1 Mouvement d'un point matériel

■ À revoir ■ Maîtrisé

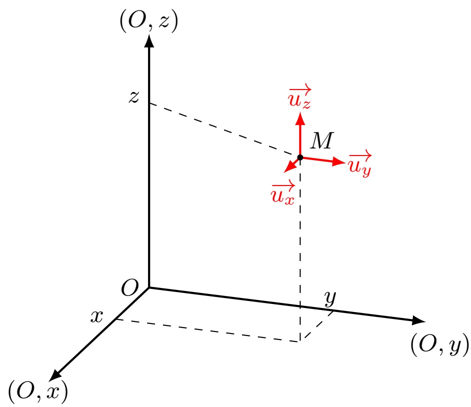
Un système peut être représenté par un **point matériel** si ses dimensions sont négligeables face à l'échelle d'observation, et si son orientation n'intervient pas.

1 Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes

Les trois **coordonnées cartésiennes** d'un point M dans un repère orthonormé [1] (O, x, y, z) choisi sont :

- x est l'abscisse du point M, avec $x \in]-\infty; +\infty[$;
- y est l'ordonnée du point M, avec $y \in]-\infty; +\infty[$;
- z est la cote du point M, avec $z \in]-\infty; +\infty[$.



Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé **vecteur-position** du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$. L'ensemble des positions successives du point M définit sa **trajectoire**.

Le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

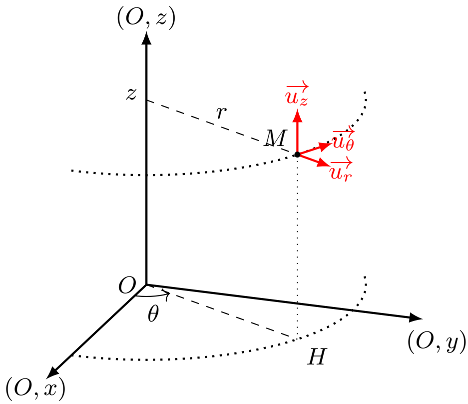
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t).\overrightarrow{e_x} + y(t).\overrightarrow{e_y} + z(t).\overrightarrow{e_z}}$$

1. Les trois directions sont orthogonales les unes aux autres, et le vecteur directeur $\vec{e}_j$ de l'axe (Oj) a une norme égale à 1 ($j = x, y, z$).

Coordonnées cylindriques et coordonnées polaires

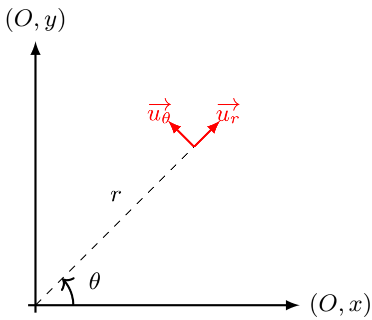
Les trois **coordonnées cylindriques** d'un point M dans un repère orthonormé (O, x, y, z) choisi sont :

- r est la distance entre l'axe (O, z) et le point M, avec $r \in [0; +\infty[$;
- θ est l'angle formé entre l'axe (O, x) et le vecteur $\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal du point M dans le plan (O, x, y), avec $\theta_M \in [0; 2\pi[$;
- z est la cote du point M, avec $z_M \in]-\infty; +\infty[$, de la même manière qu'en coordonnées cartésiennes.



Les **coordonnées polaires** correspondent aux coordonnées cylindriques pour lesquelles on impose un déplacement dans un plan horizontal $z =$ cste.

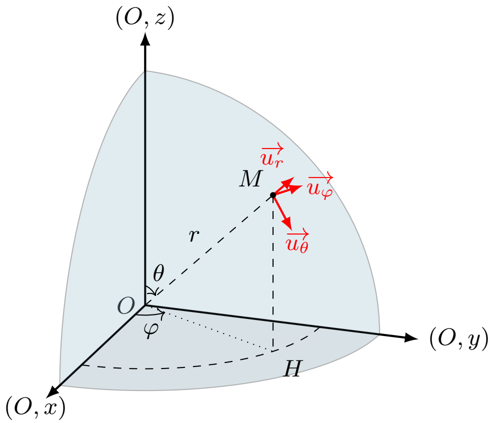
Ainsi, le point M est uniquement repéré par ses coordonnées r et θ.



Coordonnées sphériques

Les trois **coordonnées sphériques** d'un point M dans un repère orthonormé (O, x, y, z) choisi sont :

- r est la distance entre le centre O et le point M, avec $r_M \in [0; +\infty[$;
- θ est l'angle formé entre l'axe (O, z) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, avec $\theta_M \in [0; \pi[$;
- φ est l'angle formé entre l'axe (O, x) et le vecteur $\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal du point M dans le plan (O, x, y), avec $\varphi_M \in [0; 2\pi[$.



La base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ est la base locale associée au repère sphérique : elle est orthonormée directe. Le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est orienté du point O vers le point M ; le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ est orienté du nord vers le sud ; le vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$ est orienté de l'ouest vers l'est.

2 Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes

On définit le **vecteur-vitesse** $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ d'un point M à partir de son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{\vec{v}(M) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}$$

Le vecteur-vitesse est tangent, en tout point, à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement.

Si la norme $||\vec{v}(M)||$ est constante, le mouvement du point est **uniforme**.

Si le vecteur $\vec{v}(M)$ a une direction constante, le mouvement du point est **rectiligne**.

Le vecteur-vitesse $\vec{v}(M)$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\boxed{\vec{v}(M) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \dot{x}(t).\overrightarrow{e_x} + \dot{y}(t).\overrightarrow{e_y} + \dot{z}(t).\overrightarrow{e_z}}$$

♥ $\dot{x}(t)$ représente tout simplement $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$: c'est juste une notation simplifiée de la dérivée temporelle.

❤ Pour un mouvement vertical, on aura toujours $\vec{v} = \dot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$, que l'axe (O, z) soit vers le haut ou vers le bas ! $\dot{z}(t)$ est une fonction pouvant être positive ou négative, et le vecteur-vitesse sera donc automatiquement dans le bon sens, quel que soit le sens du vecteur $\overrightarrow{e_z}$. Il ne faut donc jamais chercher à écrire $\vec{v} = -\dot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$, même si votre intuition vous dit le contraire.

