Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 3 : Mécanique du point matériel

Cours

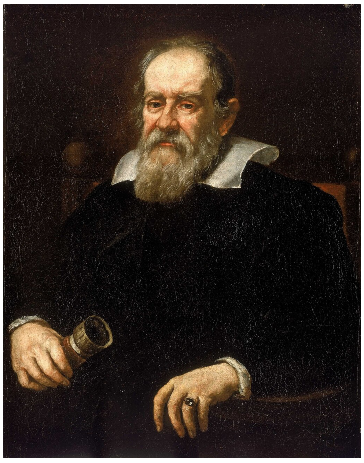


Figure 1 – Physicien, astronome et mathématicien italien, Galilée (1564-1642) est considéré comme l'un des fondateurs de la science moderne. Par ses expériences (plans inclinés, chute des corps), il met en évidence l'universalité de la chute libre et introduit la description quantitative du mouvement, rompant avec la physique aristotélicienne. Il perfectionne la lunette astronomique, découvre les satellites de Jupiter et défend l'héliocentrisme de Copernic. Son insistance sur l'observation et l'expérimentation marque un tournant décisif dans la démarche scientifique.

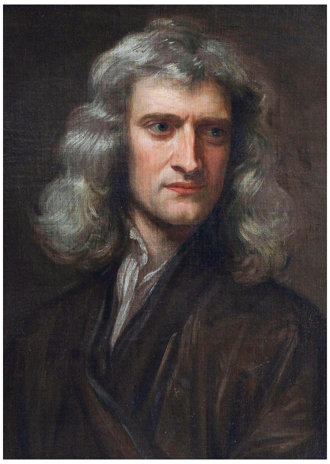


Figure 2 – Mathématicien et physicien anglais, Isaac Newton formule les lois fondamentales de la dynamique, qui posent les bases de la mécanique classique. Dans ses *Principia Mathematica* (1687), il énonce la loi universelle de la gravitation, unifiant la chute des corps et le mouvement des planètes. Il développe aussi le calcul infinitésimal, étudie la lumière et invente le télescope à miroir. Son œuvre fait de lui l'une des figures majeures de l'histoire des sciences, symbole de la puissance explicative des lois physiques.

Table des matières

Chapitre 1 : Mouvement d'un point matériel

Objectifs :

— Dessiner les surfaces sur lesquelles l'une des coordonnées est uniforme dans les différents systèmes de coordonnées.

— Dans le cas des coordonnées polaires et cylindriques, exprimer les vecteurs de base locaux en fonction des vecteurs de base des coordonnées cartésiennes.

— Utiliser les expressions des composantes des vecteurs position, vitesse et accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes.

— Relier la valeur de la vitesse du point à celle de la vitesse angulaire lors d'un mouvement circulaire.

1.1 Systèmes de coordonnées

1.1.1 Mouvement, référentiel et repère

La mécanique est l'étude des systèmes matériels en mouvement. La mécanique classique, ou newtonienne, est valable tant que la vitesse des systèmes étudiés est très inférieure à celle de la lumière dans le vide (domaine non-relativiste) et tant que la taille des systèmes étudiés est très supérieure à celle d'un atome (domaine non-quantique).

La cinématique est l'étude descriptive des mouvements, indépendamment de leurs causes (forces, moments ou couples).

Le mouvement absolu n'existe pas : un objet est toujours en mouvement par rapport à quelque chose. Pour pouvoir étudier le mouvement d'un système, il est donc nécessaire de définir un référentiel, qui constitue le solide par rapport auquel on observe le mouvement dudit système.

Un référentiel est constitué d'un repère spatial (trois axes orthogonaux pour chaque direction de l'espace) et d'un repère temporel (un chronomètre).

Selon le mouvement du système étudié, différents types de coordonnées peuvent être utilisés, le but étant de simplifier les calculs. Chaque système de coordonnées utilise un jeu de trois coordonnées, reflétant le fait que l'espace dans lequel nous vivons est en trois dimensions.

