

1 Statique des fluides

■ À revoir

■ Maîtrisé

1 Grandeurs lagrangiennes et eulériennes

Pour décrire un écoulement fluide, on peut essayer de décomposer le fluide en méso-éléments, que l'on appelle « particules fluides » : c'est un point P de position $\overrightarrow{OP}(t) = (x_P(t), y_P(t), z_P(t))$, de volume $\delta V_P(t)$, de température $T_P(t)$, de vitesse $\overrightarrow{v}_P(t)$, etc.

On dit alors qu'il s'agit d'une **description lagrangienne** de l'écoulement.

Un autre point de vue est de fixer un point de coordonnées (x, y, z) indépendantes du temps, et de visualiser l'évolution de certains paramètres locaux : la température $T(x, y, z, t)$, la vitesse $\overrightarrow{v}(x, y, z, t)$, la masse volumique $\mu(x, y, z, t)$, etc.

On dit alors qu'il s'agit d'une **description eulérienne** de l'écoulement.

En mécanique des fluides, on utilise systématiquement la description eulérienne.

2 Gradient d'un champ scalaire

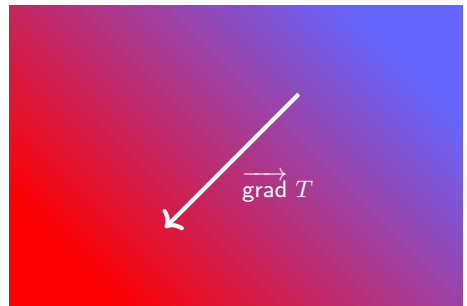
Le **gradient** $\overrightarrow{\text{grad}}$ f d'un champ scalaire $f(x, y, z)$ vaut :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \triangleq \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

En « écriture nabla », on a donc : $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$.

♥ Le gradient de f est un vecteur qui représente localement (c'est-à-dire en un point précis) la direction selon laquelle f croît. Il constitue une généralisation de la dérivation à trois dimensions.

👉 On représente ci-contre le champ de température $T(x, y)$ (en rouge, les températures élevées ; en bleu, les températures faibles) ainsi que $\overrightarrow{\text{grad}} T$.



♥ On peut montrer que la résultante des forces de pression s'exerçant sur un volume élémentaire dV peut s'écrire $-\vec{\text{grad}}(p)dV$. Cette formule n'est pas à savoir mais plutôt à savoir démontrer.

3 Relation de la statique des fluides

Si l'on applique le PFD à une particule de fluide statique de masse volumique μ uniquement soumise à son poids et aux forces de pression, on trouve la **relation de la statique des fluides** :

$$\vec{\text{grad}} p = \mu \cdot \vec{g}$$

♥ Si l'axe z est orienté vers le haut, alors $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$ et on a $\frac{dp}{dz} = -\mu g$.

♥ Si l'axe z est orienté vers le bas, alors $\vec{g} = g \cdot \vec{e}_z$ et on a $\frac{dp}{dz} = \mu g$.

On a donc *toujours* la pression qui augmente avec la profondeur et qui diminue avec l'altitude au sein d'un même fluide. En particulier, au sein d'un même fluide, deux points de même altitude/de même profondeur auront la même pression.

Pour un fluide incompressible

Un fluide **incompressible** (ou **homogène**) a une masse volumique μ uniforme dans l'espace. Il vient que l'on peut intégrer la relation de la statique des fluides entre deux points, ce qui donne :

$$p_{\text{bas}} - p_{\text{haut}} = \mu g H$$

où $H > 0$ représente la dénivellation entre les points considérés.

4 Poussée d'Archimède

La **poussée d'Archimède** $\vec{\Pi}_A$ est la force que subit un corps placé entièrement ou partiellement dans un fluide et soumis à un champ de gravité. Cette force provient de la variation de la pression du fluide avec la profondeur ou l'altitude : la pression étant plus forte sur la partie inférieure d'un objet immergé que sur sa partie supérieure, il en résulte une poussée globalement verticale ascendante.

Un corps ayant un volume V_{imm} immergé dans un fluide de masse volumique μ_{fluide} subira donc la force :

$$\vec{\Pi}_A = -\mu_{\text{fluide}} V_{\text{imm}} \vec{g}$$

où $\vec{g}$ représente le champ de pesanteur.

