Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 11 : Ondes

Travaux dirigés

Exercice faisant uniquement appel à des outils mathématiques ———— $\sqrt{x}$
Exercice facile et/ou proche du cours ————
Exercice accessible mais demandant du recul sur le cours et/ou sur les outils mathématiques ————
Exercice complexe, de par son côté calculatoire et/ou astucieux ————

Il est normal de « bloquer » sur les **exercices** : personne ne s'attend à ce que vous sachiez les faire en cinq minutes seulement. Il faut cependant persévérer, avoir le cours à côté afin de voir si un raisonnement similaire a déjà été abordé, et ne pas hésiter à parler avec vos camarades ou votre professeur.

Les **problèmes** sont issus d'annales de concours et/ou d'examens. Ils sont au moins aussi importants à aborder que les exercices, car ils sont les plus proches (en terme de rédaction et de questions « bout-à-bout ») de ce que vous aurez en devoir surveillé ainsi qu'au concours.

Chapitre 1 : Ondes progressives, ondes stationnaires

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Établir les équations de propagation vérifiées par l'intensité du courant et la tension dans un câble coaxial sans pertes modélisé comme un milieu continu caractérisé par une inductance linéique et une capacité linéique.	1.1
Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle du signal à position fixée, et son évolution spatiale à un instant donné.	1.3
Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité.	1.2, 1.4
Déterminer les positions des noeuds et des ventres d'une onde stationnaire en fonction de sa longueur d'onde.	1.4

Questions de cours

- ☐ Établir l'équation de d'Alembert pour le câble coaxial.
- ☐ Supposons que $y(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert. On note c la célérité de l'onde. Quelle est la forme de $y(x,t)$ si l'onde se propage dans le sens des x croissants ? Quelle est la forme de $y(x,t)$ si l'onde se propage dans le sens des x décroissants ?
- ☐ Démontrer l'équation de dispersion vérifiée pour une équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} = 0$. En déduire la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité.
- ☐ Soit une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Tracer l'allure de la corde pour les modes propres $n = 1$ à différents instants. Idem pour les modes propres $n = 2$ et $n = 3$.

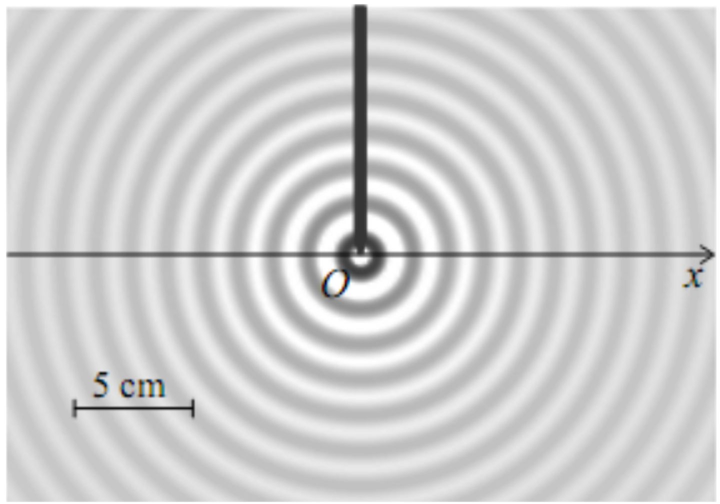
Exercices

1.1 Équation de d'Alembert pour la tension

Dans le cours, nous avons établi l'équation de d'Alembert pour le courant $i(x,t)$. Établissez l'équation de d'Alembert pour la tension $u(x,t)$ le câble coaxial.

1.2 Cuve à ondes

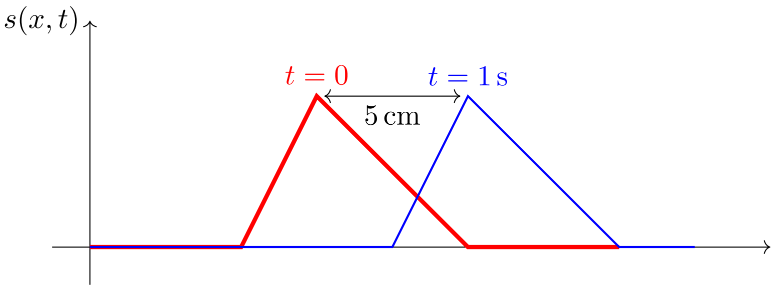
La figure représente la surface d'une cuve à ondes éclairée en éclairage stroboscopique. L'onde est engendrée par un vibreur de fréquence $f = 18\,\mathrm{Hz}$. L'image est claire là où la surface de l'eau est à faible altitude, et foncée à haute altitude.



