

# 1 Des charges électriques au champ électrique

■ À revoir

■ Maîtrisé

## 1 Définition du champ électrostatique

### Densités de charge électrique

D'un point de vue mésoscopique, les répartitions de charges ne sont pas forcément ponctuelles. Elles peuvent être linéaires (fil chargé), surfaciques (plan chargé) ou volumiques (espace chargé). On définit alors :

- La charge **linéique**  $\lambda$ , telle que la charge infinitésimale  $dQ$  d'un fil de longueur infinitésimale  $d\ell$  vaille :  $dQ = \lambda d\ell$  ;
- La charge **surfacique**  $\sigma$ , telle que la charge infinitésimale  $dQ$  d'un plan de surface infinitésimale  $dS$  vaille :  $dQ = \sigma dS$  ;
- La charge **volumique**  $\rho$ , telle que la charge infinitésimale  $dQ$  d'un espace de volume infinitésimal  $dV$  vaille :  $dQ = \rho dV$  .

### Force électrostatique, champ électrostatique

Soit deux charges ponctuelles  $q_1$  et  $q_2$  séparées d'une distance  $d$ . Les deux charges exercent l'une sur l'autre une force électrostatique selon la **loi de Coulomb** :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}^e} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cdot \overrightarrow{e_{1 \rightarrow 2}}$$

où  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  est la **permittivité diélectrique du vide** et  $\overrightarrow{e_{1 \rightarrow 2}}$  est le vecteur unitaire allant de  $q_1$  vers  $q_2$ .

♥ Si  $q_1$  et  $q_2$  sont de même signe, l'interaction électrostatique est répulsive ; si  $q_1$  et  $q_2$  sont de signes opposés, elle est attractive.

On définit alors le **champ électrostatique**  $\vec{E}_1$  d'une distribution de charges (1), pas nécessairement ponctuelle, à partir de la force  $\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}^e}$  ressentie par une charge ponctuelle  $q_2$  dans ce champ :

$$\overrightarrow{F_{1 \rightarrow 2}^e} = q_2 \cdot \vec{E}_1$$

Le champ électrostatique s'exprime en volt par mètre  $\text{V m}^{-1}$ .

✚ Soit une charge ponctuelle  $q_1$  située en  $O$  et un point  $M$  quelconque tel que  $\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{u}_r$ . Le champ électrostatique créé par  $q_1$  en  $M$  est donc :  $\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}_r$ .

♥ Le champ électrostatique fuit **toujours** les charges **positives** et est **toujours** attiré par les charges **négatives**.

## Symétries et antisymétries

On dit qu'un plan  $\Pi$  est un plan de **symétrie** des charges si, lorsqu'une charge existe d'un côté de ce plan, alors une charge de même signe et de même valeur existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement à la première charge.

On dit qu'un plan  $\Pi$  est un plan d'**antisymétrie** des charges si, lorsqu'une charge existe d'un côté de ce plan, alors une charge de signe opposé et de même valeur absolue existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement à la première charge.

Soit un point  $M$  appartenant à un plan de symétrie  $\Pi_+$  des charges. Le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  est alors **contenu** dans ce plan :  $\vec{E}(M) \in \Pi_+$ .

Soit un point  $M$  appartenant à un plan d'antisymétrie  $\Pi_-$  des charges. Le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  est alors **orthogonal** à ce plan :  $\vec{E}(M) \perp \Pi_-$ .

## 2 Invariances

- Si la répartition de charges présente une symétrie centrale  $\rho(r)$  (on dit qu'il y a **invariance** selon les coordonnées  $\theta$  et  $\varphi$ ), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de  $r$  :  $E = E(r)$  ;
- Si la répartition de charges présente une symétrie axiale  $\rho(r, z)$  (on dit qu'il y a **invariance** selon  $\theta$ ), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de  $r$  et  $z$  :  $E = E(r, z)$ .  
Si la répartition de charges présente en plus une uniformité  $\rho(r)$  selon l'axe de révolution (invariance selon  $z$ ), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de  $r$  :  $E = E(r)$ .
- Si la répartition de charges est plane et uniforme (**invariances** selon  $x$  et  $y$ ), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de  $z$  :  $E = E(z)$ .