♥ Lorsque l'on effectue un BAME sur un système mécanique, il ne faut donc pas prendre en compte les forces de pression et la poussée d'Archimède : cette dernière n'est rien d'autre que la résultante de la première. Lister les deux revient donc à compter deux fois la même force.



Démonstration de la relation fondamentale de la statique des fluides

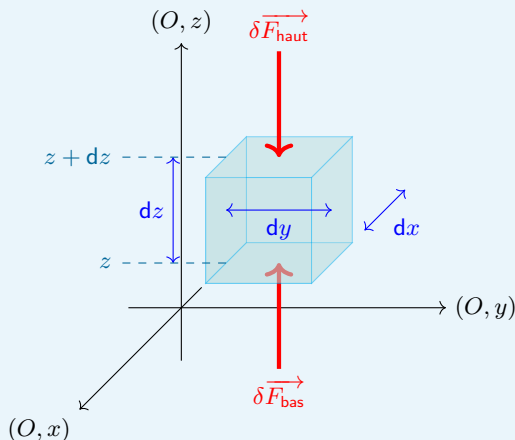
Énoncé

Soit un volume élémentaire de fluide contenu entre les abscisses x et $x + dx$, les ordonnées y et $y + dy$ et les cotes z et $z + dz$. Ce volume baigne dans le fluide environnant et dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On note $p = p(z)$ le champ de pression dépendant uniquement de l'altitude z , μ le champ de masse volumique et on se place en régime statique.

1. Exprimer la force de pression $\delta \vec{F}_{\text{bas}}$ exercée sur la face à la cote z . De même, exprimer la force de pression $\delta \vec{F}_{\text{haut}}$ exercée sur la face à l'abscisse $z + dz$.
2. En déduire la force de pression $\delta \vec{F}_z$ exercée selon la direction (O, z) en fonction notamment de $dV = dx dy dz$.
3. Que valent les résultantes des forces de pression $\delta \vec{F}_x$ selon l'axe (O, x) et $\delta \vec{F}_y$ selon l'axe (O, y) ?
4. Exprimer le poids $\delta \vec{P}$ subi par le volume élémentaire. Par application du principe fondamental de la statique, en déduire l'équation différentielle vérifiée par $p(z)$.
5. On suppose dans cette question que l'on a en réalité $p = p(x, y, z)$. Généraliser l'expression de la résultante des force de pression, puis en déduire la relation fondamentale de la statique des fluides $\text{grad}(p) = \mu \cdot \vec{g}$.

Résolution

1. On représente le système à l'aide du schéma ci-dessous :





Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

Puisque la face inférieure a une surface $dx dy$ et est contenu à la cote z , on en déduit que

$$\delta \vec{F}_{\text{bas}} = p(z) \times dx dy \cdot \vec{u}_z.$$

La force $\delta \vec{F}_{\text{haut}}$ est contenue quant à elle à la cote $z + dz$ et est orientée vers le bas, donc

$$\delta \vec{F}_{\text{haut}} = p(z + dz) \times dx dy \cdot (-\vec{u}_z) = -p(z + dz) \times dx dy \cdot \vec{u}_z.$$

2. Exprimons $\delta \vec{F}_z$:

$$\begin{aligned} \delta \vec{F}_z &= \delta \vec{F}_{\text{bas}} + \delta \vec{F}_{\text{haut}} \\ &= p(z) \times dx dy \cdot \vec{u}_z - p(z + dz) \times dx dy \cdot \vec{u}_z \\ &= -[p(z + dz) - p(z)] dx dy \cdot \vec{u}_z \\ &= -\frac{p(z + dz) - p(z)}{\textcolor{red}{dz}} \times \overbrace{dz dx dy}^{dV} \cdot \vec{u}_z \\ &\quad \text{(on multiplie et on divise par } \textcolor{red}{dz} \text{ pour faire apparaître une dérivée)} \\ &= -\frac{dp}{dz} dV \cdot \vec{u}_z \end{aligned}$$

3. Les forces de gauche et de droite se compensent car la pression y est la même, donc $\delta \vec{F}_x = \vec{0}$. Même raisonnement pour $\delta \vec{F}_y$.

4. La masse du système est $\delta m = \mu \cdot dV$. On en déduit l'expression du poids $\delta \vec{P} = \delta m \cdot \vec{g} = \mu dV \cdot \vec{g}$.