1. Mesurer aussi précisément que possible la longueur d'onde.
2. En déduire la célérité de l'onde.
3. Calculer le nombre d'onde.

1.3 Propagation d'un signal

On représente ci-dessous un signal $s(x,t)$ à l'instant $t=0$ et à l'instant $t=1\,\mathrm{s}$.



1. Quelle est la célérité c de l'onde ?
2. Tracer l'allure de l'onde à l'instant $t=3\,\mathrm{s}$.

1.4 Analogie avec les instruments à vent

Le son produit par un instrument à vent, telle qu'une flûte, est provoqué par des ondes de pression au sein de la colonne d'air la remplissant. En faisant une analogie avec les modes propres de la corde vibrante, expliquer si boucher tous les trous d'une flûte crée un son plus aigu ou plus grave que le son d'une flûte dont tous les trous sont « ouverts ».

1.5 Réflexion d'une onde sur une corde accrochée à un mur

Soit une corde semi-infinie de masse linéique μ fixée sur un mur à l'une de ses extrémités (en $x=0$) et tendue à l'autre avec une masse m (par exemple, à l'aide d'une poulie). Au repos, la corde est confondue avec l'axe (O,x) sur l'intervalle $]-\infty,0]$.

1. Un expérimentateur produit une déformation sinusoïdale en un point de la corde situé loin du mur. Proposer une expression mathématique de $y_i(x,t)$, onde se dirigeant vers le mur. On la choisira à l'origine des phases, ce qui signifie que $\varphi_i=0$. Comment qualifier cette onde ?
2. Écrire la condition aux limites en $x=0$. L'onde précédente peut-elle y satisfaire seule ? Interpréter le phénomène qui se produit [1] et décrivez-le mathématiquement en introduisant une nouvelle grandeur.
3. Appliquer la condition aux limites et déduisez-en l'expression et la nature de l'onde résultante (c'est-à-dire de l'onde totale) $y(x,t)$. Commenter. On utilisera le fait que $\cos(a)-\cos(b)=2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

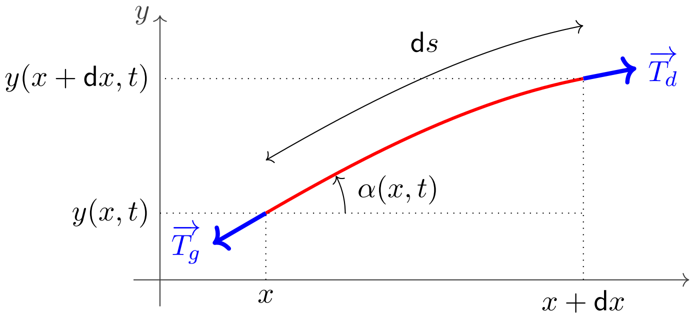
1. Si vous bloquez vraiment, regardez le titre de l'exercice.

1.6 Équation de d'Alembert de la corde vibrante

Soit une corde de masse linéique μ sur laquelle se propage une onde. On note $y(x,t)$ son élévation à l'abscisse x et à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre, $\alpha(x,t)$ l'angle que forme la corde par rapport à l'axe horizontal (O,x) et $\overrightarrow{T}(x,t)$ la tension que la portion de corde à gauche de x exerce sur la portion de corde à droite de x.

On se place en particulier dans l'**approximation des petits angles** : $\alpha(x,t) \ll 1$. On admet que l'on a alors $\tan(\alpha) \approx \alpha$, $\cos(\alpha) \approx 1$ et $\sin(\alpha) \approx \alpha$. Le poids est par ailleurs négligé dans ce problème face aux forces de tension de la corde.

On s'intéresse à un brin compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$; on note $\mathrm{d}s$ la longueur de ce brin. L'angle α étant très faible, on peut approximer ce brin à un segment droit.



