Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 5 : Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

Cours

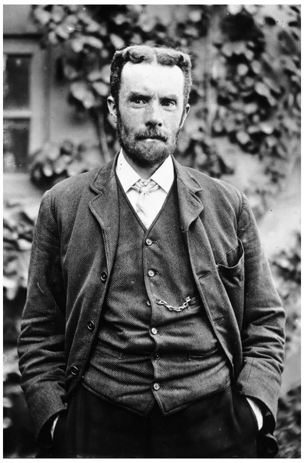


Figure 1 – Physicien et autodidacte britannique, Oliver Heaviside (1850–1925) introduit l'impédance comme généralisation de la résistance aux circuits en régime variable. Il formalise l'analyse des circuits avec des opérateurs (notamment en Laplace) et contribue à la compréhension des phénomènes de transmission électrique. Sa pensée marque la transition entre la physique théorique et l'électrotechnique.

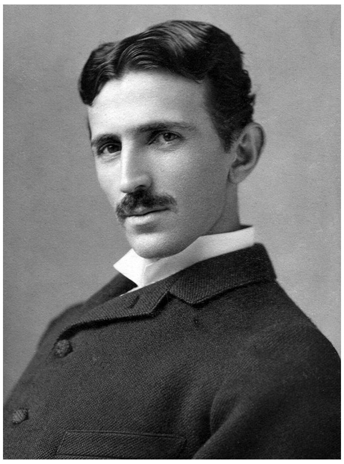


FIGURE 2 – Inventeur et ingénieur serbo-américain, Nikola Tesla (1856–1943) est un pionnier du courant alternatif. Il conçoit des systèmes de transport d'énergie électrique à grande distance, à haute tension et fréquence. Même s'il est plus connu pour ses inventions que pour la théorie, il incarne l'impact pratique de la résonance et de l'usage du courant sinusoïdal.

FIGURE 3 – Ingénieur et mathématicien américain d'origine allemande, Charles Proteus Steinmetz (1865–1923) est célèbre pour avoir popularisé l'usage des nombres complexes dans l'étude des circuits en régime sinusoïdal. Son approche simplifie grandement le calcul des impédances, des déphasages et des puissances dans les réseaux alternatifs. Il a joué un rôle clé dans le développement de la distribution d'électricité à grande échelle.

Table des matières

Chapitre 1 : Dipôles en régime sinusoïdal forcé

Objectifs :

— Passer de la représentation complexe d'un signal au signal réel et réciproquement.

— Établir l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.

— Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.

1.1 Régime sinusoïdal forcé

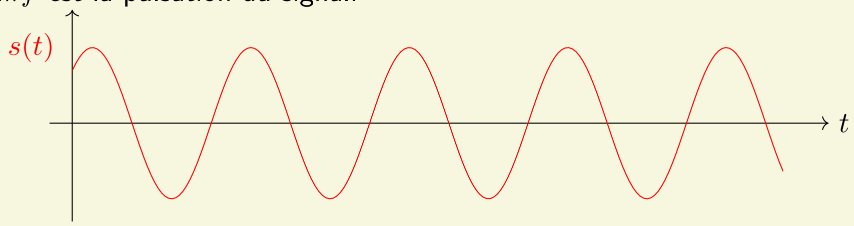
1.1.1 Décomposition d'un signal

Signal pur

Un signal périodique est **pur** s'il peut être mis sous forme sinusoïdale :

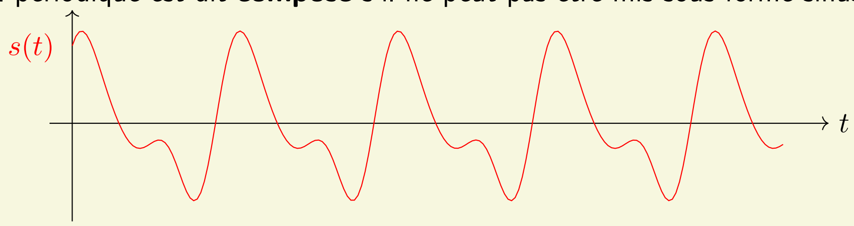
$$s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation du signal.



Signal composé

Un signal périodique est dit **composé** s'il ne peut pas être mis sous forme sinusoïdale.



Une des découvertes majeures de Joseph Fourier (1738–1830), mathématicien et physicien français, a consisté à comprendre qu'un son périodique de fréquence f peut en fait se « décomposer » en une somme de sons purs de fréquences respectives f, $2 \times f$, $3 \times f$, etc. C'est ce que l'on appelle l'analyse de Fourier, qui a ouvert tout un pan des mathématiques, et a permis à Fourier de résoudre des problèmes sur le transport de la chaleur.

Par exemple, on peut analyser mathématiquement le signal composé précédent, et s'apercevoir qu'il s'agit en fait d'une somme de trois signaux purs (figure ??).

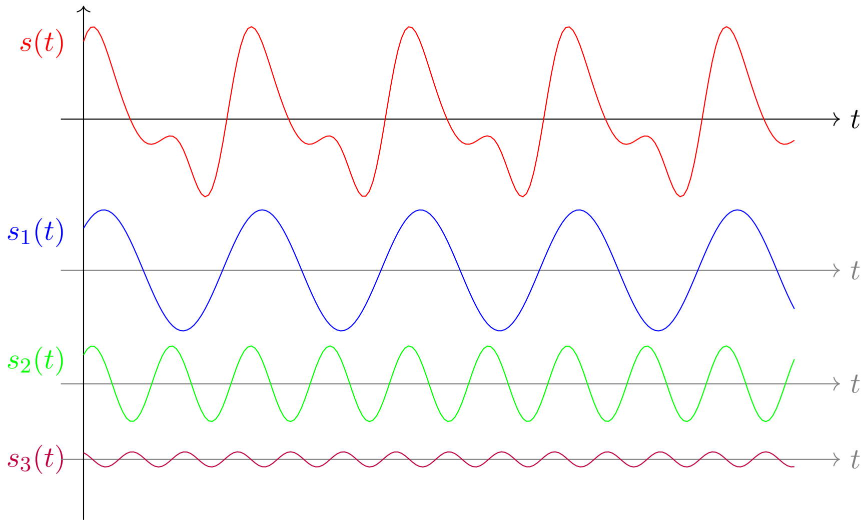


FIGURE 1.1 – Décomposition du signal $s(t)$ en somme de signaux sinusoïdaux.