On définit le **vecteur-accélération** $\vec{a}(M)$ d'un point M à partir de son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ ou de son vecteur-vitesse $\vec{v}(M)$:

$$\boxed{\vec{a}(M) = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}}$$

Le vecteur-accélération $\vec{a}(M)$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\boxed{\vec{a}(M) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \ddot{x}(t).\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}(t).\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}(t).\overrightarrow{e_z}}$$

❤ Même remarque que pour le vecteur-vitesse : on n'a jamais $\vec{a} = -\ddot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$...

3 Mouvement circulaire

Soit un point M effectuant un mouvement plan. On le paramètre par ses coordonnées polaires r et θ.

On définit la **vitesse angulaire** ω par :

$$\boxed{\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}}$$

Elle s'exprime en $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ou en $\mathrm{tr/min}$.

Si le point M de vitesse angulaire ω décrit un mouvement circulaire de rayon R, sa **vitesse instantanée** vaut :

$$\boxed{v(M) = R \times \omega}$$

Si un point M décrit un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire constante ω, alors :

- Le mouvement est **périodique** ;
- La **période** T nécessaire à faire un tour de cercle est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$;
- La **fréquence de rotation** est $f \triangleq \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

On a donc notamment : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

2 Chutes libres

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Principe d'inertie

On dit qu'un point matériel est **isolé** ou **pseudo-isolé** si la somme des forces s'exerçant sur lui est nulle.

Le **principe d'inertie** stipule alors qu'il existe des référentiels dans lesquels le mouvement d'un point matériel est rectiligne et uniforme si et seulement si ce point matériel est isolé ou pseudo-isolé. Un référentiel vérifiant cette propriété est appelé **référentiel galiléen**.

♥ Un référentiel est galiléen si la durée d'observation du mouvement est « suffisamment courte » pour négliger les effets non-galiléens.

2 Actions, interactions et forces

On appelle **action mécanique** toute action, exercée par un système extérieur et pouvant modifier, provoquer ou empêcher le mouvement d'un objet.

Une action mécanique exercée sur un point matériel est modélisée par un **vecteur-force** : sa norme correspond à l'intensité de la force, sa direction et son sens traduisent ceux de l'action. L'unité du Système International pour la force est le newton N.

Si deux points A et B sont en interaction, alors la force exercée par A sur B s'oppose à celle exercée par B sur A : c'est le **principe des interactions**. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\overrightarrow{F}_{B\to A}}$$

Poids

Au voisinage de la Terre, un corps subit une force appelée **poids** (noté $\overrightarrow{P}$), qui est proportionnelle à sa masse :

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m.\overrightarrow{g}}$$

où $\overrightarrow{g}$ est le champ de pesanteur, vertical et orienté vers le bas.

On considère généralement $\overrightarrow{g}$ uniforme, de norme $g = 9{,}81\,\mathrm{N\,kg^{-1}}$.

♥ Son origine principale est l'attraction gravitationnelle de la Terre.

3 Principe fondamental de la dynamique

Pour un point matériel M de masse constante m se déplaçant à l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soumis à des forces extérieures de somme $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$, le **principe fondamental de la dynamique** (PFD) stipule que :

$$\boxed{m.\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}}$$

Lorsque l'on veut étudier le couplage entre forces et mouvement d'un corps, on part quasi-systématiquement du PFD. Cependant, cela doit se faire en un certain nombre d'étapes :

1. Définition du système étudié ;
2. Choix du référentiel galiléen ;
3. Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) appliquées au système dans le référentiel ;
4. Application mathématique du PFD.
5. Projection, si nécessaire, du PFD, pour déterminer des équations scalaires et non plus vectorielles.

♥ S'il existe n points matériels dans le problème, alors il faudra appliquer n PFD (un à chacun des points), en faisant attention à faire un BAME différent et rigoureux à chaque fois.

On appelle **équation du mouvement** une équation différentielle portant sur les dérivées temporelles de la position. Elle peut notamment se déterminer à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

On appelle **équation horaire** une équation explicite donnant l'expression des coordonnées du système d'étude en fonction du temps.

4 Application aux chutes libres

Une **chute libre** est le mouvement d'un système matériel uniquement soumis à la pesanteur. L'équation de la trajectoire est l'expression de son altitude (souvent notée z ou y) en fonction de son abscisse (souvent notée x).

Si un point matériel en chute libre est lâché sans vitesse initiale ou lancé avec une vitesse initiale verticale, alors sa trajectoire sera vertical.

Si un point matériel en chute libre est lancé avec une vitesse initiale ayant une composante horizontale, alors sa trajectoire sera parabolique.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Chute libre verticale

Énoncé

Soit un point matériel M repéré par son altitude $z(t)$ dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g.\overrightarrow{u_z}$ (l'axe vertical est donc ascendant) ; le sol est à l'altitude $z = 0$. On lance le point M d'une altitude h avec une vitesse initiale v_0 orientée vers le haut. On néglige tout frottement.

On étudie le point M dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) appliquées sur le point M.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD) au point M, déterminer l'équation du mouvement portant sur $z(t)$.
3. En déduire l'équation horaire de $z(t)$.
4. Quelle est la hauteur maximale z_{max} atteinte par le point M ?

Résolution

1. Seul le poids $\vec{P} = m.\vec{g} = -mg.\overrightarrow{u_z}$ s'applique sur le point M.
2. D'après le PFD : $m.\vec{a}(M) = \vec{P}$, c'est-à-dire : $m.\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-mg\end{pmatrix}$.

   En projetant selon $\overrightarrow{u_z}$, on a donc $m\ddot{z} = -mg$, c'est-à-dire : $\boxed{\ddot{z} = -g}$.
3. Primitivons l'équation du mouvement $\ddot{z} = -g$.