Le volume élémentaire étant à l'équilibre, on en déduit, par application du principe fondamental de la statique, que $\delta \vec{F}_x + \delta \vec{F}_y + \delta \vec{F}_z + \delta \vec{P} = \vec{0}$, c'est-à-dire que $-\frac{dp}{dz} dV + \mu dV \cdot \vec{g} = \vec{0}$.

En divisant par dV et en projetant selon $\vec{u}_z$, on obtient donc $-\frac{dp}{dz} - \mu g = 0$, c'est-à-dire $\frac{dp}{dz} = -\mu g$.



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

5. Si p dépendait des trois coordonnées spatiales, on peut réutiliser le résultat de la question 2 : par analogie, on en déduit que $\delta \vec{F}_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \cdot \vec{u}_x$ et $\delta \vec{F}_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dV \cdot \vec{u}_y$.

Nécessairement :

$$\begin{aligned}
 \delta \vec{F}_{\text{pression}} &= \delta \vec{F}_x + \delta \vec{F}_y + \delta \vec{F}_z \\
 &= -\frac{\partial p}{\partial x} dV \cdot \vec{u}_x - \frac{\partial p}{\partial y} dV \cdot \vec{u}_y - \frac{\partial p}{\partial z} dV \cdot \vec{u}_z \\
 &= -\left[\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \vec{u}_z \right] dV \\
 &= -\vec{\text{grad}}(p) dV
 \end{aligned}$$

Le PFS appliqué à la particule fluide donne donc $-\vec{\text{grad}}(p) dV + \mu dV \cdot \vec{g} = \vec{0}$, c'est-à-dire :

$$\vec{\text{grad}}(p) = \mu \cdot \vec{g}$$



Exercice résolu

■ À revoir

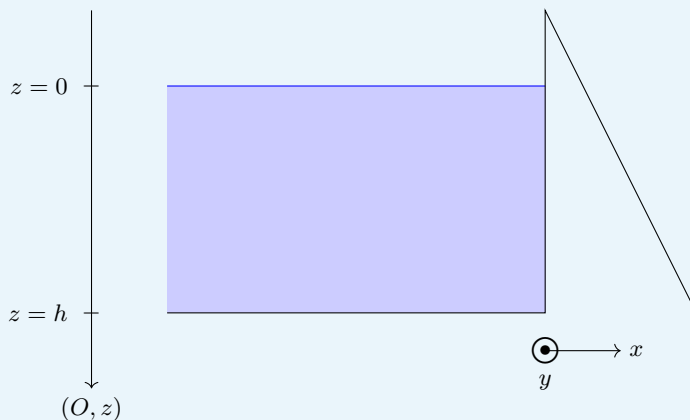
■ Maîtrisé

Force appliquée sur un barrage

Énoncé

Soit un barrage permettant de contenir l'eau (au repos) d'un réservoir. On prend un axe vertical descendant, dont l'origine correspond à la surface libre de l'eau (voir figure ci-dessous, qui représente le barrage en coupe avec le mur à droite).

On note $p_{\text{atm}} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}$ la pression atmosphérique, z la profondeur d'un point M quelconque du fluide et $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ la masse volumique uniforme de l'eau. Le barrage a une largeur $L = 50 \text{ m}$ selon la direction y , et l'eau va jusqu'à une profondeur $h = 10 \text{ m}$.



1. Rappeler la relation fondamentale de l'hydrostatique. En déduire que l'on a, dans le contexte de l'énoncé, $\frac{dp}{dz} = \rho g$ (on justifiera notamment qu'il s'agit d'une dérivée « classique » et pas d'une dérivée partielle).
2. Exprimer $p(z)$ en fonction des données de l'énoncé.
3. À l'aide d'un calcul intégral, déterminer la force pressante F que l'eau exerce sur le mur du barrage. Faire l'application numérique.



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

Résolution

1. La relation fondamentale de l'hydrostatique est $\vec{\text{grad}}(p) = \rho \cdot \vec{g}$, avec ici $\vec{g} = g \cdot \vec{u}_z$ car l'axe vertical est descendant.

On en déduit donc que $\begin{pmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix}$.

Les deux premières projections donnent $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$: on en déduit que p est indépendant de x et de y . Nécessairement, p ne dépend que de z , et alors $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$.