Dans la figure ??, on a donc $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$ avec chaque $s_n(t)$ de la forme $s_n(t) = S_n \cos(n \times \omega t + \varphi_n)$, où ω est la pulsation de $s(t)$.

Décomposition en série de Fourier

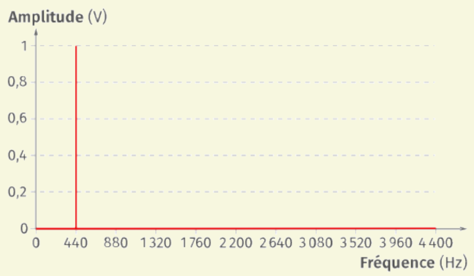
Soit un signal périodique $s(t)$ de pulsation ω. On peut décomposer ce signal en une somme, potentiellement infinie, de signaux sinusoïdaux :

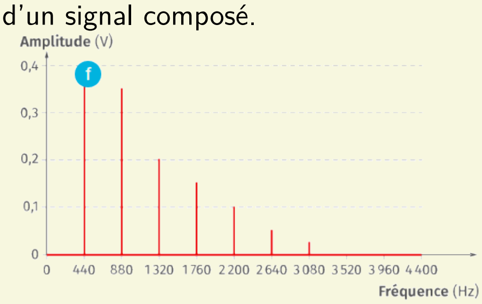
$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

où S_0 est la **valeur moyenne** de $s(t)$. Cette décomposition se nomme **décomposition en série de Fourier**, et la suite des (S_n) est la suite des **coefficients de Fourier** du signal $s(t)$.

Spectre de Fourier, fondamental et harmoniques

Le **spectre** d'un signal périodique est la représentation graphique des différentes fréquences le constituant. Un trait vertical correspond à la présence d'une fréquence donnée par l'abscisse ; la longueur de ce trait correspond à l'amplitude de cette fréquence.
La raie présente à la pulsation ω du signal correspond au **fondamental** ; les autres raies sont appelées **harmoniques** (la n-ième raie est l'harmonique de rang n).
Ci-dessous sont les spectres d'un signal pur et d'un signal composé.





L'intérêt de pouvoir décomposer un signal périodique composé en signaux sinusoïdaux est de pouvoir simplifier l'étude du signal composé. En effet, si l'on sait comment réagit un système à une excitation sinusoïdale d'amplitude A et de pulsation ω, il suffira d'additionner les réponses pour chacune des excitations afin d'obtenir la réponse totale du système.

Si l'on pousse les mathématiques un peu plus loin, on peut démontrer que quasiment tous les signaux physiques peuvent se décomposer en sinusoïdes, qu'ils soient périodiques ou non.

Par exemple, une impulsion (voir figure ??) possède un spectre ; celui-ci est juste continu, à l'inverse du spectre de raies d'un signal périodique. La somme se transforme alors en :

$$s(t) = \int_0^{\infty} S(\omega)\cos(\omega t + \varphi_\omega)\mathrm{d}\omega$$

où $S(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal $s(t)$.

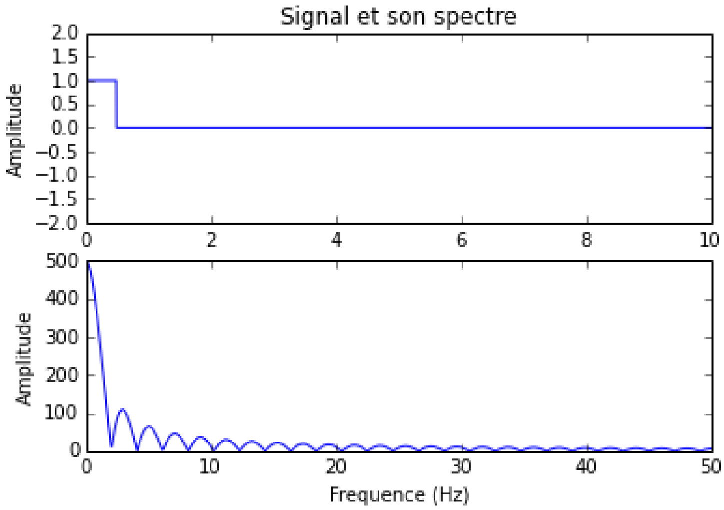


FIGURE 1.2 – Spectre d'une impulsion.

Ainsi, la décomposition d'une excitation en sinusoïdes permet toujours de revenir à la réponse totale du système, en sommant tout simplement les réponses pour chacune des fréquences concernées.

1.1.2 Étude d'un système en régime sinusoïdal établi

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des systèmes mécaniques et électriques dont l'excitation extérieure [1] était constante (par exemple, le poids P ou une force électromotrice E).

Ainsi, la grandeur de sortie $s(t)$ du système (typiquement, la position $x(t)$ en mécanique ou la tension $u(t)$ d'un dipôle en électrocinétique) finissait par devenir constante : on avait toujours $s(t) = s_\infty + s_{\text{transitoire}}(t)$ avec $s_{\text{transitoire}}(t)$ qui finissait par tendre vers 0. En résumé : une excitation extérieure constante impliquait une réaction qui devenait, au bout d'un certain temps, constante également.

Or, il existe des systèmes physiques étant soumis à une excitation périodique : vibration des cordes vocales à une pulsation Ω donnée, mouvement d'une éolienne, GBF envoyant un signal sinusoïdal ou créneaux...

Cette excitation extérieure périodique $e(t)$ peut être décomposée, par le théorème de Fourier, en une multitude de signaux sinusoïdaux $e_1(t) = E_1\cos(\Omega t + \phi_1)$, $e_2(t) = E_2\cos(2\Omega t + \phi_2)$, et ainsi de suite. Lorsque l'équation régissant le mouvement d'un système est linéaire [2], on peut alors s'intéresser à chacune des harmoniques $e_n(t)$, déterminer la solution $s_n(t)$ associée, puis retrouver la solution totale $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t)$.

Le **régime sinusoïdal forcé** correspond alors au cas où l'excitation mécanique extérieure impose une périodicité sinusoïdale au système : $E(t) = E_0\cos(\omega t)$.

Tout comme les études précédentes, l'évolution des grandeurs mécaniques et électriques se fait en deux étapes : un régime transitoire, qui disparaît au bout d'un temps caractéristique Δt, et un régime permanent.