1.1.2 Coordonnées cartésiennes

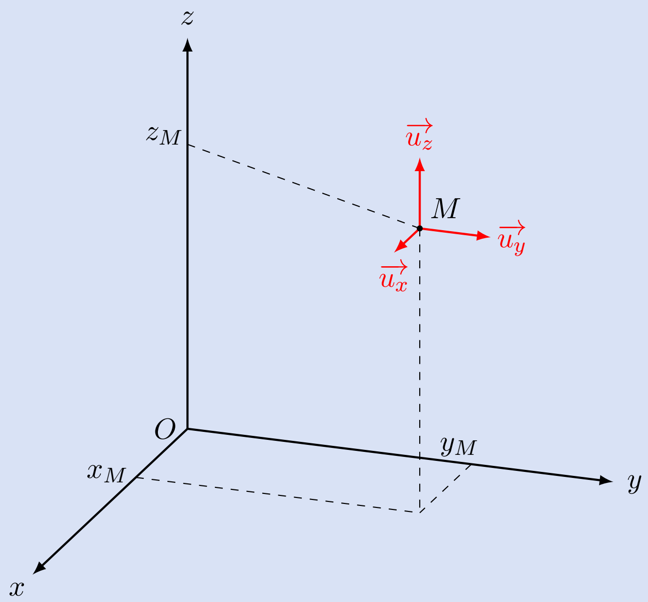
Modèle du point matériel

Un **point matériel** est un objet physique pouvant être assimilé à un point mathématique, c'est-à-dire dont la position est entièrement repérée par trois coordonnées. C'est le cas notamment si ses dimensions sont négligeables à l'échelle d'observation, et si son orientation n'intervient pas.
Le mouvement d'un solide en translation (contrairement à celui d'un solide en rotation) peut s'étudier comme celui d'un point matériel.

Coordonnées cartésiennes

Les trois **coordonnées cartésiennes** d'un point M dans un repère orthonormé [a] (O, x, y, z) choisi sont rigoureusement notées x_M, y_M et z_M :

- x_M est l'abscisse du point M ($x_M \in]-\infty; +\infty[$) ;
- y_M est l'ordonnée du point M ($y_M \in]-\infty; +\infty[$) ;
- z_M est la cote du point M ($z_M \in]-\infty; +\infty[$).



La base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ est la base locale associée au repère cartésien : elle est orthonormée directe.

[a] Les trois directions sont orthogonales les unes aux autres, et le vecteur directeur $\vec{e}_j$ de l'axe (Oj) a une norme égale à 1 ($j = x, y, z$).

☛ *Remarque :* Dans la pratique, on confond souvent x, relatif à l'axe (Ox), avec x_M, afin d'alléger les notations (même chose pour y et z). Cependant, si l'on étudie les mouvements de deux points M et P, on reviendra aux notations x_M et x_P pour éviter toute confusion.

☛ *Remarque :* Le repère $(Oxyz)$ est mieux qu'orthonormé : il est orthonormé direct. Ainsi, les sens des trois axes ne sont pas pris au hasard ; en particulier, (Oz) se détermine à partir de (Ox) et (Oy) à partir de la règle de la main droite.

Question 1 : Dessiner les surfaces respectives sur lesquelles on a x_M uniforme, y_M uniforme et z_M uniforme.

Vecteur-position

Si O est l'origine d'un repère $\mathcal{R}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé **vecteur-position** du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.
L'ensemble des positions successives du point M définit sa **trajectoire**.

Vecteur-position en coordonnées cartésiennes

Le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

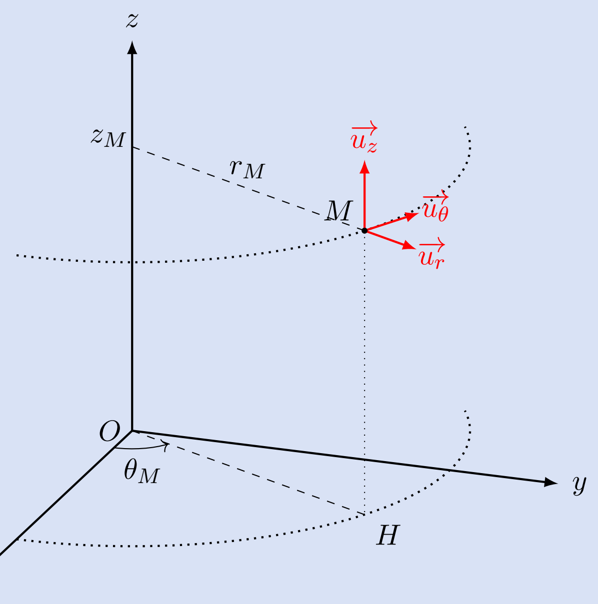
$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t).\overrightarrow{e_x} + y(t).\overrightarrow{e_y} + z(t).\overrightarrow{e_z}$$

1.1.3 Coordonnées cylindriques et polaires

Coordonnées cylindriques

Soit un repère orthonormé (O, x, y, z) fixé. Les trois **coordonnées cylindriques** d'un point M dans un repère orthonormé sont rigoureusement notées r_M, θ_M et z_M :

- r_M est la distance entre l'axe (O, z) et le point M ($r_M \in [0; +\infty[$) ;
- θ_M est l'angle formé entre l'axe (O, x) et le vecteur $\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal du point M dans le plan (O, x, y) ($\theta_M \in [0; 2\pi[$) ;
- z_M est la cote du point M ($z_M \in]-\infty; +\infty[$), de la même manière qu'en coordonnées cartésiennes.



