Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 5 : Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

Travaux dirigés

Exercice faisant uniquement appel à des outils mathématiques
Exercice facile et/ou proche du cours
Exercice accessible mais demandant du recul sur le cours et/ou sur les outils mathématiques
Exercice complexe, de par son côté calculatoire et/ou astucieux

Il est normal de « bloquer » sur les **exercices** : personne ne s'attend à ce que vous sachiez les faire en cinq minutes seulement. Il faut cependant persévérer, avoir le cours à côté afin de voir si un raisonnement similaire a déjà été abordé, et ne pas hésiter à parler avec vos camarades ou votre professeur.

Les **problèmes** sont issus d'annales de concours et/ou d'examens. Ils sont au moins aussi importants à aborder que les exercices, car ils sont les plus proches (en terme de rédaction et de questions « bout-à-bout ») de ce que vous aurez en devoir surveillé ainsi qu'au concours.

Chapitre 1 : Dipôles en régime sinusoïdal forcé

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Passer de la représentation complexe d'un signal au signal réel et réciproquement.	1.2, 1.3, 1.5
Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.	1.4, 1.5

Questions de cours

- ☐ Soit le signal réel $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$. Donner l'expression du signal complexe $\underline{u}(t)$; expliciter notamment son amplitude complexe $\underline{U}$.
- ☐ Démontrer que dériver un signal réel correspond à multiplier le signal complexe correspondant par $j\omega$.
- ☐ Déterminer la solution de $5\dot{u} + \dfrac{1}{\tau}u = 3\cos(\omega t)$ en régime permanent.
- ☐ Rappeler la loi d'Ohm complexe. Donner les impédances complexes d'un résistor, d'un condensateur, d'une bobine.
- ☐ Rappeler les lois pour les associations série et parallèle de plusieurs imépdances complexes.

Exercices

1.1 Maniement des complexes

1. Déterminer les modules des nombres complexes suivants : $A = 1 + 4j$; $B = \dfrac{2-j}{j}$; $C = \dfrac{3+3j}{-1+j}$; $D = 2e^{2j+5}$; $E = e^{2j\pi/3}$.
2. Déterminer les arguments des nombres suivants : $A = 1 + j$; $B = -3$; $C = \dfrac{-1+j}{2}$; $D = \sqrt{2}j$; $E = e^{10j\pi}$.

1.2 Passage entre représentation réelle et représentation complexe

Donner l'amplitude complexe ou le signal réel dans les cas suivants, en supposant le régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

Exemple : $x(t) = X_0\cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{X_0} = X_0 e^{j\varphi}$.

- $u(t) = U\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$
- $i(t) = I\cos(\omega t - \psi)$
- $s(t) = S_m \sin(\omega t)$
- $\underline{U_L} = U_m\ e^{-j\pi/3}$
- $\underline{I_1} = -\dfrac{jU_0}{R}$
- $\underline{I} = -I_m e^{j\pi/6}$

1.3 Circuit RC série en régime forcé

L'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC série s'écrit :

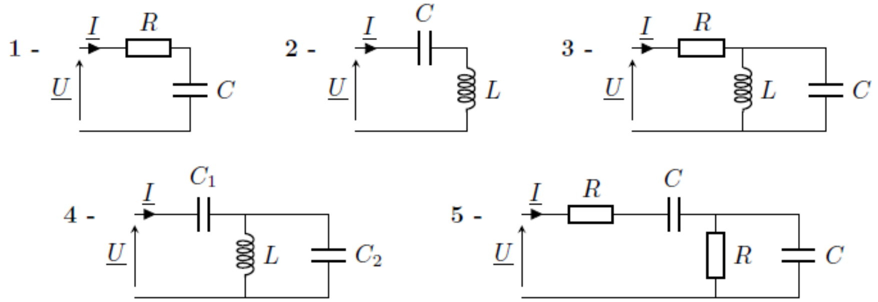
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}e(t)$$

Ici, on se situe en régime forcé : $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. On cherche une solution particulière sous la forme $u(t) = U_0\cos(\omega t + \varphi)$.

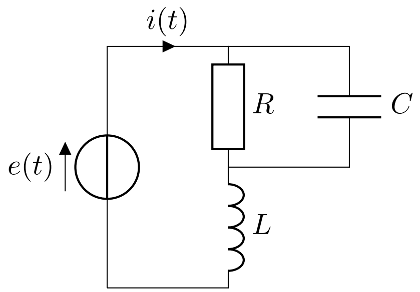
1. Que valent $\underline{U}$ et $\underline{E}$, amplitudes complexes des signaux réels $u(t)$ et $e(t)$?
2. Écrire l'équation différentielle en termes de $\underline{U}$ et E_0.
3. Résoudre cette équation pour déterminer $\underline{U}$.
4. En déduire l'expression de U_0 et de φ.
5. On rappelle que la relation intensité-tension pour un condensateur est : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Déduire des questions précédentes l'amplitude complexe $\underline{I}$ de l'intensité puis son amplitude réelle I_0.

1.4 Détermination d'impédances équivalentes

Déterminer l'impédance complexe des dipôles ci-dessous. Écrire les résultats sous forme d'une unique fraction.



1.5 Détermination d'une équation différentielle



Le circuit est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal établi.