## 3 Théorème de Gauss

Le **théorème de Gauss** affirme que le flux du champ électrostatique  $\vec{E}$  à travers une surface fermée  $S$  et orientée vers l'extérieur est proportionnelle à la charge électrique contenue dans cette surface :

$$\oiint_{M \in S} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M^{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

## Utilité et étapes

L'utilité principale du théorème de Gauss est de pouvoir exprimer le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  en tout point  $M$ , si suffisamment de symétries permettent de simplifier le problème. Pour cela :

1. On recense les invariances dues aux répartitions des charges : on en déduit **les variables** de la norme du champ  $\vec{E}$  ;
2. On choisit un point  $M$  dans l'espace, et on identifie les plans de symétrie et/ou d'antisymétrie passant par ce point : on en déduit **la direction** du champ  $\vec{E}(M)$  ;

3. On choisit une **surface de Gauss** passant par le point  $M$  sur laquelle le champ  $\vec{E}$  est uniforme ;
4. On exprime de façon simple le flux du champ électrostatique à travers cette surface de Gauss ;
5. On calcule la charge intérieure à la surface de Gauss, généralement via une intégration :  
 $Q_{\text{int}} = \int \lambda \, d\ell$  ou  $Q_{\text{int}} = \iint \sigma \, dS$  ou  $Q_{\text{int}} = \iiint \rho \, dV$  ;
6. On applique le théorème de Gauss pour déterminer  $E(M)$ , puis  $\vec{E}(M)$ .



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

## Détermination du champ électrique créé par une boule chargée uniformément en volume

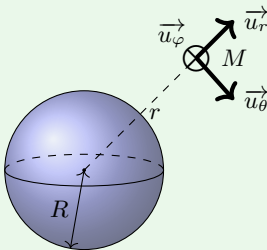
## Énoncé

On considère une boule de rayon  $R$ , chargée avec une densité volumique de charge uniforme  $\rho_0$ . On note  $M$  un point quelconque pouvant être situé en dehors ou au sein de la boule, et  $r$  sa distance par rapport au centre de la boule.

1. Montrer que  $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$ .
2. Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique au point  $M$ .

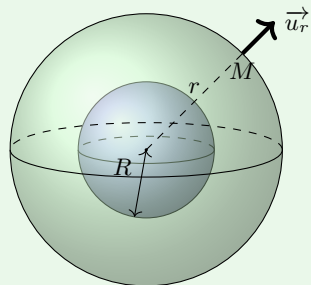
## Résolution

1.



- Les plans  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$  sont des plans de symétrie de la répartition de charges, donc  $\vec{E}$  y appartient simultanément :  $\vec{E} = E(M) \cdot \vec{u}_r$ .
- La répartition de charges présente des invariances par rotation selon  $\theta$  et  $\varphi$ . On a donc  $E(M) = E(r)$ .
- On déduit des deux points précédents que  $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u}_r$ .

2. • On choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon  $r$  passant par  $M$ , sur laquelle  $E$  est uniforme.





## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

- Le flux du champ électrostatique est :

$$\begin{aligned}
 \oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} &= \oiint_{S_{\text{Gauss}}} E(r) \cdot \vec{e}_r \cdot dS \cdot \vec{e}_r \\
 &= E(r) \times \oiint_{S_{\text{Gauss}}} dS \text{ car } E(r) \text{ est uniforme sur } S_{\text{Gauss}} \\
 &= E(r) \times 4\pi r^2
 \end{aligned}$$

- On calcule la charge  $Q_{\text{int}}$  intérieure à la surface de Gauss selon les cas :

- Si  $r > R$ , alors la charge intérieure est répartie dans le volume  $\mathcal{V}_1$  délimité par la sphère de rayon  $R$ . On a donc :  $Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}_1} \rho_0 dV = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$  car  $\rho_0$  est uniforme dans le volume d'intégration  $\mathcal{V}_1$  ;
- Si  $r < R$ , alors la charge intérieure est répartie dans le volume  $\mathcal{V}_2$  délimité par la sphère de rayon  $r$ . On a donc :  $Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}_2} \rho_0 dV = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi r^3$  car  $\rho_0$  est uniforme dans le volume d'intégration  $\mathcal{V}_2$ .

- On applique le théorème de Gauss :  $\oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ .

- Si  $r > R$ , alors  $E(r) \times 4\pi r^2 = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$ , c'est-à-dire :  $\vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r$ .
- Si  $r < R$ , alors  $E(r) \times 4\pi r^2 = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi r^3$ , c'est-à-dire que  $\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_r$ .



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

## Détermination du champ électrique créé par un plan infini chargé uniformément en surface

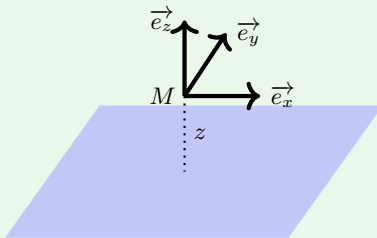
### Énoncé

On considère un plan infini dans les directions  $x$  et  $y$ . On note  $M$  un point quelconque situé au-dessus du plan, et  $z$  sa distance par rapport à ce plan.

1. Montrer que  $\vec{E} = E(z) \cdot \vec{e}_z$ .
2. Justifier que  $E(-z) = -E(z)$ .
3. Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique au point  $M$ .
4. Quelle est l'expression du champ électrique sous le plan ?

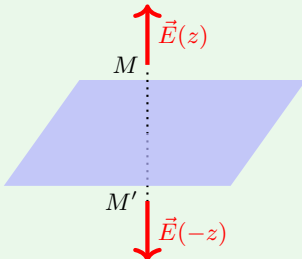
### Résolution

1.



- Les plans  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  et  $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  sont des plans de symétrie de la répartition de charges, donc  $\vec{E}$  y appartient simultanément :  $\vec{E} = E \cdot \vec{u}_z$ .
- La répartition de charges présente des invariances par translation selon  $x$  et  $y$  car le plan est infini et uniformément chargé dans ces deux directions. On a donc  $E = E(z)$ .
- On déduit des deux points précédents que  $\vec{E} = E(z) \cdot \vec{u}_z$ .

2.



Prenons un point  $M'$  symétrique du point  $M$  par rapport au plan infini. On observe que les champs électriques sont de même norme mais de sens opposés :  $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$ , c'est-à-dire  $E(-z) \cdot \vec{u}_z = -E(z) \cdot \vec{u}_z$ .

En projetant selon  $\vec{u}_z$ , on a donc  $E(-z) = -E(z)$ .

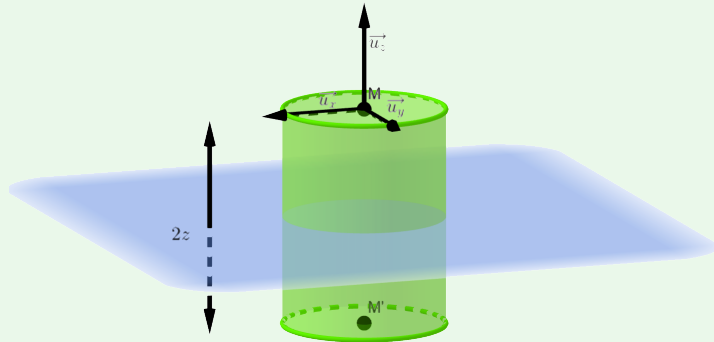


## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

3. • On choisit comme surface de Gauss un cylindre de hauteur  $2z$  et de rayon  $a$  tel que  $M$  soit situé sur sa face supérieure et  $M'$  sur sa face inférieure.  $E$  est uniforme sur les faces haute et basse, et la surface de Gauss est bien fermée.