La projection de la troisième composante donne alors bien $\frac{dp}{dz} = \rho g$.

2. On a $\frac{dp}{dz} = \rho g$ avec ρ et g deux grandeurs uniformes (indépendantes de z) d'après les hypothèses de l'énoncé. On en déduit que $p(z) = \int \rho g dz = \rho g z + A$ avec A une constante que l'on peut déterminer à l'aide des conditions aux limites.

En effet, $p(z=0) = p_{\text{atm}}$ d'après l'énoncé, et $p(z=0) = A$ en remplaçant z par 0 dans l'expression précédente de $p(z)$. On en déduit que $A = p_{\text{atm}}$, et donc que $p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g z$.

3. La force infinitésimale de pression $\delta \vec{F}$ exercée par l'eau sur une petite portion du mur d'aire $dydz$ est $\delta \vec{F} = p \times dydz \cdot \vec{u}_x$.

On a alors $\vec{F} = \iint_{\text{mur du barrage}} p(z) dydz \cdot \vec{u}_x$, et donc :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \iint_{\text{mur du barrage}} (p_{\text{atm}} + \rho g z) dydz \cdot \vec{u}_x \\ &= \int_{y=0}^{y=L} dy \times \int_{z=0}^{z=h} (p_{\text{atm}} + \rho g z) dz \cdot \vec{u}_x \\ &= L \times \left(p_{\text{atm}} \times h + \rho g \times \frac{h^2}{2} \right) \cdot \vec{u}_x \end{aligned}$$

On a donc $F = Lh \times \left(p_{\text{atm}} + \rho g \frac{h}{2} \right) = 7,5 \times 10^7 \text{ N}$.



Modèle de l'atmosphère isotherme

Énoncé

Considérons une atmosphère isotherme de température T dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$ supposé uniforme, même à grande altitude. L'atmosphère est modélisée par un gaz parfait de masse molaire M . On note $\mu(z)$ la masse volumique de l'atmosphère compressible et $p(z)$ sa pression ; p_0 représente l'altitude en $z = 0$.

1. Rappeler la relation fondamentale de l'hydrostatique. En déduire que l'on a, dans le contexte de l'énoncé, $\frac{dp}{dz} = -\mu g$ (on justifiera notamment qu'il s'agit d'une dérivée « classique » et pas d'une dérivée partielle).
2. À l'aide de la loi des gaz parfaits, déterminer une expression de μ en fonction notamment de p .
3. Déterminer l'expression explicite de $p(z)$. Mettre en évidence une hauteur caractéristique H pour l'évolution spatiale de la pression.

Résolution

1. La relation fondamentale de l'hydrostatique est $\vec{\text{grad}}(p) = \mu \cdot \vec{g}$, avec ici $\vec{g} = -g \cdot \vec{u}_z$ car l'axe vertical est ascendant.

On en déduit donc que
$$\begin{pmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu g \end{pmatrix}.$$

Les deux premières projections donnent $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$: on en déduit que p est indépendant de x et de y . Nécessairement, p ne dépend que de z , et alors $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$.

La projection de la troisième composante donne alors bien $\frac{dp}{dz} = -\mu g$.

2. La loi des gaz parfaits sur un volume mésoscopique δV donne : $p \times \delta V = \delta n \times R \times T$. Or $\delta n = \frac{\delta m}{M}$, donc on a finalement : $p \times \delta V \times M = \delta m \times R \times T$. Or $\mu = \frac{\delta m}{\delta V}$, donc

$$M \times p = \mu \times R \times T \text{ et alors } \boxed{\mu = \frac{M}{RT} \times p}.$$



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

3. En utilisant $\frac{dp}{dz} = -\mu g$ et $\mu = \frac{M}{RT}p$, on détermine que $\frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT} \times p$, et donc :

$$\boxed{\frac{dp}{dz} + \frac{1}{H}p = 0} \text{ avec } H = \frac{RT}{Mg}.$$

Il vient alors que $p(z) = Ae^{-z/H}$. Pour déterminer l'expression de A , on utilise la condition aux limites : $p(z=0) = p_0$, donc $Ae^{-0/H} = p_0$. On en déduit que $A = p_0$, et donc que

$$\boxed{p(z) = p_0 e^{-z/H}}.$$

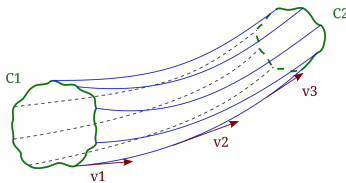
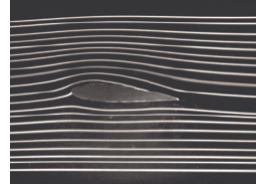
2 Description d'un fluide en écoulement

■ À revoir

■ Maîtrisé

1 Ligne de courant, tube de courant

On appelle **ligne de courant** la trajectoire d'une particule fluide dans un écoulement. Il s'agit donc d'une ligne orientée et tangente en tout point au champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$ (voir lignes de courant à droite).