   On a donc $\dot{z}(t) = -g \times t + C_1$. Or, à $t = 0$, la vitesse[2] vaut $+v_0$ d'après l'énoncé, car l'axe (O, z) est ascendant. Il vient alors que :

$$\dot{z}(t=0) = \begin{cases} v_0 & \text{d'après l'énoncé} \\ -g \times 0 + C_1 & \text{d'après les calculs} \end{cases}$$

   On a alors $v_0 = -g \times 0 + C_1$, c'est-à-dire que $C_1 = v_0$. Nécessairement, $\boxed{\dot{z}(t) = -gt + v_0}$.

   Primitivons cette dernière équation. On a donc $z(t) = -\frac{1}{2}g \times t^2 + v_0 \times t + C_2$. Or, à $t = 0$, l'altitude vaut h d'après l'énoncé. Il vient alors que :

$$z(t=0) = \begin{cases} h & \text{d'après l'énoncé} \\ -\frac{1}{2}g \times 0^2 + v_0 \times 0 + C_2 & \text{d'après les calculs} \end{cases}$$

2. On rappelle que $\dot{z}$ est la vitesse !

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

On a alors $h = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + v_0 \times 0 + C_2$, c'est-à-dire que $C_2 = h$. Nécessairement, l'**équation horaire** est :

$$\boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h}$$

4. Le point M est à sa hauteur maximale lorsque sa vitesse verticale $\dot{z}$ est nulle. Si l'on note t_{max} l'instant où cela arrive, on peut écrire : $\dot{z}(t = t_{\text{max}}) = 0$, c'est-à-dire : $-gt_{\text{max}} + v_0 = 0$. Nécessairement, $t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}$.
   On réinjecte cette expression de t_{max} dans celle de $z(t)$, car $z_{\text{max}} = z(t = t_{\text{max}})$. Il vient donc que :

$$\begin{aligned} z_{\text{max}} &= -\frac{1}{2}gt_{\text{max}}^2 + v_0 t_{\text{max}} + h \\ &= -\frac{1}{2}g \times \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \times \frac{v_0}{g} + h \\ &= -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} + h \\ &= \frac{v_0^2}{2g} + h \end{aligned}$$

L'altitude maximale est donc $\boxed{z_{\text{max}} = h + \frac{v_0^2}{2g}}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Chute libre parabolique

Énoncé

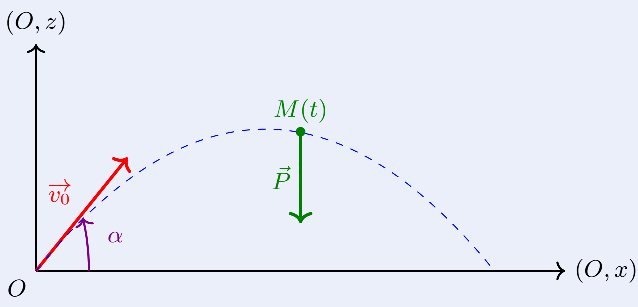
On considère un point matériel M de masse m se déplaçant dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g.\overrightarrow{u_z}$ (l'axe vertical est donc ascendant).

On lance ce point depuis l'origine O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale.

1. Faire un schéma du problème en plaçant notamment le vecteur-vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ et le point $M(t)$ à un instant t quelconque. Effectuer également le bilan des actions mécaniques extérieures s'appliquant sur le point M, et les faire figurer sur le schéma.
2. Projeter le vecteur $\overrightarrow{v_0}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$.
3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer les équations horaires de $x(t)$ et $z(t)$.
4. Déterminer l'équation de la trajectoire $z(x)$.
5. Quelle est la portée x_{max} du tir ? C'est-à-dire la plus grande valeur de x atteinte par le point M avant de toucher le sol.

Résolution

1.

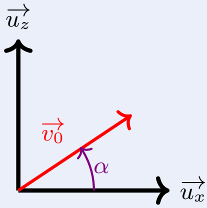


Seul le poids $\vec{P} = m.\vec{g} = -mg.\overrightarrow{u_z}$ s'applique sur le point M.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

2.



On a :

$$\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos(\alpha).\overrightarrow{u_x} + v_0 \sin(\alpha).\overrightarrow{u_z}$$

3. D'après le PFD : $m.\vec{a}(M) = \vec{P}$, c'est-à-dire : $m.\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$.

   Les projections selon $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z}$ donnent alors respectivement :

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} = -g$$

   On primitive ces deux équations du mouvement, en utilisant les conditions initiales sur la vitesse $\dot{x}(t=0) = v_0 \cos(\alpha)$ et $\dot{z}(t=0) = v_0 \sin(\alpha)$ (voir question précédente). On a alors :

$$\dot{x} = v_0 \cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \dot{z} = -gt + v_0 \sin(\alpha)$$

   On primitive à nouveau, en utilisant les conditions initiales sur la position $x(t=0) = 0$ et $z(t=0) = 0$. Nécessairement :

$$\boxed{x(t) = v_0 \cos(\alpha) t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t}$$

4. Isolons t dans l'expression de $x(t)$: on a $t = \dfrac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$. On réinjecte cette expression dans l'équation de z :

$$\begin{aligned} z(x) &= -\frac{1}{2} g \times \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \\ &= -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} \times x^2 + \tan(\alpha) \times x \end{aligned}$$

   L'équation de la trajectoire est donc $\boxed{z(x) = -\dfrac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\alpha)} \times x^2 + \tan(\alpha) \times x}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

5. La portée correspond à la valeur de x pour laquelle le point M touche à nouveau le sol ; en d'autres termes, $z(x = x_{\text{max}}) = 0$. Nécessairement :

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} \times x_{\text{max}}^2 + \tan(\alpha) \times x_{\text{max}} = 0$$

Ce qui peut se réécrire :

$$x_{\text{max}} \times \left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} \times x_{\text{max}} + \tan(\alpha)\right) = 0$$