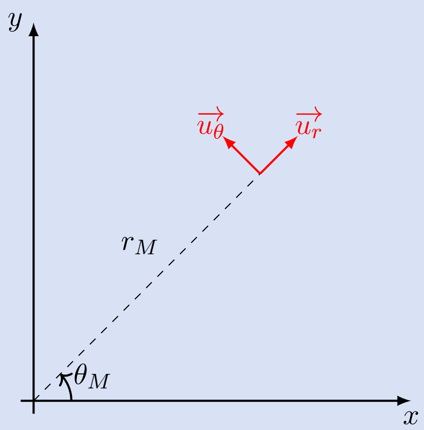
La base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ est la base locale associée au repère cylindrique : elle est orthonormée directe.

☛ *Remarque :* Comme précédemment, on note plutôt r, θ et z les coordonnées d'un unique point M.

Question 2 : Dessiner les surfaces respectives sur lesquelles on a r_M uniforme, θ_M uniforme et z_M uniforme.

Coordonnées polaires

Les **coordonnées polaires** correspondent aux coordonnées cylindriques pour lesquelles on impose un déplacement dans un plan horizontal $z =$ cste.
Ainsi, le point M est uniquement repéré par ses coordonnées r_M et θ_M.



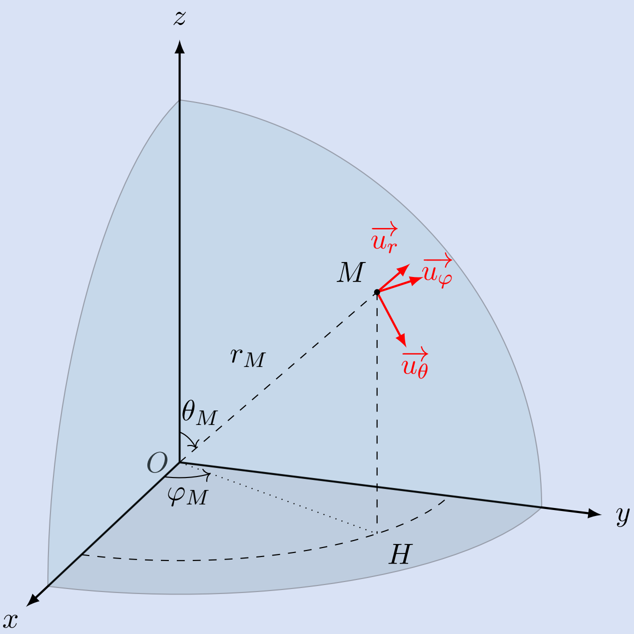
Question 3 : Tracer les bases polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ et cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ en les superposant. Exprimer $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans la base cartésienne.

1.1.4 Coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Soit un repère orthonormé (O, x, y, z) fixé. Les trois **coordonnées sphériques** d'un point M dans un repère orthonormé sont rigoureusement notées r_M, θ_M et φ_M :

- r_M est la distance entre le centre O et le point M ($r_M \in [0; +\infty[$) ;
- θ_M est l'angle formé entre l'axe (O, z) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ ($\theta_M \in [0; \pi[$) ;
- φ_M est l'angle formé entre l'axe (O, x) et le vecteur $\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal du point M dans le plan (O, x, y) ($\varphi_M \in [0; 2\pi[$).



La base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ est la base locale associée au repère sphérique : elle est orthonormée directe. Le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ est orienté du point O vers le point M ; le vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$ est orienté du nord vers le sud ; le vecteur $\overrightarrow{u_\varphi}$ est orienté de l'ouest vers l'est.

☛ *Remarque :* Comme précédemment, on note plutôt r, θ et φ les coordonnées d'un unique point M.

☛ *Remarque :* Attention, les bornes de l'intervalle de définition de θ_M ne sont pas les mêmes en coordonnées cylindriques et sphériques !

Question 4 : Dessiner les surfaces respectives sur lesquelles on a r_M uniforme, θ_M uniforme et φ_M uniforme.

1.2 Mouvements particuliers

1.2.1 Mouvements en coordonnées cartésiennes

Vecteur-vitesse

On définit le **vecteur-vitesse** $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ d'un point M dans un repère $\mathcal{R}$ à partir de son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

Le vecteur-vitesse est tangent, en tout point, à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement.
Si la norme $||\vec{v}(M/\mathcal{R})||$ est constante, le mouvement du point est **uniforme**.
Si le vecteur $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ a une direction constante, le mouvement du point est **rectiligne**.

Question 5 : Exprimer $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ en fonction de $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$.

Vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes

Le vecteur-vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{x}(t).\overrightarrow{e_x} + \dot{y}(t).\overrightarrow{e_y} + \dot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$$

☛ *Remarque :* Pour un mouvement vertical, on aura toujours $\vec{v} = \dot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$, que l'axe (O, z) soit vers le haut ou vers le bas ! $\dot{z}(t)$ est une fonction pouvant être positive ou négative, et le vecteur-vitesse sera donc automatiquement dans le bon sens, quel que soit le sens du vecteur $\overrightarrow{e_z}$. Il ne faut donc jamais chercher à écrire $\vec{v} = -\dot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$, même si votre intuition vous dit le contraire.