Un **tube de courant** est une surface ouverte¹ fictive définie par la réunion de lignes de courant s'appuyant sur deux contours fermés $C1$ et $C2$ (voir tube de courant à gauche)

♥ Par définition, la vitesse orthogonale à la frontière est nulle et il n'y a donc pas de fluide traversant les parois latérales ce tube, ce qui justifie que les particules fluides y soient confinées (voir la figure du tube de courant : le champ de vitesse est toujours tangent à la paroi latérale du tube de courant).

1. Cela signifie qu'il y a au moins un « trou » dans la surface ; ici, il y a une frontière d'entrée et une frontière de sortie.

2 Débit massique

Soit un déplacement de particules fluides dans l'espace. On note respectivement $\mu(M, t)$ et $\vec{v}(M, t)$ la masse volumique et la vitesse eulériennes de l'écoulement.

On définit alors le **vecteur densité volumique de masse** (ou **vecteur densité de flux de masse**) $\vec{J}$ comme :

$$\vec{J} = \mu \cdot \vec{v}$$

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté $\vec{v}$ et la masse volumique μ . Le débit massique de cet écoulement à travers une surface S est égal au flux du vecteur densité de masse à travers cette surface :

$$\mathcal{D}_m = \iint_{M \in S} \vec{J}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Le débit massique s'exprime en kg s^{-1} .

♥ Si la masse volumique est uniforme sur la section (donc si l'écoulement est incompressible), on a $\mathcal{D}_m = \mu \times \mathcal{D}_v$.

On peut montrer que le débit massique de cet écoulement à travers une surface S est égale à la masse débitée par unité de temps :

$$\mathcal{D}_m = \frac{\Delta M}{\Delta t}$$

3 Divergence d'un champ vectoriel

La **divergence** $\text{div } \vec{A}$ d'un champ vectoriel $\vec{A} = A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z$ vaut :

$$\text{div } \vec{A} \triangleq \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En « écriture nabla », on a donc :

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

♥ La divergence d'un champ vectoriel est un scalaire² dépendant du point M de l'espace où on le calcule. Il est négatif si le champ « rentre davantage que ce qu'il ne sort » d'un volume localisé autour du point M considéré, et positif si le champ « sort davantage que ce qu'il ne rentre ».

2. C'est-à-dire un nombre, et non pas un vecteur.

4 Conservation de la masse

Soit un fluide en écoulement dans un système Σ , dont on note la masse au cours du temps $\mathcal{M}(t)$. **La masse se conservant**, on a :

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \mathcal{D}_{m,e} - \mathcal{D}_{m,s}$$

où $\mathcal{D}_{m,e}$ et $\mathcal{D}_{m,s}$ sont les débits massiques respectivement entrant et sortant du système.

En appliquant cette relation à un élément mésoscopique, on en déduit l'**équation locale de conservation de la masse** :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0$$

Pour un écoulement stationnaire, l'équation locale de conservation de la masse devient alors :

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0$$

On en déduit que le débit massique se conserve en régime stationnaire : $\mathcal{D}_m^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_m^{\text{sortant}}$.

5 Débit volumique

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté $\vec{v}$. Le **débit volumique** de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égal au flux de la vitesse à travers cette surface :

$$\mathcal{D}_v = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Le débit volumique s'exprime en $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$.

♥ On choisit généralement l'orientation de $\mathcal{S}$ telle que le débit volumique soit positif.

♥ Si la vitesse est uniforme sur la section, on a $\mathcal{D}_v = v \times S$.