1. C'est-à-dire l'action mécanique extérieure à l'origine du mouvement ou la tension d'alimentation du générateur.
2. C'est-à-dire ne faisant intervenir que des grandeurs du type $s(t)$, $\dot{s}(t)$, $\ddot{s}(t)$, et pas de $\sqrt{s(t)}$ ou $\exp(\dot{s}(t))$ par exemple.

Dans cette partie, nous allons négliger toute étude du régime transitoire, et uniquement nous intéresser à la solution particulière que constitue le régime permanent : c'est ce que l'on appelle le **régime sinusoïdal établi**.

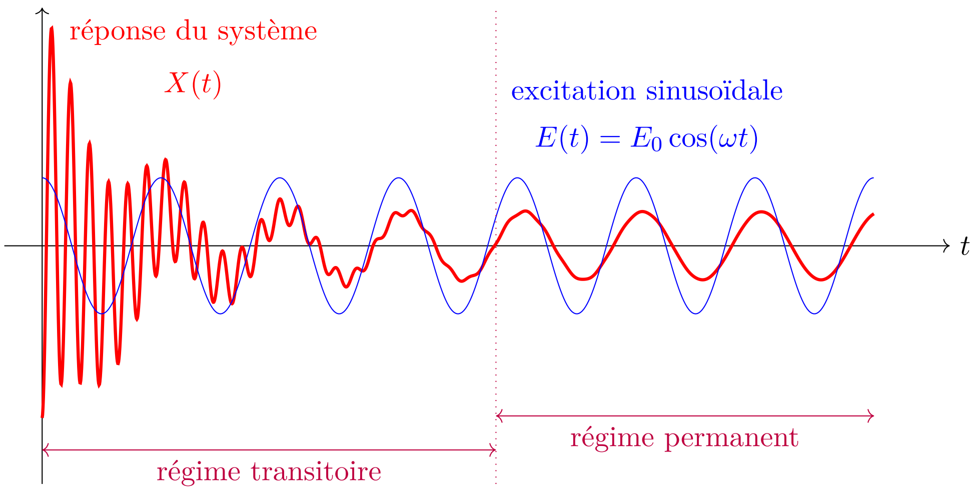


FIGURE 1.3 – Régime transitoire et régime permanent en régime sinusoïdal forcé. On observe que la réponse du système possède la même fréquence que l'excitation extérieure, en régime permanent, mais pas forcément la même amplitude, et elle peut également avoir un retard.

Puisque l'excitation est sinusoïdale, on aura une réponse sinusoïdale pour $s(t)$ en régime permanent. En particulier, $s(t)$ oscillera à la même pulsation que l'excitation. On écrit alors $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$ avec S et φ deux inconnues à déterminer.

1.2 Notation complexe

1.2.1 Définition

En régime sinusoïdal établi, toutes les grandeurs sont de la forme $f(t) = F\cos(\omega t + \varphi)$, où ω est la pulsation imposée par le générateur.

Représentation complexe d'un signal

On associe à un signal réel $f(t) = F\cos(\omega t + \varphi)$ excité à la pulsation ω une grandeur complexe $\underline{f}(t)$, définie par :

$$\underline{f}(t) = F\ e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On peut passer de l'écriture complexe à l'écriture réelle par la formule $f(t) = \mathrm{Re}(\underline{f}(t))$.

Pour simplifier davantage l'écriture, on utilise la propriété $e^{a+b} = e^a e^b$ qui nous permet d'écrire :

$$\underline{f}(t) = \underline{F}\ e^{j\omega t}$$

avec $\underline{F} = Fe^{j\varphi}$.

F est l'**amplitude réelle** du signal, φ sa **phase** et $\underline{F}$ son **amplitude complexe**.

Question 1 : Exprimer F et φ en fonction de $\underline{F}$ et d'opérateurs agissant sur les nombres complexes.

Module et argument d'un signal complexe

Soit un signal réel $f(t) = F\cos(\omega t + \varphi)$ auquel on associe un signal complexe $\underline{f}(t) = Fe^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{F}e^{j\omega t}$. On a alors :

$$F = |\underline{F}| \qquad \text{et} \qquad \varphi = \arg(\underline{F})$$

Question 2 : Donner une expression de $\frac{\mathrm{d}\underline{f}}{\mathrm{d}t}(t)$ en fonction de ω et $\underline{f}(t)$. De même, donner une expression de $\int \underline{f}(t)dt$ en fonction de ω et $\underline{f}(t)$.

Opérations sur les grandeurs complexes

- Dériver n fois un signal $f(t)$ correspond à le multiplier par $(j\omega)^n$. En particulier :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} j\omega \times \underline{f}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} (j\omega)^2 \times \underline{f}(t) = -\omega^2 \underline{f}(t)$$

- Intégrer n fois un signal $f(t)$ correspond à le diviser par $(j\omega)^n$. En particulier :

$$\int f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{\mathbb{C}} \frac{\underline{f}(t)}{j\omega}$$

Question 3 : Quel lien peut-on faire avec la transformée de Laplace ?

1.2.2 Utilité de la notation complexe

Prenons un circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$ (voir figure ??). On choisit la fréquence et l'amplitude du signal délivré par le GBF, et les composants R, L et C sont totalement connus.

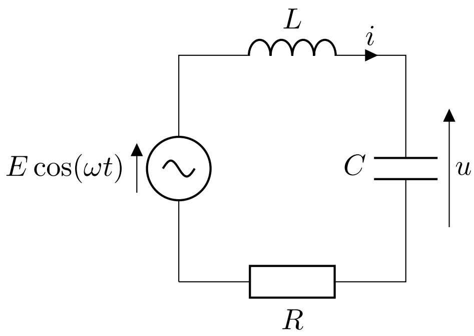


FIGURE 1.4 – Circuit RLC pour $t \geq 0$.

L'équation différentielle régissant $u(t)$ est : $LC\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}(t) + RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + u(t) = E\cos(\omega t)$, que l'on met sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 E\cos(\omega t)$$

On cherche les solutions de cette équation en régime permanent ; on note alors $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$ avec U l'amplitude réelle de la tension aux bornes du condensateur et φ le déphasage entre l'entrée (la source de tension) et la sortie (le condensateur).