Deux solutions sont possibles : soit $-\frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)} \times x_{\text{max}} + \tan(\alpha) = 0$, soit $x_{\text{max}} = 0$. Cette dernière possibilité n'est pas envisageable, car elle correspond en fait à la position initiale du point M (qui était effectivement bien au niveau du sol).
Si l'on isole x_{max} dans l'autre solution, on en déduit la portée du tir :

$$\boxed{x_{\text{max}} = \frac{2v_0^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g}}$$

3 Pentes, frottements et oscillations

■ À revoir ■ Maîtrisé

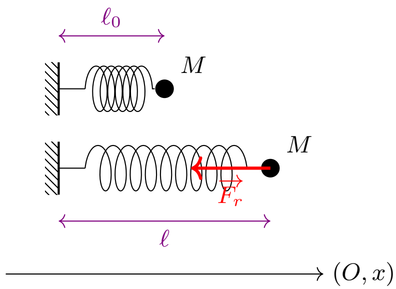
Force de rappel d'un ressort

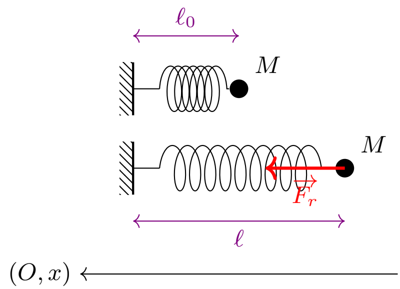
Un ressort linéaire est caractérisé par sa longueur au repos ℓ_0 et sa constante de raideur k. Dans le modèle idéal, il est de masse négligeable et toute variation de sa longueur ℓ produit sur chacune de ses extrémités la **force de rappel**[3] :

$$\boxed{\overrightarrow{F_r} = k(\ell - \ell_0).\vec{u}}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire à choisir avec attention.

♥ Soit un point M relié à un ressort. Pour déterminer le vecteur unitaire adapté dans l'expression de $\overrightarrow{F_r}$, il faut imaginer que l'on déplace le point M afin de détendre le ressort par rapport à sa longueur à vide : ainsi, $\ell - \ell_0 > 0$, et le vecteur $\vec{u}$ sera dans le même sens que $\overrightarrow{F_r}$.





La force de rappel ramène le point M vers sa longueur à vide ℓ_0 : elle est donc selon $-\overrightarrow{u_x}$, et $\overrightarrow{F_r} = -k(\ell - \ell_0).\overrightarrow{u_x}$.

La force de rappel ramène le point M vers sa longueur à vide ℓ_0 : elle est donc selon $+\overrightarrow{u_x}$, et $\overrightarrow{F_r} = +k(\ell - \ell_0).\overrightarrow{u_x}$.

Force de frottements fluides

Quand un solide S est en mouvement dans un fluide, celui-ci exerce une **force de frottements** de sens opposé au vecteur-vitesse de S. Pour une vitesse suffisamment faible, la norme est proportionnelle à celle de la vitesse :

$$\boxed{\vec{f} = -\lambda.\vec{v}(S)}$$

3. On l'appelle « force de rappel » car elle rappelle le point d'attache vers sa position d'équilibre.

Réaction du support

En l'absence de frottements entre un solide S et son support, la **réaction du support** $\overrightarrow{R}$ est une force orthogonale au support et orientée du support vers le solide :

$$\boxed{\overrightarrow{R} = R.\overrightarrow{n}_{\text{support}\to S}}$$

Sa norme R est *a priori* inconnue.

Exercice résolu

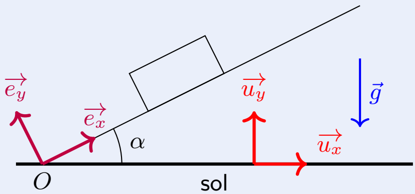
■ À revoir ■ Maîtrisé

Mouvement d'une brique sur une pente

Énoncé

On considère une pente faisant un angle α par rapport à l'horizontale. La base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ est associée à la verticale locale ; la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ est associée à la pente.

Le système étudié est une brique, modélisée par un point matériel M de masse m, initialement en O, est lancée avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0.\overrightarrow{e_x}$. On néglige les frottements, qu'ils soient dûs à la présence de l'air ou du support. Le mouvement est observé dans le référentiel du laboratoire, que l'on supposera galiléen le temps de l'expérience.

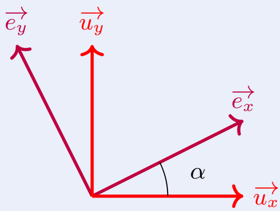


On note $x(t)$ la distance parcourue par la brique sur le plan incliné par rapport au point O.

1. Projeter la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
2. Établir le bilan des forces extérieures exercées sur le système.
3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD) au système, déterminer l'équation du mouvement de $x(t)$ puis l'instant t_{stop} auquel la brique s'arrête.
4. Déterminer la norme de la réaction de la pente sur le système.

Résolution

1.



On a :

$$\overrightarrow{u_x} = \cos(\alpha).\overrightarrow{e_x} - \sin(\alpha).\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{u_y} = \sin(\alpha).\overrightarrow{e_x} + \cos(\alpha).\overrightarrow{e_y}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

2. Le poids $\vec{P} = m.\vec{g} = -mg.\overrightarrow{u_y}$ et la réaction du support $\vec{R} = R.\overrightarrow{e_y}$ s'appliquent sur la brique.
3. La brique glissant uniquement selon $\overrightarrow{e_x}$, son vecteur-accélération s'écrit $\vec{a}(M) = \ddot{x}(t).\overrightarrow{e_x}$. En appliquant le PFD, on obtient alors : $m.\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{R}$, c'est-à-dire :

$$m\ddot{x}(t).\overrightarrow{e_x} = -mg.\overrightarrow{u_y} + R.\overrightarrow{e_y}$$

On projette selon $\overrightarrow{e_x}$ pour avoir l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x}(t).\underbrace{\overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_x}}_{=1} = -mg.\underbrace{\overrightarrow{u_y}\cdot\overrightarrow{e_x}}_{=\sin(\alpha)\text{ (voir Q1)}} + R.\underbrace{\overrightarrow{e_y}\cdot\overrightarrow{e_x}}_{=0}$$