On peut montrer que le débit volumique de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égal au volume débité par unité de temps :

$$\mathcal{D}_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Si l'écoulement est stationnaire et homogène, c'est-à-dire incompressible, on a μ indépendant du temps et de l'espace. Il vient que $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ et que $\operatorname{div}(\mu \vec{v}) = \mu \times \operatorname{div} \vec{v}$. En régime stationnaire, la divergence du champ des vitesses d'un écoulement homogène est donc nul :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

On en déduit qu'un écoulement incompressible est nécessairement à flux conservatif. Nécessairement, on en déduit que le débit volumique se conserve en régime stationnaire et pour un écoulement homogène : $\mathcal{D}_v^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_v^{\text{sortant}}$.



Exercice résolu

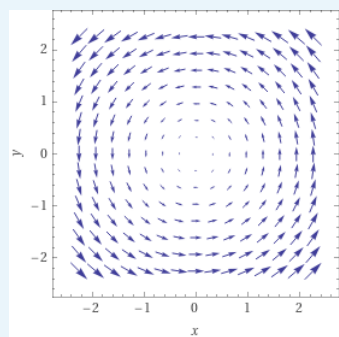
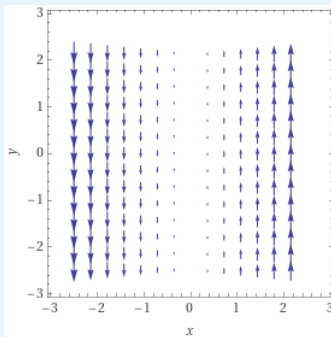
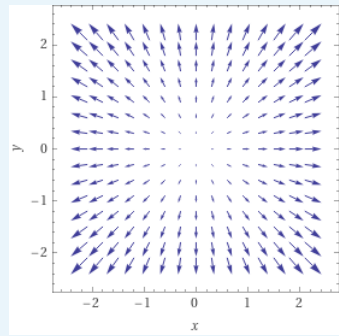
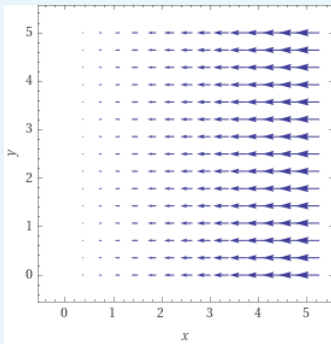
■ À revoir

■ Maîtrisé

Observation de lignes de courant

Énoncé

Déterminer si chacun des écoulements ci-dessous est incompressible ou non.



Résolution

Écoulement en haut à gauche : $\text{div } \vec{A} < 0$ (le flux entrant est toujours supérieur au flux sortant) donc l'écoulement n'est pas incompressible.

Écoulement en haut à droite : $\text{div } \vec{A} > 0$ (le flux sortant est toujours supérieur au flux entrant) donc l'écoulement n'est pas incompressible.

Écoulement en bas à gauche : $\text{div } \vec{A} = 0$ (le flux entrant compense toujours le flux sortant) donc l'écoulement est incompressible.

Écoulement en bas à droite : $\text{div } \vec{A} = 0$ (le flux entrant compense toujours le flux sortant) donc l'écoulement est incompressible.



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

Établissement de l'équation locale de conservation de la masse en régime stationnaire

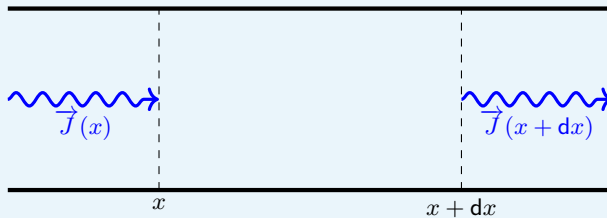
Énoncé

Soit un écoulement de fluide dans une canalisation de section S selon la direction (O, x) . On note $\mu(x, t)$ le champ de masse volumique et $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \cdot \vec{e}_x$ le champ de vitesses.

1. Établir l'équation locale de conservation de la masse $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$ avec $J(x, t) = \mu(x, t)v(x, t)$ la composante du vecteur densité de courant de masse selon (O, x) .
2. Généraliser cette équation dans le cas d'un écoulement tridimensionnel.

Résolution

1. On commence par faire un schéma du problème :



On choisit comme système d'étude le fluide contenu entre les abscisses x et $x + dx$. On note $\delta \mathcal{M}(t) = \mu(x, t) \times S dx$ la masse de fluide à l'intérieur du système à l'instant t .