1. Montrer que $\tan(\alpha) \approx \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial t}$; en déduire une approximation de $\alpha(x,t)$.
2. Par application du théorème de Pythagore, en déduire que la masse δm du brin vaut $\delta m \approx \mu \mathrm{d}x$.
3. Exprimer $\overrightarrow{T_g}$ et $\overrightarrow{T_d}$ en fonction de $T(x)$, norme du vecteur $\overrightarrow{T}(x,t)$, et de $\alpha(x,t)$. Que deviennent ces expressions dans l'approximation des petits angles ?
4. L'accélération $\vec{a}$ du brin est purement horizontale : $\vec{a} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}.\overrightarrow{u_y}$. En déduire, par projection du principe fondamental appliqué au brin selon l'axe (O,x), que l'on a $T(x) = T_0$, avec T_0 une constante. Que représente-t-elle ?
5. En projetant l'équation du mouvement selon l'axe (O,y), montrer que $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. Comment se nomme cette équation ? Donner l'expression de c ainsi que son interprétation physique.

Chapitre 2 : Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Capacités exigibles	Exercice(s)
Montrer que l'équation de propagation des champs électrique et magnétique, fournie, se ramène à une équation de d'Alembert unidimensionnelle dans le cas d'une onde plane. Exprimer la célérité des ondes électromagnétiques en fonction des constantes fondamentales.	2.3, 2.4
Démontrer la relation de dispersion de l'onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement.	2.3, 2.4
Exploiter l'expression du champ électrique d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement pour identifier la direction de propagation et la direction de polarisation.	2.3
Démontrer le caractère transverse des champs électrique et magnétique dans le cas d'une onde plane. Établir la relation de structure dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement. Exploiter la relation de structure pour déterminer le champ électrique connaissant le champ magnétique, ou réciproquement, pour une onde plane progressive monochromatique.	2.3, 2.4

Questions de cours

- ☐ Soit une onde électromagnétique dont le champ électrique est $\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t).\overrightarrow{u_y}$. Selon quelle direction se propage l'onde ? Quelle est sa polarisation ? Déterminer la relation de dispersion à l'aide de l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = 0$ vérifiée par $\vec{E}$.
- ☐ Classer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
- ☐ Qu'est-ce qu'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ? Que peut-on dire du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ pour une telle onde dans le vide ? Montrer que l'on a nécessairement $B = E/c$.

Exercices

2.1 Calcul de rotationnels

Pour chacun des cas ci-dessous, représenter le champ en quelques points et calculer son rotationnel. Essayer alors de donner un sens physique à cet opérateur...

1. $\overrightarrow{A_1} = a.\overrightarrow{e_x}$;
2. $\overrightarrow{A_2} = x.\overrightarrow{e_x}$;
3. $\overrightarrow{A_3} = -x.\overrightarrow{e_x}$;
4. $\overrightarrow{A_4} = x.\overrightarrow{e_y}$;
5. (*) $\overrightarrow{A_5} = a.\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques ;
6. (*) $\overrightarrow{A_6} = r.\overrightarrow{e_\theta}$ en coordonnées cylindriques.

Regarder également sur Youtube l'excellente vidéo de 3Blue1Brown : « *Divergence and curl : The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more* » (youtu.be/rB83DpBJQsE).

2.2 Domaines des ondes électromagnétiques

Déterminer à quelles régions des ondes électromagnétiques correspondent les valeurs suivantes :

1. $\lambda = 650 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$;
2. $f = 10\,\mathrm{MHz}$;
3. $T = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$;
4. $\omega = 30 \times 10^{10}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$;
5. $k = 1 \times 10^{2}\,\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$.

2.3 Étude d'un champ électrique

Soit un champ électrique dont l'expression est $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz).\overrightarrow{e_x}$.

1. Déterminer la direction et le sens de propagation de l'onde, ainsi que sa polarisation.
2. Donner l'écriture complexe $\underline{\vec{E}}$ du champ électrique. À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer le champ magnétique complexe $\underline{\vec{B}}$, puis le champ magnétique réel.
3. Le champ magnétique vérifie l'équation $\varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = 0$. Montrer que cette équation vectorielle se ramène à une équation de d'Alembert unidimensionnelle dont on donnera l'expression de la célérité c.

2.4 Champs électromagnétiques correspondant à des ondes

On considère des champs électromagnétiques dans le vide (pas de charge ou de courant de conduction).