En notation complexe, les signaux électriques peuvent donc s'écrire $\underline{s}(t) = \underline{S}e^{j\omega t}$ avec $\underline{S} = Se^{j\varphi}$.

Question 4 : Mettre sous forme complexe les signaux $u(t)$ et $e(t)$.

Question 5 : Quelles sont les inconnues du problème ?

Question 6 : Montrer que l'équation différentielle peut désormais s'écrire $\left[-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right]\underline{U} = E$.

Question 7 : Isoler $\underline{U}$, puis en déduire (sans mener totalement le calcul) les expressions de U et φ.

1.3 Impédance complexe

1.3.1 Impédances de dipôles simples

Intéressons-nous à ce que deviennent les lois intensité-tension pour les différents dipôles étudiés plus tôt dans l'année. On se place en convention récepteur, avec $u(t)$ la tension aux bornes du dipôle et $i(t)$ l'intensité du courant le traversant.

La tension complexe sera donc notée $\underline{u}(t) = U\ e^{j\varphi_u}\ e^{j\omega t}$ et l'intensité complexe sera notée $\underline{i}(t) = I\ e^{j\varphi_i}\ e^{j\omega t}$.

Question 8 : Rappeler la loi intensité-tension pour une résistance R. Que devient-elle pour les grandeurs complexes ? Quel est le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ entre l'intensité et la tension complexes ?

Question 9 : Mêmes questions pour une bobine d'inductance L.

Question 10 : Mêmes questions pour un condensateur de capacité C.

Impédances complexes et loi d'Ohm complexe

On appelle **impédance** (complexe) $\underline{Z}$ d'un dipôle la constante de proportionnalité entre la tension complexe $\underline{u}$ aux bornes de ce dipôle et l'intensité complexe $\underline{i}$ traversant ce dipôle, en convention récepteur :

$$\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$$

Cette relation est la **loi d'Ohm complexe**.

— Pour une résistance R, l'impédance complexe est réelle et vaut $\underline{Z}_R = R$. Il n'y a pas de déphasage entre u et i ;

— Pour une inductance L, l'impédance complexe est imaginaire pure et vaut $\underline{Z}_L = jL\omega$. Il y a un déphasage de $\pi/2$ entre u et i : la tension a un retard sur le courant d'un quart de période ;

— Pour une capacité C, l'impédance complexe est imaginaire pure et vaut $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$. Il y a un déphasage de $-\pi/2$ entre u et i : la tension a une avance sur le courant d'un quart de période.

Question 11 : À basses fréquences ($\omega \to 0$), quel est le comportement d'une bobine ? D'un condensateur ? Est-ce cohérent ?

Question 12 : À hautes fréquences ($\omega \to +\infty$), quel est le comportement d'une bobine ? D'un condensateur ?

Comportements asymptotiques pour les bobines et condensateurs

À basses fréquences ($\omega \to 0$), une bobine se comporte comme un fil et un condensateur comme un interrupteur ouvert.
À hautes fréquences ($\omega \to +\infty$), une bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et un condensateur comme un fil.

1.3.2 Association d'impédances

La relation $\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}$ étant analogue à la loi d'Ohm, on en déduit que les lois d'associations d'impédances sont équivalentes à celles valables pour les résistors.

Impédances en série

Deux impédances $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en série sont équivalentes une impédance $\underline{Z_{\text{éq}}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$.
En généralisant, n impédances $\underline{Z_1}$, ..., $\underline{Z_n}$ en série sont équivalentes à une impédance :

$$\underline{Z_{\text{éq}}} = \underline{Z_1} + ... + \underline{Z_n} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z_k}$$

Impédances en dérivation

Deux impédances $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en dérivation sont équivalentes à une impédance $\underline{Z_{\text{éq}}}$ telle que $\dfrac{1}{\underline{Z_{\text{éq}}}} = \dfrac{1}{\underline{Z_1}} + \dfrac{1}{\underline{Z_2}}$.
En généralisant, n impédances $\underline{Z_1}$, ..., $\underline{Z_n}$ en dérivation sont équivalentes à une impédance $\underline{Z_{\text{éq}}}$ telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z_{\text{éq}}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + ... + \frac{1}{\underline{Z_n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z_k}}$$

Question 13 : Montrer que l'on retrouve les relations usuelles pour un résistor et une bobine.

Question 14 : Montrer que l'on retrouve les relations usuelles pour un condensateur.

Question 15 : Déterminer l'impédance $\underline{Z_{RLC}}$ d'une association (R, L, C) série.

Question 16 : On suppose que l'impédance $\underline{Z_{RLC}}$ est alimentée par une source réelle de tension sinusoïdale $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$. En appliquant la loi des mailles puis la relation intensité-tension complexe pour le condensateur, déterminer une relation « simple » entre la tension $\underline{u}$ aux bornes du condensateur et $\underline{e}$.

Question 17 : En revenant au domaine réel, montrer que l'on retrouve l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$.

Complément : pourquoi la notation complexe fonctionne-t-elle ?

Comment justifier rigoureusement le fait qu'une équation du type :

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t)+\omega_0^2F(t)=\omega_0^2E\cos(\omega t)$$

puisse se « transformer » en :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{F}}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\underline{F}}{\mathrm{d}t}(t)+\omega_0^2\underline{F}=\omega_0^2Ee^{j\omega t}$$

avec $F(t)=F_0\cos(\omega t+\varphi)$ et $\underline{F}(t)=F_0e^{j(\omega t+\varphi)}$? En d'autres termes, comment justifier que l'équation différentielle complexe est tout aussi valable que l'équation différentielle réelle ?