- Le flux du champ électrostatique est :

$$\oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} = \iint_{\text{haut}} \vec{E} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} + \iint_{\text{bas}} \vec{E} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} + \iint_{\text{paroi latérale}} \vec{E} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}}$$

Or, pour la paroi latérale, on a  $d\vec{S}^{\text{ext}}$  orthogonal à  $\vec{E}$  donc le flux est nul.

On a donc :

$$\begin{aligned} \oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} &= \iint_{\text{haut}} E(z) \cdot \vec{e}_z \cdot dS \cdot \vec{e}_z + \iint_{\text{bas}} E(-z) \cdot \vec{e}_z \cdot dS \cdot (-\vec{e}_z) \\ &= E(z) \times \pi a^2 - \underbrace{E(-z)}_{=E(z)} \times \pi a^2 \quad \text{car } E \text{ est uniforme en haut et en bas} \\ &= 2E(z) \times \pi a^2 \end{aligned}$$

- On calcule ensuite la charge intérieure  $Q_{\text{int}}$  à la surface de Gauss. Ici, la charge est contenu dans la surface  $S_{\text{int}}$  représentée par l'intersection du cylindre de Gauss et du plan chargé, donc  $Q_{\text{int}} = \iint_{S_1} \sigma_0 dS = \sigma_0 \times \pi a^2$  car  $\sigma_0$  est uniforme.



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

- On applique le théorème de Gauss :  $\oiint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ .

On a alors  $2E(z)\pi a^2 = \frac{\sigma_0 \times \pi a^2}{\varepsilon_0}$ , et donc :  $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z$ .

4. On sait que  $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$ , donc le champ électrique sous le plan aura pour expression :  
 $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{e}_z$ .

## 2 Tension électrique et potentiel électrique

■ À revoir

■ Maîtrisé

### 1 De la tension électrique au potentiel électrique

On appelle **tension électrique**  $U_{AB}$  entre deux points  $A$  et  $B$  la circulation du champ électrostatique entre ces deux points :

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

La tension s'exprime en volt  $V$ .

Expérimentalement, on observe que la circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé quelconque est toujours nulle :  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ . Mathématiquement, cela implique alors que l'on peut écrire le champ électrostatique sous la forme :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

avec  $V$  le **potentiel électrostatique**, exprimé en volt  $V$ .

On en déduit alors que l'on peut écrire  $U_{AB} = V(A) - V(B)$  : la tension électrique ne dépend que des points de départ et d'arrivée, indépendamment du chemin parcouru. De cette écriture découle la **loi d'additivité des tensions** :

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$$

ainsi que la **loi des mailles** :

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = 0$$

## 2 Condensateur et capacité électrique

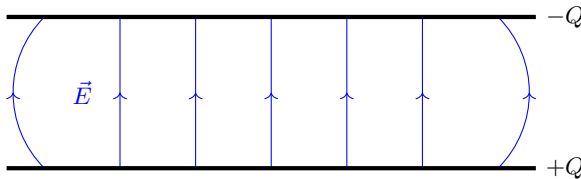
Un milieu est **diélectrique** s'il ne contient pas de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique. Le milieu ne peut donc pas conduire le courant électrique, et est souvent un isolant électrique. Les milieux diélectriques incluent par exemple le vide, le verre, le bois sec, l'eau pure et de nombreux plastiques.

On caractérise un milieu diélectrique par sa permittivité diélectrique  $\varepsilon$ , en  $\text{F m}^{-1}$ .

♥ Dans un milieu diélectrique, les résultats issus du théorème de Gauss restent valables, tant que l'on remplace  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon$ .