Question 6 : Soient deux points O et O' fixes l'un par rapport à l'autre dans le référentiel $\mathcal{R}$. Montrer que le vecteur-vitesse ne dépend pas, en coordonnées cartésiennes, du choix de l'origine du repère (en d'autres termes : montrer que $\vec{v}(M/O) = \vec{v}(M/O')$.

Vecteur-accélération

On définit le **vecteur-accélération** $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ d'un point M dans un repère $\mathcal{R}$ à partir de son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ ou de son vecteur-vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

Question 7 : Exprimer $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ en fonction de $a_x \triangleq \ddot{x}$, $a_y \triangleq \ddot{y}$ et $a_z \triangleq \ddot{z}$.

Vecteur-accélération en coordonnées cartésiennes

Le vecteur-accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \ddot{x}(t).\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}(t).\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$$

☛ *Remarque :* Même remarque que pour le vecteur-vitesse : on n'a jamais $\vec{a} = -\ddot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$...

Soit le vecteur-position $\overrightarrow{OM}(t) = v_0 t.\overrightarrow{u_x} + (y_0 + \frac{1}{2}at^2).\overrightarrow{u_y} + z_0.\overrightarrow{u_z}$.

Question 8 : Déterminer la position initiale du point M.

Question 9 : Exprimer le vecteur-vitesse puis le vecteur-accélération du point M.

1.2.2 Mouvements circulaires

On étudie le mouvement d'un point M autour d'un point O fixe ; on paramètre M par ses coordonnées polaires r et θ. On rappelle notamment que l'on a $\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta).\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta).\overrightarrow{u_y}$ avec $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ les vecteurs unitaires fixes du repère cartésien.

Question 10 : Exprimer le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ dans la base polaire.

Question 11 : En déduire le vecteur-vitesse $\vec{v}(M)$ du point M en fonction de r, $\dot{r} \triangleq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, $\dot{\theta} \triangleq \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ et des vecteurs de la base polaire.

Question 12 : Dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon R, comment se simplifie l'expression du vecteur-vitesse ? Tracer l'allure de la trajectoire et du vecteur-vitesse.

Vitesse angulaire

La grandeur $\dfrac{\mathrm{d}\theta_M}{\mathrm{d}t}$ est généralement notée ω_M. On l'appelle **vitesse angulaire** ; son unité SI est le radian par second $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

☛ *Remarque :* La vitesse angulaire s'exprime souvent en tours par minutes.

Question 13 : Convertir $1\,\mathrm{tour/min}$ en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Vitesse instantanée pour un mouvement circulaire

Si un point M de vitesse angulaire ω_M décrit un mouvement circulaire de rayon R, sa **vitesse instantanée** vaut :

$$v(M) = R \times \omega_M$$

On se place, pour le reste des questions, dans le cas où la vitesse angulaire est constante : $\omega = \text{cste} = \omega_0$.

Question 14 : Donner alors l'expression de $\theta_M(t)$ en fonction de ω_0, de t et d'une constante d'intégration C.

Question 15 : Quelle est alors la durée T nécessaire à faire un tour de cercle ? En déduire l'expression de la fréquence $f \triangleq \dfrac{1}{T}$.

Période et fréquence pour un mouvement circulaire périodique

Si un point M décrit un mouvement circulaire de rayon R et de vitesse angulaire constante ω, alors :

- Le mouvement est **périodique** ;
- La **période** T nécessaire à faire un tour de cercle est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$;
- La **fréquence de rotation** est $f \triangleq \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

On a donc notamment : $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ À quelle(s) condition(s) un système matériel peut-il se ramener à l'étude de son centre de masse ?
- ☐ Soit le vecteur-position $\overrightarrow{OM}(t) = a \times t^2.\overrightarrow{u_x} + b \times e^{-t/\tau}.\overrightarrow{u_y} - c \times \cos(\omega t).\overrightarrow{u_z}$ exprimé dans la base cartésienne. Déterminer son vecteur-vitesse puis son vecteur-accélération.
- ☐ Définir les coordonnées cylindriques et sphériques ainsi que leurs intervalles respectifs. On fera un schéma pour chaque cas.
- ☐ Exprimer les vecteurs de la base cylindrique dans la base cartésienne.
- ☐ Déterminer la valeur de la vitesse d'un point M effectuant un mouvement circulaire de rayon $R = 30\,\mathrm{cm}$ à la vitesse angulaire $\omega = 150\,\mathrm{tours/min}$.
- ☐ Donner les relations liant période de rotation T, fréquence de rotation f et vitesse angulaire ω, ainsi que leurs unités respectives.

Chapitre 2 : Chutes libres

Objectifs :

— Exprimer les vecteurs position et vitesse en fonction du temps lors d'un mouvement à vecteur accélération constant. Y établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

— Déterminer les caractéristiques d'une force d'expression donnée.