Notons $\underline{F}^*(t)=F_0e^{-j(\omega t+\varphi)}$ le complexe conjugué de $\underline{F}(t)$. On a donc $F(t)=\dfrac{\underline{F}(t)+\underline{F}^*(t)}{2}$ et $E\cos(\omega t)=E\dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$. Ainsi, l'équation différentielle de départ peut se réécrire, en multipliant par 2 :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{F}}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\mathrm{d}^2\underline{F}^*}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\left[\frac{\mathrm{d}\underline{F}}{\mathrm{d}t}(t)+\frac{\mathrm{d}\underline{F}^*}{\mathrm{d}t}(t)\right]+\omega_0^2\left[\underline{F}(t)+\underline{F}^*(t)\right]=\omega_0^2E\left[e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right]$$

Or $\underline{F}(t)=F_0e^{j\varphi}e^{j\omega t}=\underline{F_0}e^{j\omega t}$ et $\underline{F}^*(t)=F_0e^{-j\varphi}e^{-j\omega t}=\underline{F_0}^*e^{-j\omega t}$. Une propriété mathématique[3] permet alors de dire que si l'on a $a_1e^{j\omega t}+a_2e^{-j\omega t}=b_1e^{j\omega t}+b_2e^{-j\omega t}$, alors $a_1=b_1$ et $a_2=b_2$. Nécessairement, on en déduit les deux équations suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{F}}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\underline{F}}{\mathrm{d}t}(t)+\omega_0^2\underline{F}(t)=\omega_0^2Ee^{j\omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{F}^*}{\mathrm{d}t^2}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\underline{F}^*}{\mathrm{d}t}(t)+\omega_0^2\underline{F}^*(t)=\omega_0^2Ee^{-j\omega t}$$

Ces deux équations reflètent en réalité la même chose : si l'on applique la transformation « complexe conjugué » à la deuxième équation, on retombe en fait sur la première. Ainsi, l'équation différentielle réelle implique nécessairement l'équation différentielle complexe : **ED**$_\mathbb{R}\Rightarrow$ **ED**$_\mathbb{C}$.

Par ailleurs, on peut prendre la partie réelle de l'équation différentielle complexe, qui redonne l'équation différentielle réelle : **ED**$_\mathbb{C}\Rightarrow$ **ED**$_\mathbb{R}$.

On a finalement l'équivalence entre les deux équations différentielles : **ED**$_\mathbb{R}\Leftrightarrow$ **ED**$_\mathbb{C}$.

Outils mathématiques

$$\left|\frac{\underline{a}\times\underline{b}}{\underline{c}}\right|=\frac{|\underline{a}|\times|\underline{b}|}{|\underline{c}|}$$

$$\arg\left(\frac{\underline{a}\times\underline{b}}{\underline{c}}\right)=\arg\underline{a}+\arg\underline{b}-\arg\underline{c}$$

$$\arg(x+iy)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\text{ si }x>0$$

$$\arg(x+iy)=\pi+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\text{ si }x<0$$

3. Il s'agit, rigoureusement, du fait que les fonctions $t\mapsto e^{j\omega t}$ et $t\mapsto e^{-j\omega t}$ forment une famille libre : vous verrez cette propriété plus tard dans l'année en mathématiques.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit le signal réel $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$. Donner l'expression du signal complexe $\underline{u}(t)$; expliciter notamment son amplitude complexe $\underline{U}$.
- ☐ Démontrer que dériver un signal réel correspond à multiplier le signal complexe correspondant par $j\omega$.
- ☐ Déterminer la solution de $5\dot{u} + \dfrac{1}{\tau}u = 3\cos(\omega t)$ en régime permanent.
- ☐ Rappeler la loi d'Ohm complexe. Donner les impédances complexes d'un résistor, d'un condensateur, d'une bobine.
- ☐ Rappeler les lois pour les associations série et parallèle de plusieurs imépdances complexes.

Chapitre 2 : Puissance et énergie en régime sinusoïdal forcé

Objectifs :

— Établir et exploiter l'expression de la puissance moyenne reçue par un dipôle en fonction de la tension efficace, de l'intensité efficace et du facteur de puissance.

— Relier le facteur de puissance à l'impédance complexe.

— Justifier l'emploi de lignes à haute tension pour le transport d'énergie électrique.

— Analyser l'influence du facteur de puissance d'une installation sur les pertes d'énergie par effet Joule dans les lignes de transport.

2.1 Valeur efficace

Valeur moyenne d'un signal périodique

Soit un signal périodique $s(t)$ de période T. La **valeur moyenne** $\langle s \rangle$ de ce signal se calcule à partir de son intégrale :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t$$

Question 1 : Quelle est la valeur moyenne d'un signal constant $s(t) = s_0$?

Question 2 : Montrer que la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal $s(t) = S\cos(\omega t)$ est nulle.

Moyenne d'un signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal a une moyenne nulle.

☛ *Remarque :* Géométriquement, il est cohérent d'obtenir une moyenne nulle pour un signal sinusoïdal si l'on interprète l'intégrale comme l'aire algébrique[1] du signal $s(t)$ (voir figure ??). En effet, chaque surface sous l'axe horizontal (en bleu) a une aire compensée par les surfaces au-dessus de l'axe horizontal (en rouge).

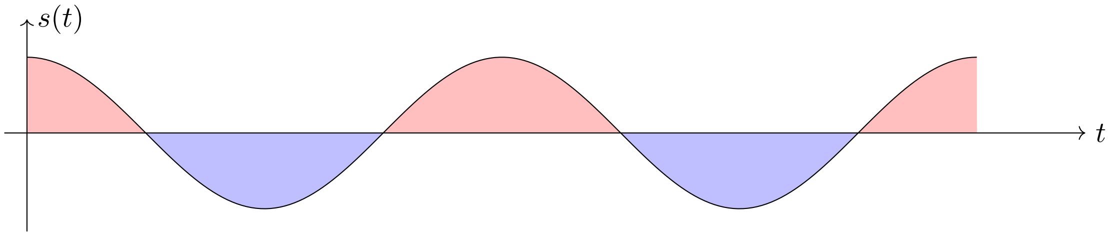


FIGURE 2.1 – Interprétation géométrique de la moyenne nulle pour un signal sinusoïdal.

On remarque que la valeur moyenne n'apporte aucune information sur l'amplitude d'un signal sinusoïdal, notamment parce que celui-ci est la moitié du temps positif et l'autre moitié du temps négatif. On peut donc essayer de s'intéresser à une modification de ce signal le rendant toujours positif...

Valeur efficace d'un signal périodique

Soit un signal périodique $s(t)$ de période T. La **valeur efficace** S_{eff} de ce signal se calcule à partir de son intégrale :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}$$

Question 3 : Déterminer la valeur efficace du signal sinusoïdal $s(t) = S\cos(\omega t)$. On rappelle que $\forall a \in \mathbb{R}, \cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$.

1. On décompte les aires positivement si elles sont au-dessus de l'axe horizontal, et négativement si elles sont en-dessous.