♥ On calcule souvent la permittivité  $\varepsilon$  d'un milieu diélectrique à partir de sa permittivité relative  $\varepsilon_r$ , qui n'a pas d'unité. On a  $\varepsilon = \varepsilon_r \times \varepsilon_0$ , avec  $\varepsilon_r = 1$  dans le vide,  $\varepsilon_r = 5$  dans le verre,  $\varepsilon_r = 78,5$  dans l'eau...

Un **condensateur plan** est un composant électronique constitué de deux plaques parallèles l'une à l'autre, séparées par un milieu diélectrique. Les deux plaques ont des charges opposées  $+Q$  et  $-Q$ , et sont en influence totale : les lignes de champ électrique de la première plaque atteignent toutes la deuxième plaque, et inversement.



La différence de potentiel (ou tension)  $U$  entre les deux armatures d'un condensateur est proportionnelle à leur charge :

$$Q = C \times U$$

où  $C$  est la **capacité** du condensateur, qui s'exprime en farad F.

Pour un condensateur plan, la capacité peut s'écrire :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

où  $S$  est la surface de chaque armature et  $e$  la distance entre celles-ci.

Par étude de l'énergie du condensateur, on peut montrer qu'il existe une **densité volumique d'énergie électrique** (en  $\text{J/m}^3$ ) associée à l'existence du champ électrique :

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

♥ L'énergie électrique totale contenue dans l'espace est donc  $\mathcal{E}_e = \iiint u_e \, dV$ .



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

## Calcul du potentiel à partir du champ

## Énoncé

Une sphère de rayon  $R$  contenant une charge  $q$  répartie uniformément dans son volume crée par un champ :

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \cdot \vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

On admet que le potentiel électrostatique  $V$  est continu, et on utilisera le gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$$

1. Rappeler le lien entre  $\vec{E}$  et  $V$ . En déduire que  $V$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $\varphi$ .
2. Déterminer les expressions de  $V$  selon les cas  $r < R$  et  $r > R$ , en utilisant deux constantes d'intégration  $A$  et  $B$  que l'on ne cherchera pas encore à déterminer.
3. On prend pour convention un potentiel électrostatique nul à l'infini :  $V(r \rightarrow \infty) = 0$ . En déduire l'expression d'une des deux constantes d'intégration.
4. Par continuité du potentiel électrostatique en  $r = R$ , déterminer l'expression de l'autre constante d'intégration, puis l'expression finale de  $V(r)$  selon les cas  $r < R$  et  $r > R$ .

## Résolution

1. On a  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} E(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

puisque  $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$  n'a aucune composante selon  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$ .

Nécessairement,  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$  :  $V$  ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $\varphi$ .



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

2. On utilise la projection selon  $\vec{e}_r$  de l'équation précédente dans les deux cas :

- Pour  $r < R$ , on a donc  $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$ . En intégrant, on en déduit que

$$V(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} + A, \text{ avec } A \text{ une constante}^1.$$

- Pour  $r > R$ , il vient que  $\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$ , et alors  $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + B$ , avec  $B$  une constante.

3. Le potentiel doit être nul en l'infini, donc l'expression de  $V(r)$  pour  $r > R$  doit être nulle lorsque  $r \rightarrow \infty$ . On en déduit que  $B = 0$ .

4. Le potentiel est continu : il faut que pour  $r = R$ , les expressions du potentiel soient égales.

On en déduit que  $\underbrace{-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{2R^3} + A}_{V \text{ pour } r=R^-} = \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}}_{V \text{ pour } r=R^+}$ , c'est-à-dire que

$$A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{8\pi\epsilon R} = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3R^2}{2R^3}.$$

Il vient donc l'expression générale pour  $V$  :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3R^2 - r^2)}{2R^3} & \text{si } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

1.  $A$  est bien une constante et pas une fonction de  $\theta$  et  $\varphi$  puisque nous avons montré que  $V$  ne peut dépendre de ces deux variables.