— Établir un bilan des forces et en rendre compte sur un schéma.

— Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.

— Citer quelques exemples de référentiels d'étude usuels pouvant être considérés comme galiléens.

— Exploiter le principe des actions réciproques.

— Énoncer et exploiter le principe fondamental de la dynamique :

  — Dans le cas d'un mouvement unidirectionnel d'un point matériel.

  — Dans le cas d'un mouvement plan d'un point matériel soumis à une force constante.

— Mettre en équation le mouvement de chute libre sans frottement d'un point matériel.

2.1 Référentiels et principe d'inertie

Afin de décrire un mouvement, il est nécessaire d'avoir deux références :

— Une référence spatiale, car il n'y a pas de mouvement absolu : on bouge toujours par rapport à quelque chose. Par exemple, le train avance par rapport au quai, qui recule par rapport au train. Le voyageur à son bord ne bouge en revanche pas par rapport au train ;

— Une référence temporelle, car il faut comparer les positions relatives entre deux instants au cours du mouvement.

On utilise, le plus souvent, trois référentiels usuels :

— Le référentiel terrestre, parfois appelé référentiel du laboratoire, lié à la surface de la Terre. C'est le référentiel dont on se fait l'idée intuitivement lors d'un mouvement observable à nos yeux ;

— Le référentiel géocentrique, ayant le centre de la Terre pour point fixe et des axes dirigés vers trois étoiles lointaines. Il est adapté pour étudier les mouvements de corps autour de la Terre (Lune, satellites...) ;

— Le référentiel héliocentrique, ayant le centre du Soleil pour point fixe et des axes dirigés vers trois étoiles lointaines. Il est adapté pour étudier les mouvements des astres autour du Soleil (planètes) ou du système solaire.

Principe d'inertie (ou première loi de Newton)

Soit un point matériel isolé ou pseudo-isolé [a]. Il existe une classe de référentiels, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels ce point a un mouvement rectiligne uniforme.

a. Un corps est isolé s'il n'est soumis à aucune force, et pseudo-isolé si les forces qu'il subit se compensent. Le premier cas est impossible physiquement, et le deuxième approchable, comme nous le verrons dans les exercices.

Remarque : Cela signifie tout simplement que dans un certain référentiel, un objet continue en ligne droite et sans accélérer ou ralentir si la résultante des forces s'appliquant sur celui-ci est nulle.

Mouvement relatif de deux référentiels galiléens

Si on considère deux référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, tout point matériel animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_1$ sera également en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}_2$.
En d'autres termes, si un référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen, alors tout référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ sera galiléen.

Question 1 : Le référentiel terrestre est-il en translation rectiligne uniforme avec un quelconque autre référentiel ? Quelle condition doit-on alors vérifier pour que le référentiel terrestre soit galiléen ?

2.2 Actions, interactions et forces

2.2.1 Les interactions fondamentales

On dit que deux systèmes interagissent quand ils exercent une influence l'un sur l'autre. L'ensemble des phénomènes observés en physique font intervenir quatre types d'interactions fondamentales, a priori très différentes.

Les deux interactions les plus connues et immédiatement perceptibles sont :

— la gravitation qu'exerce et ressent tout système physique. C'est elle qui est notamment responsable du champ de pesanteur terrestre et du mouvement des planètes. Elle joue un rôle très important en astrophysique, où elle domine dans de nombreuses situations ;

— l'interaction électromagnétique qui n'existe qu'entre des objets chargés électriquement ou aimantés. C'est elle qui est responsable de la cohésion des atomes et molécules mais aussi de tous les processus chimiques.

Il existe toutefois deux autres interactions plus complexes et se manifestant de façon moins évidente :

— l'interaction (nucléaire) faible qui est responsable de certains types de radioactivité et dont il a été montré dans les années 1960–1970 qu'elle formait avec l'interaction électromagnétique deux facettes d'une seule et même interaction plus fondamentale, l'interaction électrofaible ;

— l'interaction de couleur qui s'exerce entre quarks et qui explique l'interaction (nucléaire) forte, responsable de la cohésion des noyaux atomiques.

Les deux premières interactions sont de portées illimitées : tous objets de l'Univers sont en interaction gravitationnelle, voire électromagnétique s'ils sont chargés. Les interactions faible et de couleur sont cependant de portées limitées, ne dépassant pas la taille du noyau d'un atome.

2.2.2 Des interactions aux forces

Action mécanique et force

On appelle action mécanique toute action, exercée par un système extérieur et pouvant modifier, provoquer ou empêcher le mouvement d'un objet.
Une action mécanique exercée sur un point matériel est modélisée par un vecteur-force : sa norme correspond à l'intensité de la force, sa direction et son sens traduisent ceux de l'action. L'unité du Système International pour la force est le newton N.

