'écrit $\frac{2\pi}{\omega_0 \times \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$.
- ☐ ✎ Soit un circuit RLC série, éteint depuis longtemps puis alimenté à partir de $t = 0$ par une source idéale de tension E constante. Montrer que pour $R = 5\,\Omega$, $L = 1\,\text{H}$ et $C = 4\,\text{F}$, le régime est apériodique. Donner les expressions (en fonction de R , L et C) puis les valeurs des deux constantes de temps du système.
- ☐ ✎ Soit un circuit RLC série, éteint depuis longtemps puis alimenté à partir de $t = 0$ par une source idéale de tension E constante. Montrer que pour $R = 2\,\Omega$, $L = 81\,\text{H}$ et $C = 9\,\text{F}$, le régime est pseudo-périodique. Donner les expressions (en fonction de R , L et C) puis les valeurs du temps caractéristique d'amortissement et du temps caractéristique d'oscillation du système.