La masse $\delta \mathcal{M}_e$ entrant dans le système pendant une durée infinitésimale dt est $\delta \mathcal{M}_e = \mathcal{D}_{m,e} dt = J(x, t) S dt$. De même, la masse sortante est $\delta \mathcal{M}_s = J(x + dx, t) S dt$.

La masse se conservant, on sait que la variation temporelle de la masse $\delta \mathcal{M}(t + dt) - \mathcal{M}(t)$ de fluide dans le système ne peut être due qu'aux entrées $\delta \mathcal{M}_e$ et sorties $\delta \mathcal{M}_s$ de fluide à travers le système. En d'autres termes :

$$\delta \mathcal{M}(t + dt) - \mathcal{M}(t) = \delta \mathcal{M}_e - \delta \mathcal{M}_s$$

En réexprimant les grandeurs, il vient que :

$$\mu(x, t + dt) S dx - \mu(x, t) S dx = J(x, t) S dt - J(x + dx, t) S dt$$



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

On peut diviser toute l'équation par S , et la diviser par $dxdt$:

$$\frac{\mu(x, t + dt) - \mu(x, t)}{dt} = - \frac{J(x + dx, t) - J(x, t)}{dx}$$

On observe qu'il s'agit de deux dérivées, la première temporelle et la seconde spatiale, ce qui donne : $\frac{\partial \mu}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x}$, d'où l'équation demandée.

2. Si l'on généralise le problème, le terme $\frac{\partial J}{\partial x}$ se transforme en $\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}$: on reconnaît la divergence $\text{div}(\vec{J})$.

L'équation locale de conservation de la masse devient donc $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}) = 0$.



Exercice résolu

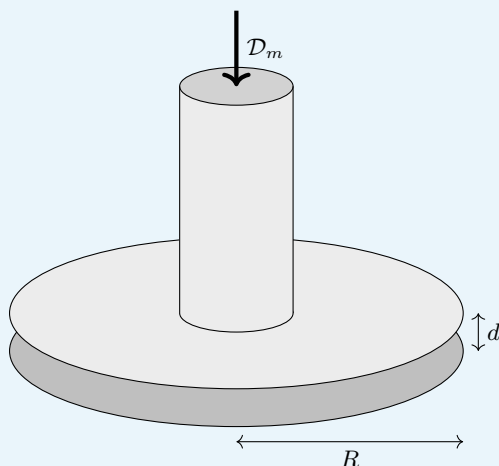
■ À revoir

■ Maîtrisé

Utilisation de la conservation du débit

Énoncé

Soit l'écoulement stationnaire produit par une pompe, imposant un débit d'eau (fluide incompressible) $\mathcal{D}_m = 200 \text{ kg min}^{-1}$ dans une canalisation cylindrique débouchant sur un espace circulaire contenu entre deux disques parallèles de rayon $R = 10 \text{ cm}$ séparés de $d = 1 \text{ cm}$.



Calculer la vitesse avec laquelle l'eau est éjectée en périphérie de la fontaine.

Résolution

Par conservation du débit (écoulement stationnaire d'eau, fluide incompressible), on a $\mathcal{D}_v^{\text{entrée}} = \mathcal{D}_v^{\text{sortie}}$. On peut écrire $\mathcal{D}_v^{\text{entrée}} = \frac{\mathcal{D}_m}{\mu_{\text{eau}}}$ et $\mathcal{D}_v^{\text{sortie}} = v_{\text{sortie}} \times 2\pi R d$, donc $v_{\text{sortie}} = \frac{\mathcal{D}_m}{2\pi \mu_{\text{eau}} R d} = 0,53 \text{ m s}^{-1}$.