1. On a $\overrightarrow{E} = -\dfrac{ak^2y}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\cos(\omega t - kx).\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{B} = a\sin(\omega t - kx).\overrightarrow{u_x} + aky\cos(\omega t - kx).\overrightarrow{u_y}$. Le champ électromagnétique $\{\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}\}$ vérifie-t-il la relation de structure, et si oui, à quelle condition ?
2. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer le champ magnétique associé au champ électrique $\overrightarrow{E} = a\sin(\alpha x)\cos(\omega t - kz).\overrightarrow{u_y}$.
3. On a $\overrightarrow{E} = E_0\sin(kz)\sin(\omega t).\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{B} = B_0\cos(kz)\cos(\omega t).\overrightarrow{u_y}$ constitue-t-il une onde électromagnétique, et si oui, à quelle condition ? Cette onde est-elle progressive ?

Chapitre 3 : Énergie des ondes électromagnétiques

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Exprimer la puissance rayonnée à travers une surface à l'aide du vecteur de Poynting. Associer la direction du vecteur de Poynting et la direction de propagation de l'onde.	3.1, 3.2, 3.3, 3.4, problème
Établir l'équation locale de Poynting unidimensionnelle pour une onde plane polarisée rectilignement dans une zone de l'espace sans charges ni courants. Admettre son expression la plus générale dans une zone de l'espace sans charges ni courants. Par analogie avec d'autres équations locales de conservation, faire le lien avec la conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide.	3.1

Questions de cours

- ☐ Donner les expressions de la densité volumique d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting. Que représente physiquement ce vecteur ? Énoncer l'équation locale de Poynting ; quelle est sa signification physique ?
- ☐ Soit une OPPM polarisée rectilignement : $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(kx - \omega t).\overrightarrow{u_y}$. Déterminer $\overrightarrow{B}$, puis $\overrightarrow{\Pi}$. Commenter sa direction. Calculer la puissance rayonnée à travers une surface S orthogonale à l'axe (O, x).
- ☐ Décrire l'effet photovoltaïque.

Exercices

3.1 Un bilan d'énergie plus classique

Soit une onde électromagnétique se propageant dans le vide selon les x croissants. On étudie une « tranche de vide » de section S et de longueur $\mathrm{d}x$.

1. Rappeler l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$; sans calcul, déterminer son sens et sa direction et les justifier.
2. Déterminer la puissance rayonnée $\mathcal{P}(x)$ entrant dans la tranche ainsi que la puissance sortant en $x + \mathrm{d}x$.
3. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em}, ainsi que son unité. En déduire l'énergie électromagnétique δU_{em} du système en fonction notamment de u_{em}.
4. Par un bilan d'énergie, montrer que l'on a $\dfrac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = 0$.
5. Généraliser cette équation à trois dimensions. Comment se nomme-t-elle et que représente-t-elle ?

3.2 Un exemple d'OPPH

On étudie une onde électromagnétique dont le champ est de la forme $\overrightarrow{E} = E_x.\overrightarrow{u_x} + E_y.\overrightarrow{u_y}$ avec $E_x = E_0 \exp\left[i\left(\frac{K}{3}(2x+2y-z) - \omega t\right)\right]$.

L'onde se propage dans le vide, et sa longueur d'onde est $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$.

1. Calculer la fréquence de l'onde. Identifier le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient.
2. Exprimer le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ en fonction de la constante K, puis calculer la valeur numérique de K.
3. À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer E_y en fonction de E_x.
4. Exprimer le champ magnétique de cette onde en fonction de E_x et c.
5. Exprimer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde. Commenter.
6. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

3.3 Étude énergétique d'un câble en régime statique

Soit un cylindre de longueur L, d'axe (O,z) et de rayon a, de conductivité γ, parcouru par des courants uniformes et indépendants du temps, de densité volumique $\overrightarrow{j} = j.\overrightarrow{u_z}$. On note I l'intensité traversant le câble.

1. Faire un schéma et dessiner la base appropriée en un point de la périphérique du câble.
2. Exprimer j en fonction de I.
3. En déduire $\overrightarrow{E}$ en fonction de I en tout point du câble.
4. On néglige les effets de bords, c'est-à-dire que les champs ont même géométrie que si le cylindre était infiniment long. Déterminer, en un point de la surface du cylindre, l'expression du champ magnétique.
5. En déduire le vecteur de Poynting en un point de la surface du cylindre. Le représenter sur le schéma.
6. Exprimer la puissance électromagnétique reçue par le conducteur à travers sa surface latérale S. Faire apparaître la résistance R du cylindre en interprétant la formule précédente.