## Exercice résolu

■ À revoir

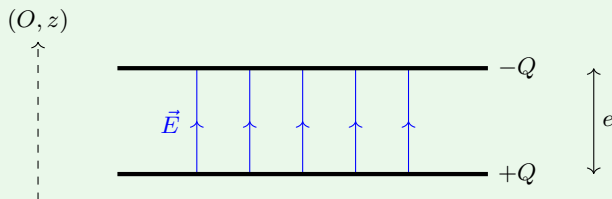
■ Maîtrisé

## Expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide

## Énoncé

Démontrer que la capacité d'un condensateur plan est  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$  avec  $S$  la section de chaque armature et  $e$  l'espacement entre les deux armatures.

On supposera les deux armatures très rapprochées afin de négliger les effets de bord, et on admettra que le champ électrostatique créé en un point  $M$  de l'espace par un plan infini de charge surfacique  $\sigma$  vaut  $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est le vecteur normal au plan dirigé vers  $M$ .



## Résolution

Chaque armature possède une charge surfacique  $\pm\sigma = \pm\frac{Q}{S}$ . Ainsi, si l'on s'intéresse à un point quelconque au sein du condensateur :

- Le champ créé par l'armature de charge  $+Q$  vaut  $\vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_z = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_z$  ;
- Le champ créé par l'armature de charge  $-Q$  vaut  $\vec{E}_- = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot (-\vec{u}_z) = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_z$ .

Le champ électrostatique total est donc  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 2 \times \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_z = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_z$ .

La tension entre les deux plaques est alors :

$$\begin{aligned}
 U &= \int_{\text{armature } +}^{\text{armature } -} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\
 &= \int_0^e \frac{Q}{S\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_z \cdot dz \cdot \vec{u}_z \\
 &= \frac{Q}{S\varepsilon_0} \times e
 \end{aligned}$$

Or on sait que  $Q = C \times U$ , donc  $C = \frac{Q}{U}$  et alors  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$ .

## 6 Conduction électrique

■ À revoir

■ Maîtrisé

### 1 Densités de courant

#### Courant volumique

Soit un déplacement de particules chargées dans l'espace. On note leur densité volumique  $n^*$  (nombre de particules par unité de volume, en  $\text{m}^{-3}$ ),  $\vec{v}$  leur vitesse d'ensemble et  $q$  la charge d'une particule.

On définit alors le vecteur **densité volumique de courant**  $\vec{j}$  comme :

$$\vec{j} = n^* q \cdot \vec{v}$$

La densité volumique de courant s'exprime en  $\text{A}/\text{m}^2$ .

#### Intensité du courant

Soit une densité volumique de courant  $\vec{j}$  passant à travers une surface orientée  $S$ . On définit l'**intensité du courant**  $i$  comme le flux de  $\vec{j}$  à travers cette surface :

$$i = \iint_{M \in S} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Son unité est l'ampère A.

♥ En particulier, si la densité de courant est uniforme sur la surface d'intégration, alors :  
 $i = \vec{j} \cdot \vec{S}$ .

### 2 Conservation de la charge

La charge électrique totale d'un système se conserve. Cette propriété peut s'écrire, à l'échelle locale et mésoscopique, comme l'équation locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

L'écriture intégrale de cette équation est :

$$I_e - I_s = \frac{dQ_{\text{int}}}{dt}$$

où  $I_e$  représente l'intensité du courant entrant et  $I_s$  celle du courant sortant.

En régime stationnaire, les dépendances en temps sont annulées. Il vient alors que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , c'est-à-dire que  $\text{div } \vec{j} = 0$  : le vecteur densité de courant est à flux conservatif.