Principe des interactions (ou d'action-réaction, ou troisième loi de Newton)

Si deux points A et B sont en interaction, alors la force exercée par A sur B s'oppose à celle exercée par B sur A. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

Question 2 : Que peut-on en conclure sur les normes des deux forces ?

2.2.3 Exemples de forces

Poids

Poids

Au voisinage de la Terre, un corps subit une force appelée **poids** (noté $\vec{P}$), qui est proportionnelle à sa masse :

$$\vec{P} = m.\vec{g}$$

où $\vec{g}$ est le **champ de pesanteur**, vertical et orienté vers le bas.
On considère généralement $\vec{g}$ uniforme, de norme $g = 9{,}81\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. Son origine principale est l'attraction gravitationnelle de la Terre.

Force de rappel d'un ressort

Force de rappel d'un ressort

Un ressort linéaire est caractérisé par sa longueur au repos ℓ_0 et sa constante de raideur k. Dans le modèle idéal, il est de masse négligeable et toute variation de sa longueur ℓ produit sur chacune de ses extrémités la force :

$$\overrightarrow{F_r} = k(\ell - \ell_0).\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire à choisir avec attention.

☛ *Remarque :* Dans la parenthèse, il s'agit bien de $\ell - \ell_0$, avec ℓ la longueur du ressort. Pour un bon nombre d'exercices, ℓ sera souvent assimilée à la position d'une extrémité du ressort (par exemple, figure 5.1) ; cependant, ce n'est pas toujours le cas, et remplacer ℓ par $x(t)$ sans y réfléchir davantage est une erreur courante qui coûte beaucoup de points !

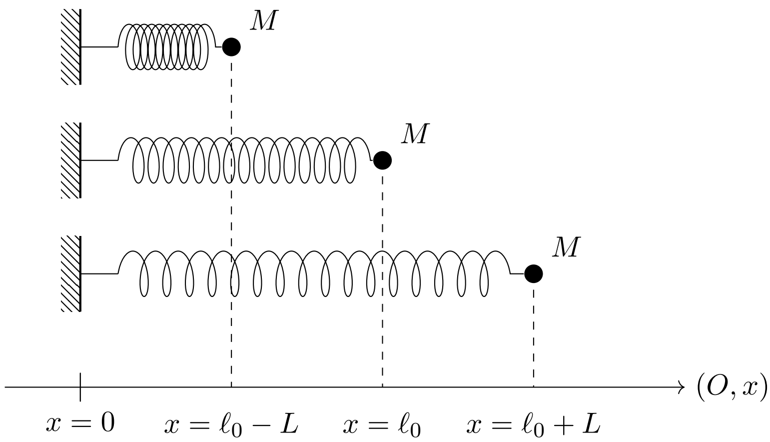


FIGURE 2.1 – Ressort compressé (haut), au repos (milieu) et tendu (bas).

Question 3 : Dans les trois cas ci-dessus, tracer sans souci d'échelle les vecteurs associés à la force de rappel du ressort.

Question 4 : Si $\ell > \ell_0$, dans quel sens la force s'applique-t-elle ? En déduire l'expression de la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F_r}$.

Question 5 : L'expression proposée est-elle cohérente avec les cas $\ell = \ell_0$ et $\ell < \ell_0$?

Force de réaction du support

Force de réaction du support

En l'absence de frottements entre un solide S et son support, la **réaction du support** $\overrightarrow{R}$ est une force orthogonale au support et orientée du support vers le solide :

$$\overrightarrow{R} = R.\overrightarrow{n}_{\text{support}\to S}$$

Sa norme R est *a priori* inconnue.

Force de frottements fluides

Force de frottements fluides (ou visqueux)

Quand un solide S est en mouvement dans un fluide, celui-ci exerce une **force de frottements fluides** (ou **force de frottements visqueux**) de sens opposé au vecteur-vitesse de S. Pour une vitesse suffisamment faible, la norme est proportionnelle à celle de la vitesse :

$$\vec{f} = -\lambda.\vec{v}(S)$$

☛ *Remarque :* Pour les vitesses très élevées, on a $\vec{f} = -\alpha||\vec{v}(S)||.\vec{v}(S)$ (donc de norme $\alpha \times v(S)^2$).

2.3 Principe fondamental de la dynamique

2.3.1 Énoncé

♥ Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Pour un point matériel M de masse constante m se déplaçant à l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soumis à des forces extérieures de somme $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$, le principe fondamental de la dynamique (PFD) peut se simplifier en :

$$m.\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

☛ *Remarque :* Il est primordial d'avoir un référentiel galiléen pour vérifier cette relation. Prenons l'exemple d'un trajet en voiture : si l'on avance à vitesse constante, quitte à négliger les frottements, on ne subira pas les mêmes forces dans sur une ligne droite ou dans un virage. Ce dernier cas fait intervenir des forces d'inertie, qui ne sont pas au programme d'ATS.