3 Énergétique d'un fluide en écoulement

■ À revoir

■ Maîtrisé

1 Énoncé de la relation de Bernoulli

Soit un fluide parfait, incompressible et soumis uniquement à son poids et aux forces de pression. On s'intéresse à son écoulement considéré comme stationnaire. La **relation de Bernoulli** indique que la **charge** $X = p + \mu g z + \frac{1}{2} \mu v^2$ se conserve sur une ligne de courant. En d'autres termes, si A et B sont sur une même ligne de courant, alors :

$$p_A + \mu g z_A + \frac{1}{2} \mu v_A^2 = p_B + \mu g z_B + \frac{1}{2} \mu v_B^2$$

2 Relation de Bernoulli généralisée

Soit un fluide incompressible et soumis à son poids et aux forces de pression. On s'intéresse à son écoulement considéré comme stationnaire. Le fluide reçoit une puissance utile $\mathcal{P}_u$ de la part de l'extérieur. Si A et B sont sur une même ligne de courant, avec A en amont et B en aval, alors :

$$p_B + \mu g z_B + \frac{1}{2} \mu v_B^2 = p_A + \mu g z_A + \frac{1}{2} \mu v_A^2 + \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{D}_v}$$

♥ Dans le cas d'une pompe, on a $\mathcal{P}_{\text{méca}} > 0$.

♥ Dans le cas d'une perte de charge singulière (changement de forme ou d'orientation de l'écoulement) ou d'une perte de charge régulière (effets de viscosité du fluide), on a $\mathcal{P}_{\text{méca}} < 0$.



Exercice résolu

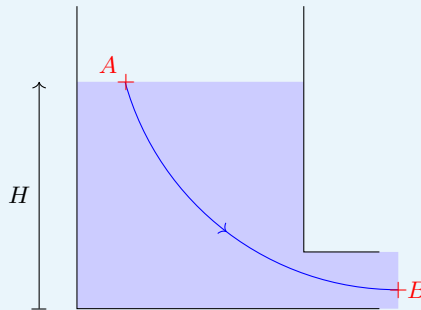
■ À revoir

■ Maîtrisé

Vidange de Torricelli

Énoncé

Soit une cuve cylindrique de section S remplie d'un fluide de masse volumique μ . Un tuyau de section $s \ll S$ permet de faire la vidange de la cuve. On note H la hauteur d'eau, A un point de la surface libre et B un point du tuyau en contact avec l'extérieur, tels que A et B font partie d'une même ligne de courant.



Déterminer la vitesse de l'écoulement en B .

Résolution

L'eau étant un fluide incompressible, on a conservation du débit : $Sv_A = sv_B$, d'où $\frac{v_B}{v_A} = \frac{s}{S}$.

Or $s \ll S$, donc $\frac{s}{S} \ll 1$, $v_B \ll v_A$.

Il vient nécessairement que l'on peut considérer que $H \approx \text{cste}$.

Par ailleurs, on a $p_A = p_{\text{atm}}$ et $p_B \approx p_{\text{atm}}$ car la section en B est suffisamment faible pour considérer que l'on est quasiment à l'air libre.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre A et B , on a donc $p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\mu v_A^2 + \mu gH = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\mu v_B^2 + \mu g \times 0$, donc $\frac{1}{2}\mu(v_B^2 - v_A^2) = -\mu gH$. Or $v_A \ll v_B$, donc on peut écrire que $v_B^2 - v_A^2 \approx v_B^2$: $\frac{1}{2}v_B^2 \approx gH$.

Il vient alors que $v_B \approx \sqrt{2gH}$.



Dimensionnement d'une pompe

Énoncé

Supposons que l'on veuille dimensionner une pompe pour qu'elle élève de l'eau d'une hauteur $H = 10 \text{ m}$ à un débit volumique $\mathcal{D}_v = 20 \text{ L min}^{-1}$. Le conduit de transport a une section constante. Déterminer la puissance $\mathcal{P}_{\text{alim}}$ à apporter à la pompe pour qu'elle fonctionne en respectant ce cahier des charges, sachant qu'elle possède un rendement $\eta = 55 \%$.

Résolution

Notons B un point juste après la pompe et A un point juste avant la pompe.

On souhaite que la pompe élève l'eau en gardant un débit volumique constant. Puisque la section de la conduite est constante, on a donc $v_A = v_B$.

De plus, l'écoulement n'a lieu que si la pression en amont de la pompe est supérieure à celle en aval. On se place dans le cas limite où la pompe suffit tout juste à élever l'eau sans variation de pression sensible entre A et B : $p_B \approx p_A$.

Il vient donc que $\mu g H = \mu g \times 0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{D}_v}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{\text{méca}} = \mu g H \mathcal{D}_v = 1 \times 10^3 \times 10 \times 10 \times 3,3 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 33 \text{ W}$.

La puissance d'alimentation doit alors être $\mathcal{P}_{\text{alim}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\eta} = 60 \text{ W}$.