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

La valeur efficace d'un signal sinusoïdal d'amplitude S est :

$$S_{\text{eff}} = \frac{S}{\sqrt{2}}$$

☛ *Remarque :* La valeur efficace d'un signal périodique dépend de la forme dudit signal. Par exemple, un signal créneaux symétrique d'amplitude S a une valeur efficace $S_{\text{eff}} = S$; un signal triangulaire d'amplitude S a une valeur efficace $S_{\text{eff}} = S/\sqrt{3}$...

2.2 Facteur de puissance

Soit un résistor de résistance R possédant une tension $u(t)$ à ses bornes et parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. On se place en convention récepteur.

Question 4 : Donner l'expression de la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ reçue par le résistor en fonction de $u(t)$ et de $i(t)$, puis en fonction de R et $i(t)$.

Question 5 : On suppose de plus que les signaux $i(t)$ et $u(t)$ sont sinusoïdaux[2] : $i(t) = I\cos(\omega t)$ et $u(t) = U\cos(\omega t)$. Exprimer la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ reçue par le résistor en fonction de R et I_{eff}.

Question 6 : Réexprimer $\langle \mathcal{P} \rangle$ en fonction de U_{eff} et R.

Interprétation de la tension efficace et de l'intensité efficace

La valeur efficace d'un courant ou d'une tension variables au cours du temps correspond à la valeur d'un courant continu ou d'une tension continue qui produirait un échauffement identique dans un résistor.

☛ *Remarque :* La tension efficace est celle affichée par un voltmètre en mode alternatif AC ; de même avec le courant efficace.

2. On rappelle que $u(t)$ et $i(t)$ ne sont pas déphasés l'un par rapport à l'autre pour un résistor.

On considère désormais un dipôle quelconque possédant une tension $u(t) = U\cos(\omega t)$ à ses bornes et parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi)$. On se place à nouveau en convention récepteur.

Question 7 : Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}(t)$ reçue par le dipôle. On rappelle que $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \cos(a) \times \cos(b) = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$.

Question 8 : En déduire l'expression de la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ reçue par le dipôle en fonction de $U_{\text{eff}} = \dfrac{U}{\sqrt{2}}$, $I_{\text{eff}} = \dfrac{I}{\sqrt{2}}$ et φ.

Facteur de puissance

Soit un dipôle alimenté en régime sinusoïdal forcé par une efficace U_{eff} et une intensité efficace I_{eff}. Si l'on note φ le déphasage entre la tension et l'intensité du courant, la puissance moyenne reçue par ce dipôle est :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \times \cos(\varphi)$$

On appelle la grandeur $\cos(\varphi)$ le **facteur de puissance** : il est sans unité, et compris entre 0 et 1.

Le dipôle étudié a une impédance complexe $\underline{Z}$.

Question 9 : Donner les expressions de $\underline{u}(t)$ et $\underline{i}(t)$; en déduire les amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$.

Question 10 : Rappeler le lien entre $\underline{u}(t)$, $\underline{i}(t)$ et $\underline{Z}$. En déduire une expression de φ en fonction de $\underline{Z}$.

Facteur de puissance et impédance complexe

Soit un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$. Le facteur de puissance $\cos(\varphi)$ est lié à l'impédance complexe car $\varphi = \arg(\underline{Z})$.
On en déduit que $\cos(\varphi) = \cos(\arg(\underline{Z}))$.

Question 11 : Que vaut le facteur de puissance pour un résistor ? Commenter.

Question 12 : Que vaut le facteur de puissance pour un condensateur ? Commenter.

Question 13 : Que vaut le facteur de puissance pour une bobine ? Commenter.

Question 14 : On considère une association série ($R = 100\,\Omega, L = 1\,\mathrm{H}$) alimentée par une tension sinusoïdale de fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Déterminer l'impédance complexe de l'association, puis l'expression et la valeur du facteur de puissance.

Question 15 : Ajouter un condensateur en série de l'association précédente permet-elle d'augmenter ou de diminuer le facteur de puissance ?

2.3 Transport d'énergie électrique

L'énergie électrique produite à la centrale (nucléaire, hydraulique, éolienne...) est acheminée jusqu'aux habitations par des lignes électriques (voir figure **??**).

FIGURE 2.2 – Trois lignes à haute tension.

On retrouve souvent ces lignes par groupes de trois : elles transportent chacune un courant électrique déphasé de $2\pi/3 = 120°$ par rapport aux autres, de telle manière que la somme des trois signaux soit nulles (voir figure **??**). On parle de **courants triphasés**.

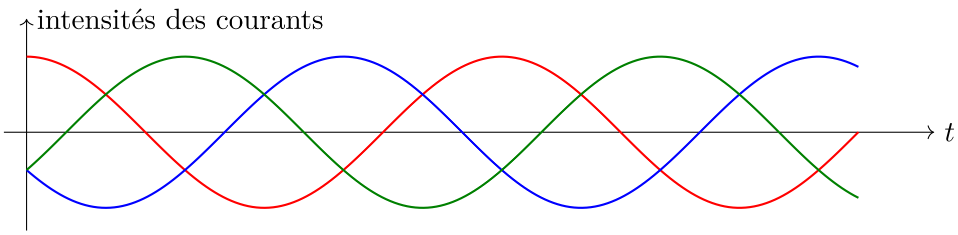


FIGURE 2.3 – Courant triphasé. On remarque que $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0, \forall t$.

Ainsi, lorsque l'une des lignes alimente une charge, le courant entrant par une phase (par exemple $i_1(t)$) dans la charge la quittera par les deux autres phases (ici, $i_2(t) + i_3(t)$).

Chacune de ces lignes est portée à une même tension efficace U_{eff} et à un même courant efficace I_{eff}, qui varient selon les puissances transportées et les zones traversées (voir figure **??**).