D'où l'équation du mouvement :

$$\boxed{m\ddot{x}(t) = -mg\sin(\alpha)}$$

En divisant par m et en primitivant, on obtient alors que $\dot{x}(t) = -g\sin(\alpha) \times t + C$ avec $C = v_0$ puisque $v(t=0) = v_0$. Nécessairement : $\boxed{\dot{x}(t) = -gt\sin(\alpha) + v_0}$.
La brique s'arrête lorsque sa vitesse est nulle, donc lorsque $-gt_{\text{stop}}\sin(\alpha) + v_0 = 0$. On en déduit que $\boxed{t_{\text{stop}} = \dfrac{v_0}{g\sin(\alpha)}}$.
4. On projette le PFD selon $\overrightarrow{e_y}$ pour déterminer R :

$$m\ddot{x}(t).\underbrace{\overrightarrow{e_x}\cdot\overrightarrow{e_y}}_{=0} = -mg.\underbrace{\overrightarrow{u_y}\cdot\overrightarrow{e_y}}_{=\cos(\alpha)\text{ (voir Q1)}} + R.\underbrace{\overrightarrow{e_y}\cdot\overrightarrow{e_y}}_{=1}$$

Donc $0 = -mg\cos(\alpha) + R$. Nécessairement, $\boxed{R = mg\cos(\alpha)}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

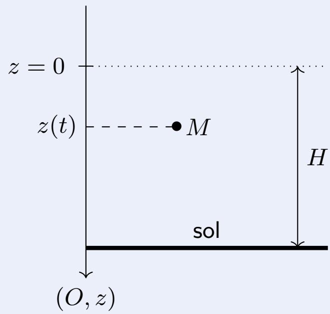
Chute d'une parachutiste

Énoncé

Une parachutiste saute d'une hauteur H sans vitesse initiale. L'axe vertical (O, z) est descendant, et l'altitude $z = 0$ correspond à l'altitude initiale de la parachutiste.

La sportive, dont on note l'altitude $z(t)$ et la vitesse $v(t)$, subit une force de frottements proportionnelle à la vitesse et de coefficient λ.

Le système étudié est l'ensemble { parachutiste + son parachute } dans le référentiel terrestre supposé galiléen le temps de la chute.



1. Établir le bilan des forces extérieures exercées sur le système.
2. Déterminer l'équation du mouvement du système. En déduire l'expression de $v(t)$ à l'aide des conditions initiales, en posant notamment un temps caractéristique τ et une vitesse limite v_{lim}.
3. À grande vitesse, la force de frottements s'écrit plutôt $-\beta v.\vec{v}$: elle est donc proportionnelle à v^2. Déterminer la nouvelle vitesse limite v'_{lim} de la parachutiste.

Résolution

1. Le poids $\vec{P} = m.\vec{g} = mg.\overrightarrow{u_z}$ et la force de frottements $\vec{f} = -\lambda.\vec{v} = -\lambda v(t).\overrightarrow{u_z}$ s'appliquent sur le système.
2. On applique le PFD sur le système : $m.\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$, c'est-à-dire : $m\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t}.\overrightarrow{u_z} = mg.\overrightarrow{u_z} - \lambda v(t).\overrightarrow{u_z}$. En projetant selon $\overrightarrow{u_z}$, on en déduit que :
$$m\frac{\text{d}v}{\text{d}t}(t) + \lambda v(t) = mg$$
On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 ; on divise par m :
$$\frac{\text{d}v}{\text{d}t} + \frac{\lambda}{m}v = g$$
que l'on identifie à la forme canonique :
$$\frac{\text{d}v}{\text{d}t} + \frac{1}{\tau}v = \frac{1}{\tau}v_{\text{lim}}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Nécessairement, $\boxed{\tau = \frac{m}{\lambda}}$ et $\boxed{v_{\text{lim}} = g \times \tau = \frac{mg}{\lambda}}$.

Les solutions sont alors du type $v(t) = v_{\text{lim}} + Ae^{-t/tau}$. Or la vitesse initiale est nulle, donc $0 = v_{\text{lim}} + A$, c'est-à-dire $A = -v_{\text{lim}}$.

On en déduit l'expression de $v(t)$:

$$\boxed{v(t) = v_{\text{lim}} \times \left[1 - e^{-t/\tau}\right]}$$

3. La force de frottement est ici $\vec{f'} = -\beta v^2.\overrightarrow{u_z}$. Le PFD projeté selon $\overrightarrow{u_z}$ donne alors :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \beta v^2$$

Lorsque le système atteint sa vitesse limite, son accélération $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ est nulle. Nécessairement, l'équation issue du PFD devient :

$$m \times 0 = mg - \beta v_{\text{lim}}'^2$$

Et alors :

$$\boxed{v_{\text{lim}}' = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}}$$

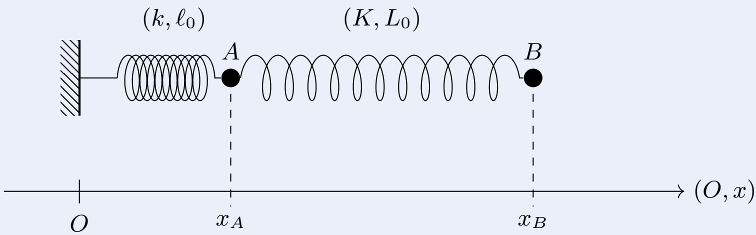
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Systèmes masse-ressort couplés

Énoncé

On considère le dispositif représenté sur le schéma ci-dessous. Le point A a une masse m_A et une abscisse x_A ; le point B a une masse m_B et une abscisse x_B.



On néglige la pesanteur et la réaction du support, et on admet qu'une force de frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}(B)$ s'applique uniquement sur le point B. Déterminer deux équations différentielles couplées portant sur x_A et x_B.

Résolution

Nous avons ici deux points matériels A et B : il faudra donc appliquer le PFD à chacun de ces points.

Anticipons les calculs et déterminons les longueurs de chacun des ressorts. Celui de gauche a une longueur $\ell_g = x_A$, et celui de droite une longueur $\ell_d = x_B - x_A$.