Du point de vue macroscopique, cela signifie qu'au sein d'un même conducteur, l'intensité entrante totale doit être égale à l'intensité sortante totale : c'est la **loi des nœuds** :

$$\sum I_{\text{entrantes}} = \sum I_{\text{sortantes}}$$

### 3 Loi d'Ohm

Localement, le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  parcourant un conducteur est proportionnel au champ électrique  $\vec{E}$  en son sein. Cette propriété est appelée **loi d'Ohm locale**, qui peut s'écrire mathématiquement :

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$$

$\gamma$  est la conductivité électrique du milieu, qui est toujours positive et s'exprime en  $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ .  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$  ont donc même direction et même sens.

👉  $\gamma_{\text{cuivre}} = 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  ;  $\gamma_{\text{fer}} = 1 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  ;  $\gamma_{\text{eau distillée}} = 1 \times 10^{-5} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

On peut réécrire cette loi d'un point de vue intégral. Soit un conducteur de longueur  $\ell$ , de section  $S$  et de conductivité électrique  $\gamma$  possédant une tension  $U$  à ses bornes. Selon la **loi d'Ohm intégrale**, l'intensité  $i$  du courant électrique s'écoulant entre ces deux bornes est proportionnelle à  $U$  :

$$U = R \times i$$

où  $R \triangleq \frac{\ell}{\gamma S}$  est la **résistance électrique** du conducteur.

### Effet Joule

Des porteurs de charge en mouvement dans un champ électrique cèdent une puissance volumique  $p_J$  (en  $\text{W}/\text{m}^3$ ) proportionnelle au vecteur densité de courant et au champ électrique :

$$p_J = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Cette puissance se transfère à la matière environnante, généralement sous forme de chaleur : c'est ce que l'on appelle l'**effet Joule**.

♥ Le fait que  $p_J$  soit négatif reflète justement le fait que la puissance est cédée des porteurs de charge (le système étudié) vers la matière (le milieu extérieur).

D'un point de vue intégral, on a  $\mathcal{P}_J = -Ri^2 = -\frac{U^2}{R}$ .



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

## Établissement de l'équation locale unidimensionnelle de la conservation de la charge

## Énoncé

Soit un barreau cylindrique de section  $S$ . On étudie une tranche  $dx$  de ce barreau.

On note  $\rho(x, t)$  la densité volumique de charge en  $x$  et à l'instant  $t$ ;  $\vec{j}(x, t) = j(x, t) \cdot \vec{u}_x$  la densité volumique de courant en  $x$  et à l'instant  $t$ .

En effectuant un bilan de charge sur la tranche entre  $t$  et  $t + dt$ , établir l'équation locale de conservation de la charge :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$ .

## Résolution

Notons  $\delta Q(t)$  la charge totale de la tranche  $dx$  à l'instant  $t$ .

Puisque la charge ne peut pas se créer et/ou disparaître, on a  $\delta Q(t + dt) - \delta Q(t) = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}}$ .

- Le volume de la tranche étant  $\delta V = S dx$ , on en déduit que  $\delta Q(t) = \rho(x, t) \times \delta V = \rho(x, t) \times S dx$ .

Nécessairement,

$$\begin{aligned} \delta Q(t + dt) - \delta Q(t) &= \rho(x, t + dt) \times S dx - \rho(x, t) \times S dx \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \times S dx \end{aligned}$$

- On a  $\delta Q_{\text{entrant}} = I_{\text{entrant}} \times dt = j(x, t) S \times dt$  et  $\delta Q_{\text{sortant}} = I_{\text{sortant}} \times dt = j(x + dx, t) S \times dt$ .

Nécessairement,

$$\begin{aligned} \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} &= (j(x, t) - j(x + dx, t)) S dt \\ &= -\frac{\partial j}{\partial x} dx \times S dt \end{aligned}$$

En égalisant les deux expressions, on en déduit que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \times S dx = -\frac{\partial j}{\partial x} dx \times S dt$$

D'où la relation demandée :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$$