1. Déterminer l'impédance équivalente $\underline{Z}$ de l'association (R, L, C).
2. Donner le lien entre $\underline{e}(t)$, $\underline{Z}$ et $\underline{i}(t)$.
3. Déduire des deux dernières questions l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

Chapitre 2 : Puissance et énergie en régime sinusoïdal forcé

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Établir et exploiter l'expression de la puissance moyenne reçue par un dipôle en fonction de la tension efficace, de l'intensité efficace et du facteur de puissance. Relier le facteur de puissance à l'impédance complexe.	2.1, 2.2, 2.3

Questions de cours

- ☐ Soit un signal $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$. Donner sa valeur moyenne et sa valeur efficace.
- ☐ Rappeler le lien entre la puissance électrique moyenne reçue par un dipôle, sa tension efficace, son courant efficace et son facteur de puissance. Quelle est l'unité du facteur de puissance ?
- ☐ Déterminer le facteur de puissance d'une association série $(R = 30\,\Omega, L = 1\,\mathrm{H})$ alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$.
- ☐ Justifier l'emploi de lignes à haute tension pour le transport d'énergie électrique.
- ☐ Expliquer l'influence du facteur de puissance d'une installation sur les pertes d'énergie par effet Joule dans les lignes de transport.

Exercices

2.1 Circuit capacitif

On étudie un circuit $(R = 150\,\Omega, C = 22\,\mu\mathrm{F})$ série, alimenté en régime sinusoïdal établi par une source idéale de fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$ de tension efficace $U_{\mathsf{eff}} = 230\,\mathrm{V}$. Le courant circulant dans le circuit a une intensité efficace $I_{\mathsf{eff}} = 1{,}1\,\mathrm{A}$.

1. Déterminer l'impédance complexe de la charge (R, C).
2. En déduire que le déphasage φ vérifie $\tan(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi f RC}$.
3. Calculer φ en radians puis en degrés.
4. Quelle est la puissance active délivrée par le générateur ?

2.2 Amélioration du facteur de puissance

Une installation inductive d'impédance $\underline{Z} = R + jL\omega$ alimentée par un courant de fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$ consomme la puissance $\mathcal{P} = 60\,\mathrm{kW}$ sous une tension efficace $U_{\mathsf{eff}} = 5{,}0\,\mathrm{kV}$ avec une intensité efficace $I_{\mathsf{eff}} = 20\,\mathrm{A}$.

1. Calculer le facteur de puissance. En déduire la valeur de φ.
2. Déterminer la relation entre φ, R, L et ω.
3. Déterminer la relation entre U_{eff}, I_{eff}, R, L et ω.
4. Déduire des questions précédentes les valeurs de R et L.
5. On place un condensateur en dérivation aux bornes de l'installation pour que le courant fourni soit en phase avec la tension. Quelle doit être la capacité C du condensateur ?
6. Quelle est alors l'intensité efficace du courant d'alimentation ?
7. Avait-on besoin de connaître les valeurs de R et L pour déterminer celle de C ?

2.3 Facteur de puissance d'un atelier

Un atelier branché sur un réseau délivrant $227\,\mathrm{V}$ efficaces à $f = 50\,\mathrm{Hz}$ comporte :

— un moteur de $3{,}68\,\mathrm{kW}$, $\cos(\varphi_1) = 0{,}740$;

— un moteur de $7{,}36\,\mathrm{kW}$, $\cos(\varphi_2) = 0{,}760$;

— vingt lampes résistives de $50\,\mathrm{W}$.

1. Que valent les facteurs de puissance des lampes ?
2. Les différents composants sont-ils en série ou en dérivation de la source de tension ? Que peut-on alors dire de la tension efficace de chacun d'entre eux ?
3. Exprimer les intensités efficaces complexes de chacun des composants, puis l'intensité efficace complexe du courant entrant dans l'installation.
4. Calculer l'intensité efficace réelle du courant entrant dans l'installation. En déduire le facteur de puissance $\cos(\varphi_{\text{at}})$ de l'atelier.

Chapitre 3 : Résonance d'un circuit électrique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Établir l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance, de la bobine ou du condensateur en fonction de la fréquence en utilisant la notion d'impédance complexe.	devoir préparé
Tracer la courbe donnant l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance en fonction de la fréquence.	devoir préparé
Relier l'amplitude et la largeur (à $1/\sqrt{2}$) du pic de résonance en courant au facteur de qualité et à la pulsation propre du circuit.	devoir préparé

Questions de cours

- ☐ Soit un circuit RLC série alimenté par une source idéale de tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Établir, en régime sinusoïdal établi, l'expression de l'amplitude réelle de la tension aux bornes du résistor en fonction de E, R, L, C et ω.
- ☐ Soit un circuit RLC série alimenté par une source idéale de tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Établir, en régime sinusoïdal établi, l'expression de l'amplitude réelle de la tension aux bornes de la bobine en fonction de E, R, L, C et ω.
- ☐ Soit un circuit RLC série alimenté par une source idéale de tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Établir, en régime sinusoïdal établi, l'expression de l'amplitude réelle de la tension aux bornes du condensateur en fonction de E, R, L, C et ω.
- ☐ On donne l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes du résistor d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal établi : $U_R(\omega) = \dfrac{E}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$. Tracer la courbe de $U_R(\omega)$ en la justifiant.
- ☐ On donne l'expression de l'amplitude du courant circulant dans un circuit RLC série en régime sinusoïdal établi : $I(\omega) = \dfrac{I_{\text{max}}}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$.

  Quelle est l'amplitude du pic de résonance en courant ? À quelle pulsation a-t-elle lieu ? En quoi le facteur de qualité du circuit influe-t-il sur la largeur du pic de résonance en courant ?

Problème

Voir devoir préparé (BCPST 2009).