- Choisissons comme système le point A, que l'on étudie dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen le temps de l'expérience.

  BAME appliquées à A :

  — Force du ressort de gauche : $\overrightarrow{F}_{g\to A} = -k(\ell_g - \ell_0).\overrightarrow{e_x} = -k(x_A - \ell_0).\overrightarrow{e_x}$;

  — Force du ressort de droite : $\overrightarrow{F}_{d\to A} = +K(\ell_d - L_0).\overrightarrow{e_x} = +K(x_B - x_A - L_0).\overrightarrow{e_x}$

  Le PFD appliqué à A donne donc : $m_A.\overrightarrow{a}(A) = \overrightarrow{F}_{g\to A} + \overrightarrow{F}_{d\to A}$, c'est-à-dire :

  $$m_A \ddot{x}_A.\overrightarrow{e_x} = -k(x_A - \ell_0).\overrightarrow{e_x} + K(x_B - x_A - L_0).\overrightarrow{e_x}$$

  Pour déterminer une équation portant sur $\dot{x}_A$, il faut donc projeter selon $\overrightarrow{e_x}$. Après réarrangement des termes, on a alors :

  $$\boxed{m_A \ddot{x}_A + (k+K)x_A = Kx_B + k\ell_0 - KL_0}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

- On a une équation portant sur x_A et x_B. Pour résoudre ce système, il nous faut donc une deuxième équation portant sur ces deux grandeurs.
  Choisissons alors comme système le point B, que l'on étudie dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen le temps de l'expérience.
  BAME appliquées à B :
  — Force du ressort de droite : $\overrightarrow{F}_{d\to B} = -K(\ell_d - L_0).\overrightarrow{e_x} = -K(x_B - x_A - L_0).\overrightarrow{e_x}$;
  — Force de frottements fluides : $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}(B) = -\lambda\dot{x}_B.\overrightarrow{e_x}$
  Le PFD appliqué à B donne donc : $m_B.\overrightarrow{a}(B) = \overrightarrow{F}_{d\to B} + \overrightarrow{f}$, c'est-à-dire :
  $$m_B\ddot{x}_B.\overrightarrow{e_x} = -K(x_B - x_A - L_0).\overrightarrow{e_x} - \lambda\dot{x}_B.\overrightarrow{e_x}$$
  Pour déterminer une équation portant sur $\dot{x}_B$, il faut donc projeter selon $\overrightarrow{e_x}$. Après réarrangement des termes, on a alors :
  $$\boxed{m_B\ddot{x}_B + \lambda\dot{x}_B + Kx_B = Kx_A + K\ell_0}$$

4 Équilibre et stabilité d'un point matériel

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Travail d'une force

On définit le **travail élémentaire**[4] $\delta W(\vec{F})$ **d'une force** $\vec{F}$ s'appliquant sur un point M comme :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ du point M s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y.\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z.\overrightarrow{e_z}}$$

♥ Le δ présent devant W signifie qu'il s'agit d'une grandeur infinitésimale. On n'utilise pas la lettre d, qui désigne une variation : le travail existe, ou n'existe pas ; on ne peut pas gagner du travail ou en perdre.

Si une force $\vec{F}$, potentiellement dépendante du temps ou de la position du point M, s'applique sur ce dernier le long d'une trajectoire allant de A à B, alors on définit le **travail de la force le long de cette trajectoire** comme :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Ce travail correspond à l'énergie fournie par la force au point M du début (A) jusqu'à la fin (B) du mouvement. Il s'exprime en joules J.

♥ Si $W_{A\to B}(\vec{F}) > 0$, on parle de **travail moteur** ; si $W_{A\to B}(\vec{F}) < 0$, on parle de **travail résistant**.

Dans le cas d'une force $\vec{F}$ constante, l'expression du travail peut se simplifier :

$$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

quelle que soit la trajectoire parcourue entre A et B. Ainsi, si α est l'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$, on a $W(\vec{F}) = F \times AB \times \cos(\alpha)$.

4. Le mot « élémentaire » signifie « infiniment petit ».

2 Énergie potentielle

On dit qu'une force $\vec{F}$ est **conservative** si son travail $W_{A\to B}(\vec{F})$ sur un point M ne dépend pas de la trajectoire suivie par ce point mais uniquement des points d'arrivée et de départ.

Le poids et la force de rappel sont des forces conservatives, mais les frottements sont des forces non-conservatives.

Toute force conservative $\vec{F}_c$ dérive d'une **énergie potentielle** $\mathcal{E}_p$. Mathématiquement, cela signifie que l'on peut toujours écrire $\boxed{\delta W(\vec{F}_c) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p}$, où $\mathcal{E}_p$ est une fonction ne dépendant que de la position.

Les énergies potentielles sont toutes définies à une constante additive près dont la valeur ne nous intéresse généralement pas. En effet, seules les variations d'énergie potentielle sont pertinentes, car elles retranscrivent une variation d'énergie cinétique, par exemple.

L'**énergie potentielle de pesanteur** est celle associée au poids d'un corps M de masse m. Notons O le centre du repère et z l'altitude du point M.

Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le haut, on a :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{pes}} = mgz} + \text{cste}$$

Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le bas, on a :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{pes}} = -mgz} + \text{cste}$$

où $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ est l'intensité de la pesanteur.

L'**énergie potentielle élastique** est celle associée à la force de rappel d'un ressort sur un point M.

Si l'on note ℓ la longueur du ressort, ℓ_0 sa longueur à vide et k sa constante de raideur, on a :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2} + \text{cste}$$

L'énergie potentielle totale d'un système matériel est égale à la somme de chacune des énergies potentielles citées précédemment. Il existe d'autres types d'énergie potentielle (électrostatique, magnétique, gravitationnelle...), qu'il faudrait rajouter si on prend en compte les actions correspondantes.

Si le système mécanique étudié est constitué de n ressorts, alors il y aura n énergies potentielles élastiques à prendre en compte !