Question 6 : Donner la dimension d'une force en fonction des dimensions fondamentales (ici : longueur, masse, temps).

Le PFD est une équation tridimensionnelle (selon trois directions de l'espace), donnant donc trois équations.

Lors d'un mouvement unidirectionnel, la projection du PFD selon la direction du mouvement donnera systématiquement l'équation du mouvement.

2.3.2 Applications du PFD

Lorsque l'on veut étudier le couplage entre forces et mouvement d'un corps, on part quasi-systématiquement du PFD. Cependant, cela doit se faire en un certain nombre d'étapes :

1. On définit le système étudié ;
2. On choisit un référentiel (en s'assurant qu'on puisse le supposer galiléen, en ATS [1]) ;
3. On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au système dans le référentiel, et on exprime chacune des forces associées dans une base quelconque ;
4. Application mathématique du PFD.

2.4 Applications du principe fondamental de la dynamique aux chutes libres

Chute libre

Une **chute libre** est le mouvement, dans le vide, d'un objet uniquement soumis à la pesanteur.

2.4.1 Chute libre verticale

Soit une balle modélisée par un point matériel M de masse m dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

Initialement, la balle est à la position O, qui constitue l'origine du repère. Cette balle est jetée avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0.\overrightarrow{u_z}$ vers le bas.

On note $z(t)$ la position de la balle à l'instant t par rapport à sa position initiale, l'axe vertical (O, z) étant descendant. Le sol est situé à une distance H du point O.

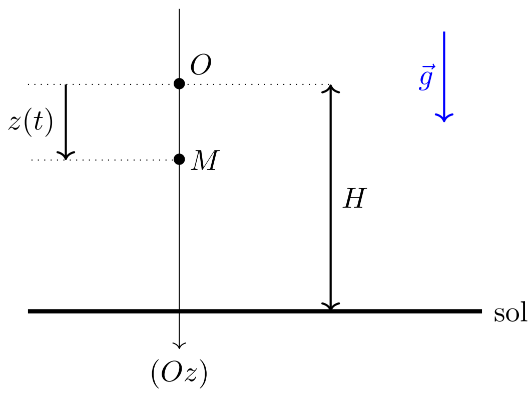


Figure 2.2 – Chute libre verticale d'une balle.

Question 7 : Définir le système étudié ainsi que le référentiel d'étude.

1. La plupart du temps, il suffit de dire que la durée d'étude est « suffisamment courte » pour négliger les effets non-galiléens.

Question 8 : Établir le bilan des forces extérieures exercées sur le système. Les faire apparaître sur le schéma de la figure 2.2.

Question 9 : En appliquant le PFD au système étudié, montrer que l'on a $\ddot{x}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = 0$ et $\ddot{z}(t) = g$. Commenter.

Équation du mouvement

On appelle **équation du mouvement** une équation différentielle portant sur les dérivées temporelles de la position. Elle peut notamment se déterminer à l'aide du principe fondamental de la dynamique (PFD).

☛ *Remarque :* Nous verrons plus tard dans l'année qu'il existe une deuxième loi pour déterminer l'équation du mouvement : il s'agit du théorème de la puissance mécanique (TPM).

Question 10 : En déduire l'expression de $\dot{z}(t)$, en utilisant notamment la condition initiale sur la vitesse de la balle.

Question 11 : En déduire alors l'expression de $z(t)$, en utilisant notamment la condition initiale sur la position de la balle.

Équation horaire

On appelle **équation horaire** une équation explicite donnant l'expression des coordonnées du système d'étude en fonction du temps.

Question 12 : À quel instant t_{impact} la balle touche-t-elle le sol ?

Question 13 : Quelle est la vitesse de la balle à l'instant t_{impact} ?

2.4.2 Chute libre parabolique

Soit une balle modélisée par un point matériel M de masse m dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

Initialement, la balle est à la position $(x = 0, z = H)$. Elle est lancée avec un vecteur-vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale.

On note $z(t)$ l'altitude de la balle et $x(t)$ son abscisse à l'instant t, l'axe vertical (O, z) étant ascendant.

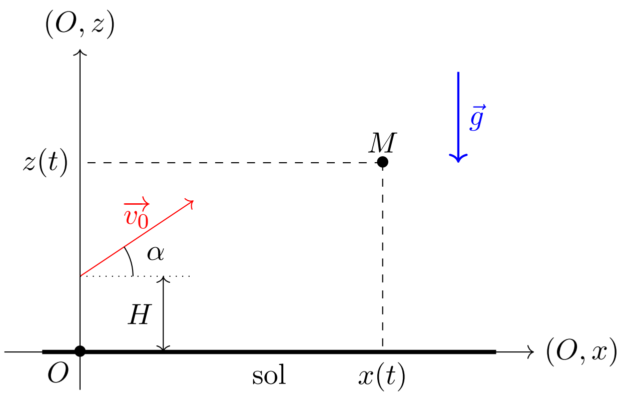


FIGURE 2.3 – Chute libre parabolique d'une balle.