3.4 Puissance d'un laser

Un laser de puissance moyenne totale $\mathcal{P} = 10\,\mathrm{W}$ émet un faisceau cylindrique d'axe (O,z) et de diamètre $D = 3{,}0\,\mathrm{mm}$ dans la longueur d'onde $\lambda = 632\,\mathrm{nm}$. On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$. L'air est assimilé au vide.

1. On suppose que les ondes lumineuses associées à ce faisceau sont planes, progressives, sinusoïdales à polarisation rectiligne selon $\overrightarrow{u_x}$. Donner l'expression générale du champ électrique en écriture complexe en introduisant une amplitude E_m.
2. En déduire celle du champ magnétique puis de la moyenne du vecteur densité surfacique de puissance en fonction de l'amplitude du champ électrique (entre autres).
3. Calculer l'amplitude du champ électrique en exploitant $\mathcal{P}$.
4. Quel est le nombre de photons n^* émise par seconde par ce laser ?

Problème

On considère une source lumineuse supposée ponctuelle et située en O, émettant de manière isotrope un rayonnement monochromatique de pulsation ω. Dans la suite, on utilisera le repérage cartésien $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. On note $\vec{E}$ le champ électrique et $\vec{B}$ le champ magnétique associé. Le milieu de propagation est l'air et sera assimilé à du vide dont la permittivité diélectrique est notée ε_0 et la perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H \cdot m^{-1}}$.

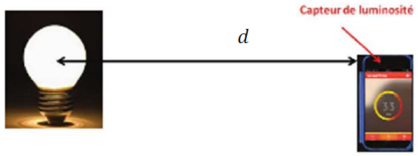
1. Énoncer les équations de Maxwell décrivant la situation étudiée.
2. Montrer que l'équation de propagation du champ électrique est $\vec{E}$ est $\vec{\Delta}\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ en posant $c^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$.

On étudie la propagation de l'onde électromagnétique émise par cette source dans la direction $\overrightarrow{u_x}$. On suppose que le rapport $\dfrac{D}{d}$ de l'extension D de la zone d'observation et de la distance moyenne d à la source tend vers 0. Pour $d - \dfrac{D}{2} \leq x \leq d + \dfrac{D}{2}$, on peut considérer $\vec{E}$ comme une onde localement plane dont l'amplitude $E_0(d) = E_0$ est supposée constante et se propageant à la vitesse $v > 0$. Dans ces conditions, on décrit le champ électrique par : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)\right).\overrightarrow{u_z}$.

3. Préciser la direction de polarisation de cette onde. Comment pourrait-on le vérifier en pratique ?
4. Vérifier que $\vec{E}(x,t)$ est effectivement bien solution de l'équation de propagation. En déduire alors la relation entre v et c.
5. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(x,t)$ associé.
6. Rappeler l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ ainsi que son unité.
7. Montrer que la valeur moyenne temporelle $\langle\vec{R}\rangle$ du vecteur de Poynting est $\langle\vec{R}\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}.\overrightarrow{u_x}$.
8. À chaque instant, on suppose que la source émet une puissance P de manière isotrope. Donner l'expression de $\left\|\langle\vec{R}\rangle\right\|$ mesurée à la distance d de la source en fonction de P.
9. Montrer alors que la valeur de E_0 en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ est donnée par la formule $E_0(d) = \dfrac{\sqrt{60P}}{d}$ où la valeur de P est en W et la valeur de d en m.

L'éclairement énergétique s'identifie à la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting $\vec{R}$. Pour des raisons liées à la sensibilité de l'œil humain, on définit aussi l'éclairement visuel $\mathcal{E}$ exprimé en lux (lx) qui rend compte également d'une puissance surfacique. C'est cet éclairement visuel $\mathcal{E}$ en lux que les capteurs d'éclairement présents dans les téléphones mesurent.

En utilisant une ampoule, un mètre et un téléphone, on obtient les résultats expérimentaux ci-après :



$\mathcal{E}$ (lx)	d (m)	$d^2(\mathrm{m}^2)$	$d^{-2}(\mathrm{m}^{-2})$
1000	0,1	0,010	100
445	0,15	0,022	44
250	0,2	0,040	25
155	0,25	0,063	16
110	0,3	0,090	11
60	0,4	0,16	6,3

10. Dans son livre intitulé « Essai d'optique sur la gradation de la lumière » édité en 1729, Pierre Bouguer écrit « la force de la lumière doit suivre une raison inversé des carrés de la distance aux corps lumineux ». Proposer une exploitation des résultats expérimentaux précédents permettant de tester cette loi de Bouguer.