3 Équilibre et stabilité

Un point M est **à l'équilibre** mécanique lorsque sa position ne varie pas dans le temps. Dans le cas de forces uniquement conservatives, un point matériel est à l'équilibre si son énergie potentielle est extrémale (minimale ou maximale). Ceci se repère par une pente nulle (tangente horizontale) dans un graphe d'énergie potentielle.

Une position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ d'un point matériel M est **stable** si, lorsque l'on déplace légèrement le point M, celui-ci revient naturellement vers $x_{\text{éq}}$. Graphiquement, l'énergie potentielle forme un minimum local.

Au contraire, cette position d'équilibre est **instable** si, lorsque l'on déplace légèrement le point M, celui-ci s'éloigne naturellement de $x_{\text{éq}}$. Graphiquement, l'énergie potentielle forme un maximum local.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Énergie potentielle de pesanteur

Énoncé

Montrer que le poids est une force conservative. Déterminer alors l'expression de l'énergie potentielle lui étant associée.

Résolution

Notons (O, z) l'axe vertical ascendant : on a alors $\overrightarrow{P} = -mg.\overrightarrow{e_z}$.
On en déduit que le travail élémentaire du poids vaut :

$$\begin{aligned}\delta W(\overrightarrow{P}) &= \overrightarrow{P} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= -mg.\overrightarrow{e_z} \cdot (\mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y.\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z.\overrightarrow{e_z}) \\ &= -mg\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Ce travail ne dépend que de la position z (et pas de la vitesse $\dot{z}$ ou du temps t) : on en déduit que le poids est une force conservative.

On peut calculer son énergie potentielle car $\mathrm{d}\mathcal{E}_p(\overrightarrow{P}) = -\delta W(\overrightarrow{P}) = mg\mathrm{d}z$.
Nécessairement :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p(\overrightarrow{P}) &= \int mg\mathrm{d}z \\ &= mgz + \text{cste}\end{aligned}$$

5 Théorèmes énergétiques

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Théorème de l'énergie cinétique

Soit un point matériel de masse m et de vitesse instantanée v. L'**énergie cinétique** de ce point matériel est :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

Elle s'exprime en joule J dans le système international.

Soit un point matériel soumis à des forces extérieures $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ dans un référentiel galiléen. Le **théorème de l'énergie cinétique** énonce que la variation de l'énergie cinétique de ce point matériel est égale à la somme des travaux échangés avec l'extérieur :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_c = \sum W\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)}$$

2 Théorème de la puissance mécanique

Soit M un point matériel en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et soumis à une force $\vec{F}$. La **puissance** de $\vec{F}$ dans $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

Ainsi, si l'on note α l'angle entre la vitesse et la force, on a $\mathcal{P}(\vec{F}) = Fv\cos(\alpha)$.
Dans le système international, la puissance s'exprime en watt W.

♥ Le travail élémentaire échangé avec M au cours d'une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ peut s'exprimer en fonction de la puissance de la force : $\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}) \times \mathrm{d}t$.

L'**énergie mécanique** d'un point M est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p}$$

Soit un système matériel d'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et soumis à des forces non conservatives extérieures de puissance $\mathcal{P}_{\text{n.c.}}^{\text{ext}}$. Le **théorème de la puissance mécanique** énonce alors que la puissance de ces forces non-conservatives modifie la valeur de l'énergie mécanique du système au cours du temps :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{n.c.}}^{\text{ext}}}$$

♥ Le théorème de la puissance mécanique est analogue au principe fondamental de la dynamique lorsque l'on souhaite déterminer une équation du mouvement. Il est donc bien pratique lorsque l'on ne souhaite pas projeter des équations...

3 Conservation de l'énergie mécanique

Si un système n'est soumis qu'à des forces extérieures conservatives ou de puissance nulle, alors son énergie mécanique est **conservée** au cours du temps [5] :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \text{cste}}$$

♥ Dans tous les problèmes de mécanique ne faisant pas intervenir de frottements, il faut penser le plus rapidement possible à utiliser la conservation de l'énergie, qui est une méthode très rapide et efficace pour déterminer les positions où la vitesse est nulle <u>ou bien</u> la vitesse à un point précis.

Les **positions accessibles** à un système matériel sont celles vérifiant $\mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_m$.

5. Cela résulte du théorème de la puissance mécanique dans le cas où $\mathcal{P}_{\text{n.c.}}^{\text{ext}} = 0$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Arrêt d'un palet de hockey

Énoncé

Un palet de hockey de masse $m = 10\,\mathrm{kg}$ est lancé avec une vitesse $v_0 = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ sur une piste verglacée horizontale de longueur L. Au bout de la piste se trouve une bande rugueuse de largeur $d = 1\,\mathrm{m}$. Lorsque le palet arrive dessus, il subit une force de frottement $F_f = fmg$ où $f = 0{,}4$ est un coefficient de frottement constant.

1. Justifier par le théorème de l'énergie cinétique que la vitesse du palet sur la longueur L est contante.
2. Calculer le travail de la force de frottement sur la distance d.
3. Exprimer puis calculer la vitesse v_s du palet en sortie de la bande de largeur d.
4. Quelle devrait être la largeur d' de la bande pour que le palet s'arrête totalement ?

Résolution

1. Sur la longueur L, seules deux forces s'appliquent : le poids $\vec{P}$ et la réaction du support $\vec{R}$. Or ces deux forces sont orthogonales au mouvement, donc leurs travaux sont nuls.
   On en déduit, par le théorème de l'énergie cinétique, que $\Delta\mathcal{E}_c = 0$, et donc que $\mathcal{E}_c = \text{cste}$ sur la longueur L. Nécessairement, le palet a une vitesse constante.
2. Puisque la force de frottement solide est constante, on a $W\left(\overrightarrow{F_f}\right) = \overrightarrow{F_f} \cdot \overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AB}$ le vecteur-déplacement entre le début et la fin de la bande rugueuse (on a $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = d$).
   Or les frottements sont toujours opposés au déplacement, donc $W\left(\overrightarrow{F_f}\right) = -F_f \times d = -fmgd = -40\,\mathrm{J}$.
3. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on aura $\mathcal{E}_{c,\text{fin}} - \mathcal{E}_{c,\text{début}} = W(\overrightarrow{F_f})$, c'est-à-dire : $\frac{1}{m}v_s^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -fmgd$.
   On peut simplifier par m, puis isoler v_s :
   $$v_s = \sqrt{v_0^2 - 2fgd}$$
   L'application numérique donne $v_s = \sqrt{8^2 - 2 \times 0{,}4 \times 10 \times 1} = \sqrt{56} \approx 7{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