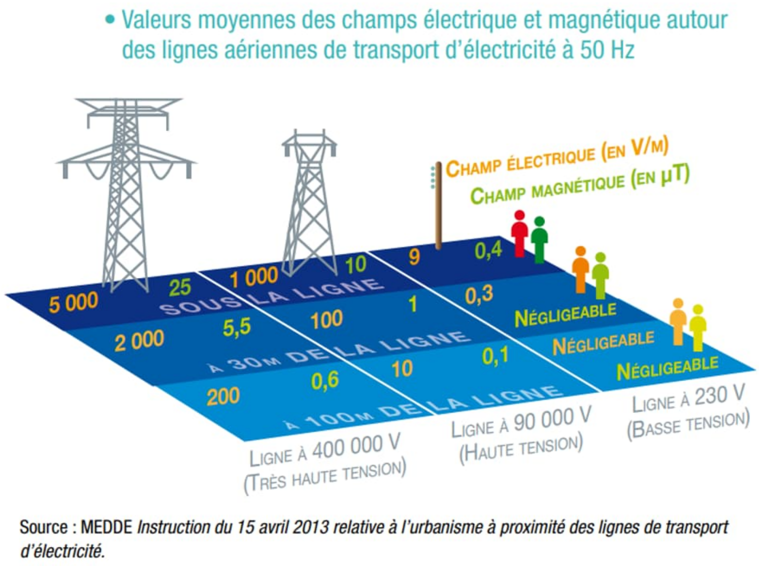


FIGURE 2.4 – Valeurs des champs électriques et magnétiques créés par les lignes aériennes.

Question 16 : Justifier que les oiseaux de la figure ?? ne soient pas électrocutés malgré des tensions importantes.

On note $\mathcal{P}_a = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$ la puissance active générée par la centrale et transmise par les lignes, et $\mathcal{P}_J$ celle dissipée par effet Joule le ligne de la ligne de résistance R.

Question 17 : Exprimer $\mathcal{P}_J$ en fonction de R, $\mathcal{P}_a$, U_{eff} et $\cos(\varphi)$.

Question 18 : Justifier l'emploi de lignes à haute tension pour le transport d'énergie électrique.

Question 19 : Préfère-t-on un facteur de puissance élevé ou faible pour transporter l'énergie électrique ?

Pour une ligne aérienne haute tension, le facteur de puissance est très élevé : $\cos(\varphi) \approx 0{,}95$ à $0{,}99$. La ligne possède une impédance principalement inductive $R + jL\omega$. Un bon facteur de puissance limite le courant circulant et donc les pertes par effet Joule.

Questions de cours

- ☐ Soit un signal $s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$. Donner sa valeur moyenne et sa valeur efficace.
- ☐ Rappeler le lien entre la puissance électrique moyenne reçue par un dipôle, sa tension efficace, son courant efficace et son facteur de puissance. Quelle est l'unité du facteur de puissance ?
- ☐ Déterminer le facteur de puissance d'une association série $(R = 30\,\Omega, L = 1\,\mathrm{H})$ alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$.
- ☐ Justifier l'emploi de lignes à haute tension pour le transport d'énergie électrique.
- ☐ Expliquer l'influence du facteur de puissance d'une installation sur les pertes d'énergie par effet Joule dans les lignes de transport.

Chapitre 3 : Résonance d'un circuit électrique

Objectifs :

— Établir l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance, de la bobine ou du condensateur en fonction de la fréquence en utilisant la notion d'impédance complexe.

— Tracer la courbe donnant l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance en fonction de la fréquence.

— Relier l'amplitude et la largeur (à $1/\sqrt{2}$) du pic de résonance en courant au facteur de qualité et à la pulsation propre du circuit.

3.1 Premières observations

On observe la tension aux bornes du résistor d'un circuit RLC série. Cette tension est forcée par une source de tension sinusoïdale qui excite le système.
On peut régler la fréquence d'excitation ainsi que le facteur de qualité (c'est-à-dire, la résistance du circuit).

Question 1 : On prend $Q = 0{,}5$ et on augmente progressivement la fréquence. Qu'observe-t-on pour l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance ?

Question 2 : On prend $Q = 5$ et on augmente progressivement la fréquence. Qu'observe-t-on pour l'amplitude de la tension aux bornes de la résistance ?

Résonance

La **résonance** est une situation très générale dans laquelle l'excitation périodique d'un système à une fréquence ω_r provoque une réponse de très forte amplitude.

3.2 Mise en équation

On étudie un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (voir figure **??**), alimenté par une source idéale de tension $e(t) = E\cos(\omega t)$.

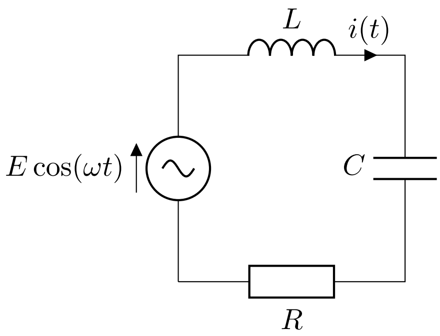


FIGURE 3.1 – Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé.

Question 3 : Exprimer l'impédance $\underline{Z}_{RLC}$ de l'association série RLC. La mettre sous forme d'une unique fraction.

Question 4 : À l'aide d'un circuit équivalent, donner le lien entre $\underline{e}(t)$, $\underline{Z}$ et $\underline{i}(t)$.

Question 5 : Exprimer les tensions complexes $\underline{u_R}(t)$, $\underline{u_C}(t)$ et $\underline{u_L}(t)$ respectivement pour le résistor, le condensateur et la bobine en fonction de $\underline{i}(t)$ et des constantes de l'énoncé.

Question 6 : En déduire l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U_R}$ de la tension aux bornes de la résistance en fonction de R, L, C, ω et E.

Question 7 : Montrer que l'on peut mettre $\underline{U_R}$ sous la forme : $\underline{U_R} = \dfrac{E}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$. On donnera les expressions de Q et ω_0.

Question 8 : En déduire l'expression de U_R, amplitude <u>réelle</u> de la tension aux bornes du résistor.

Question 9 : Que valent les limites de $U_R(\omega)$ lorsque $\omega \ll \omega_0$ (« ω très petit devant ω_0 ») et $\omega \gg \omega_0$ (« ω très grand devant ω_0 ») ?

Question 10 : Pour quelle valeur de ω le dénominateur de $U_R(\omega)$ est-il minimal ? En déduire sa valeur maximale U_{max}.

Question 11 : Tracer alors l'allure de $U_R(\omega)$.

Question 12 : Justifier que l'amplitude réelle du courant électrique $I(\omega)$ dans le circuit suit les mêmes variations que $U_R(\omega)$.

Résonance en courant d'un circuit RLC série

Le courant circulant dans un circuit RLC série entre en résonance lorsqu'il est excité à la pulsation propre ω_0 du circuit. En d'autres termes, l'amplitude du courant électrique est maximale à la pulsation propre ω_0 du circuit.
Cette intensité maximale est indépendante de la valeur du facteur de qualité ou de la pulsation propre du circuit.

☛ *Remarque :* On pourrait faire l'étude des tensions aux bornes du condensateur ou de la bobine, qui subissent également des phénomènes de résonance... mais assez différents de la résonance en courant.

3.3 Influence du facteur de qualité sur la résonance

Question 13 : Que vaut l'intensité maximale I_{max} du courant à la résonance ?

Pulsations de coupure et largeur d'un pic de résonance

Soit un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé (pulsation ω) dans lequel circule un courant d'amplitude réelle $I(\omega)$.
Les **pulsations de coupure** ω_c correspondent aux pulsations pour lesquelles on a :

$$I(\omega_c) = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

Si l'on note $\omega_c^{(1)}$ et $\omega_c^{(2)}$ les deux pulsations de coupure (avec $\omega_c^{(1)} < \omega_c^{(2)}$), la **largeur du pic de résonance** $\Delta\omega$ correspond à la largeur de l'intervalle $[\omega_c^{(1)}, \omega_c^{(2)}]$; en d'autres termes :

$$\Delta\omega = \omega_c^{(2)} - \omega_c^{(1)}$$

Question 14 : On pose $x = \omega/\omega_0$ la **pulsation réduite**. Montrer que les pulsations réduites x_c de coupure vérifient $\left(x_c - \dfrac{1}{x_c}\right)^2 = \dfrac{1}{Q^2}$.

Puisque $x_c - \dfrac{1}{x_c}$ peut être positif ou négatif, il faut résoudre deux cas : $x_c - \dfrac{1}{x_c} = -\dfrac{1}{Q}$ et $x_c - \dfrac{1}{x_c} = +\dfrac{1}{Q}$.

- **Premier cas :** $x_c - \dfrac{1}{x_c} = -\dfrac{1}{Q}$.
  En multipliant par Qx_c, on peut alors réécrire cette équation sous la forme : $Qx_c^2 + x_c - Q = 0$, dont le discriminant est : $\Delta = 1 + 4Q^2 > 0$.
  Les solutions sont donc :
  $$x_c = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$
  Or $x = \omega/\omega_0 > 0$, donc l'unique solution physiquement cohérente est :
  $$x_c^{(1)} = \frac{-1 + \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

- **Deuxième cas :** $x_c - \frac{1}{x_c} = +\frac{1}{Q}$.
  En multipliant par Qx_c, on peut alors réécrire cette équation sous la forme : $Qx_c^2 - x_c - Q = 0$, dont le discriminant est : $\Delta = 1 + 4Q^2 > 0$.
  Les solutions sont donc :
  $$x_c = \frac{1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$
  Or $x = \omega/\omega_0 > 0$, donc l'unique solution physiquement cohérente est :
  $$x_c^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

☛ *Remarque :* Je doute que l'on vous demande de faire ce genre de raisonnement le jour du concours... mais il ne vous est pas inaccessible.

Question 15 : Déterminer alors les deux pulsations de coupure du circuit RLC série, puis la largeur du pic de résonance.

Question 16 : La largeur du pic de résonance augmente-t-il ou diminue-t-il selon la valeur du facteur de qualité Q ? Est-ce cohérent avec les observations faites au début du cours ?

Acuité de la résonance en courant

La largeur *relative* du pic de résonance en courant d'un circuit RLC dépend uniquement de son facteur de qualité Q :
$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$
On en déduit qu'un circuit possédant un grand facteur de qualité aura un pic de résonance en courant très étroit, alors qu'un petit facteur de qualité impliquera un pic de résonance en courant assez large.

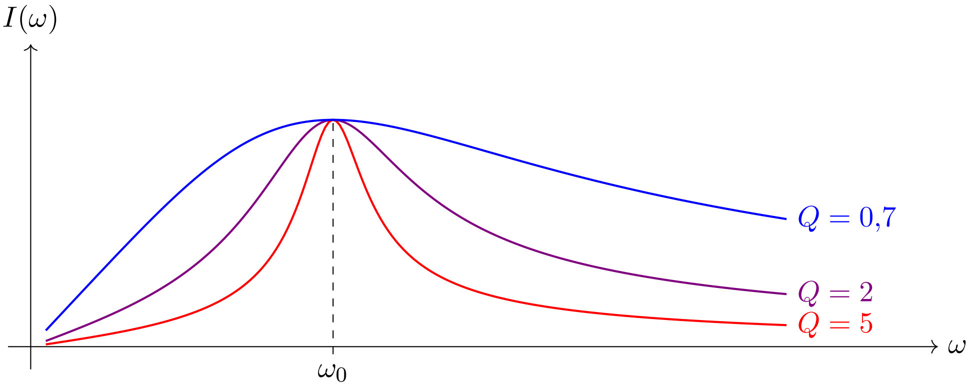


FIGURE 3.2 – Pics de résonance en courant d'un circuit RLC selon la valeur de Q.

Questions de cours

- ☐ Soit un circuit RLC série alimenté par une source idéale de tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Établir, en régime sinusoïdal établi, l'expression de l'amplitude réelle de la tension aux bornes du résistor en fonction de E, R, L, C et ω.
- ☐ Soit un circuit RLC série alimenté par une source idéale de tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Établir, en régime sinusoïdal établi, l'expression de l'amplitude réelle de la tension aux bornes de la bobine en fonction de E, R, L, C et ω.
- ☐ Soit un circuit RLC série alimenté par une source idéale de tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Établir, en régime sinusoïdal établi, l'expression de l'amplitude réelle de la tension aux bornes du condensateur en fonction de E, R, L, C et ω.
- ☐ On donne l'expression de l'amplitude de la tension aux bornes du résistor d'un circuit RLC série en régime sinusoïdal établi : $U_R(\omega) = \dfrac{E}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$. Tracer la courbe de $U_R(\omega)$ en la justifiant.
- ☐ On donne l'expression de l'amplitude du courant circulant dans un circuit RLC série en régime sinusoïdal établi : $I(\omega) = \dfrac{I_{\text{max}}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$. Quelle est l'amplitude du pic de résonance en courant ? À quelle pulsation a-t-elle lieu ? En quoi le facteur de qualité du circuit influe-t-il sur la largeur du pic de résonance en courant ?