4. *Naïvement, on a envie de dire qu'un mètre de bande rugueuse enlève* $0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$*, donc il faudrait 16 mètres de bande rugueuse... cette intuition est totalement fausse, comme nous allons le montrer ci-dessous.*

   On applique à nouveau le théorème de l'énergie cinétique, mais avec cette fois $W\left(\overrightarrow{F_f}\right) = -fmgd'$ avec d' la largeur inconnue et $\mathcal{E}_{c,\text{fin}} = 0$ puisque le palet n'a plus de vitesse en sortie.
   Par application du TEC, il vient donc que :

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -fmgd'$$

   On a alors $d' = \dfrac{v_0^2}{2fg} = \dfrac{8^2}{2 \times 0{,}4 \times 10} = 8\,\mathrm{m}$ de bande rugueuse.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Équation du mouvement d'un système masse-ressort vertical

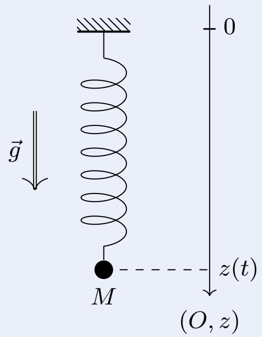
Énoncé

On considère un système masse-ressort vertical comme ci-contre.

À $t = 0$, la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ℓ_0.

On lâche, sans vitesse initiale, le point M de masse m à ce même instant ; ce point matériel tombe alors par action de la gravité, tout en étant rappelé par la force du ressort de constante de raideur k.

On prend en compte les frottements de l'air $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$.



1. Exprimer l'énergie mécanique du système masse-ressort en fonction des données de l'énoncé.
2. Par application du théorème de la puissance mécanique, établir l'équation du mouvement portant sur $z(t)$.
3. Quelle est la position d'équilibre $z_{\text{éq}}$ du point M ?

Résolution

1. Les actions mécaniques s'appliquant sur le point M sont :

   — Le rappel du ressort, action conservative d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2$;
   — La pesanteur, action conservative d'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = -mgz$;
   — Les frottements, action non-conservative de puissance $\mathcal{P}_f = \vec{f}.\vec{v} = -\lambda v^2 = -\lambda\dot{z}^2$.

   L'énergie mécanique vaut donc : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k(z - \ell_0)^2 - mgz$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

2. Le théorème de la puissance mécanique (TPM) énonce que $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}^{\text{ext}}_{\text{n.c.}}$. Or les seules actions non-conservatives sont les frottements, donc $\mathcal{P}^{\text{ext}}_{\text{n.c.}} = \mathcal{P}_f = -\lambda \dot{z}^2$.
   On peut par ailleurs calculer la dérivée de l'énergie mécanique, en utilisant le fait que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(t)^2\right) = 2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k(z-\ell_0)^2 - mgz\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}k(z-\ell_0)^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-mgz) \\
&= \frac{1}{2}m \times 2\dot{z}\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k \times 2(z-\ell_0)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z-\ell_0) - mg\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\
&= m\dot{z}\ddot{z} + k(z-\ell_0)\dot{z} - mg\dot{z}
\end{aligned}$$

   En appliquant le TPM, on a donc :

$$m\dot{z}\ddot{z} + k(z-\ell_0)\dot{z} - mg\dot{z} = -\lambda\dot{z}^2$$

   On peut simplifier toute l'équation [6] par $\dot{z}$, ce qui donne alors :

$$m\ddot{z} + kz - k\ell_0 - mg = -\lambda\dot{z}$$

   En réarrangeant les termes, on trouve une équation d'oscillateur amorti :

$$m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = k\ell_0 + mg$$

3. À l'équilibre, la vitesse $\dot{z}$ et l'accélération $\ddot{z}$ sont nulles. L'équation du mouvement devient alors : $kz_{\text{éq}} = k\ell_0 + mg$, ce qui donne :

$$z_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

6. Cela sera toujours vrai : on doit pouvoir diviser toute l'équation par la vitesse lors d'une application quelconque du TPM. Si ce n'est pas le cas, c'est que vous avez fait une erreur quelque part.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Détermination d'une vitesse finale après une chute libre

Énoncé

Soit un point matériel M repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une altitude h sans vitesse initiale. On néglige tout frottement.

1. Exprimer l'énergie mécanique initiale $\mathcal{E}_{m,i}$ du point M en fonction de m, g et h.
2. On note v_f la vitesse du point M juste avant de toucher le sol. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,f}$ du point M à cet instant en fonction de m et v_f.
3. Justifier que l'énergie mécanique se conserve. Quel lien obtient-on alors entre $\mathcal{E}_{m,i}$ et $\mathcal{E}_{m,f}$?
4. En déduire l'expression de v_f en fonction de g et h.

Résolution

1. L'énergie mécanique initiale du point M est :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{m,i} &= \frac{1}{2}mv_i^2 + mgz_i \\ &= \frac{1}{2}m \times 0^2 + mgh \\ &= mgh\end{aligned}$$

2. L'énergie mécanique finale (juste avant de toucher le sol) est :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{m,f} &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \times 0 \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2\end{aligned}$$

3. Puisque la seule action mécanique présente (ici, la pesanteur) est conservative, on en déduit que l'énergie mécanique est conservée, c'est-à-dire que $\mathcal{E}_m = \text{cste}$. Nécessairement, on a $\mathcal{E}_{m,i} = \mathcal{E}_{m,f}$.

4. On a $\mathcal{E}_{m,i} = \mathcal{E}_{m,f}$, c'est-à-dire : $mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$. On en déduit que $v_f = \sqrt{2gh}$.