Question 14 : Définir le système étudié ainsi que le référentiel d'étude.

Question 15 : Établir le bilan des forces extérieures exercées sur le système. Les faire apparaître sur le schéma de la figure 2.3.

Question 16 : En appliquant le PFD au système étudié, montrer que l'on a $\ddot{x}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = 0$ et $\ddot{z}(t) = -g$. Commenter.

Question 17 : Montrer, en primitivant deux fois l'équation du mouvement selon l'axe (O, y), que le mouvement se fera dans le plan (O, x, z).

Question 18 : Exprimer le vecteur-vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$.

Question 19 : Déterminer l'équation horaire portant sur $x(t)$.

Question 20 : Déterminer l'équation horaire portant sur $z(t)$.

Question 21 : Quelle est l'altitude maximale z_{max} atteinte par la balle ?

Équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes

Pour un mouvement dans un plan cartésien (O, x, z), on appelle **équation de la trajectoire** l'équation exprimant z en fonction de x.

Question 22 : Isoler t dans l'expression de $x(t)$. La réinjecter dans l'expression de z, et en déduire l'équation de la trajectoire.

Question 23 : Justifier que l'on parle de trajectoire parabolique dans ce cas.

Question 24 : Déterminer numériquement la portée du tir, c'est-à-dire la valeur maximale de x.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ? Donner trois référentiels usuels. À quelle(s) condition(s) ces référentiels sont-ils galiléens ?
- ☐ Énoncer le principe des actions réciproques.
- ☐ Énoncer le principe fondamental de la dynamique ainsi que ses conditions d'application.
- ☐ Qu'appelle-t-on équation du mouvement ? Et équation horaire ?
- ☐ Soit un point matériel M de masse m repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une hauteur h avec une vitesse v_0 vers le bas. On néglige tout frottement. Déterminer l'équation horaire $z(t)$.
- ☐ Soit un point matériel M de masse m repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant) et son abscisse $x(t)$; il est initialement situé en $(x = 0, z = 0)$. On le jette avec un vecteur-vitesse initial $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec l'axe horizontal. Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$, puis l'équation de la trajectoire.

Chapitre 3 : Pentes, frottements et oscillations

Objectifs :

— Établir un bilan des forces et en rendre compte sur un schéma.

— Exploiter le principe des actions réciproques.

— Énoncer et exploiter le principe fondamental de la dynamique dans le cas d'un mouvement unidirectionnel d'un point matériel.

— Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la vitesse dans le cas d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse. Déterminer la vitesse limite. Identifier et interpréter le temps caractéristique d'évolution.

— Déterminer, si elle existe, la vitesse limite dans un cas où la force de frottement n'est pas proportionnelle à celle de la vitesse.

— Établir et exploiter l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique non amorti à un degré de liberté. Résoudre cette équation connaissant les conditions initiales du mouvement.

— Établir l'équation différentielle du mouvement d'un système masse-ressort en présence d'une force de frottement dont la valeur est proportionnelle à celle de la vitesse.

— Écrire l'équation différentielle en faisant apparaître la pulsation propre et le facteur de qualité. Résoudre et interpréter les solutions de cette équation différentielle.

— Identifier le régime d'évolution à partir de représentations graphiques des variations de la position ou de la vitesse au cours du temps.

— Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, identifier un temps caractéristique d'amortissement et un temps caractéristique d'oscillation. Relier qualitativement le facteur de qualité au nombre d'oscillations visibles.

3.1 Mouvement d'une brique sur une pente

On considère une pente faisant un angle α par rapport à l'horizontale. La base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ est associée à la verticale locale ; la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ est associée à la pente.

Une brique, modélisée par un point matériel M de masse m, initialement en O, est lancée avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0.\overrightarrow{e_x}$. On néglige les frottements, qu'ils soient dûs à la présence de l'air ou du support.

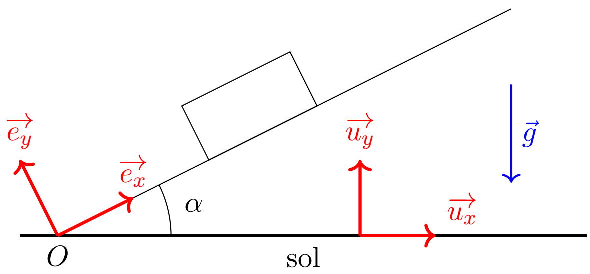


FIGURE 3.1 – Position du problème.

Question 1 : Définir le système étudié ainsi que le référentiel d'étude.

Question 2 : Établir le bilan des forces extérieures exercées sur le système. Les faire apparaître sur le schéma de la figure 3.1.

Question 3 : Dans quelle base est-il plus adapté de paramétrer le mouvement du point M ? Justifier.

Question 4 : Tracer la figure de changement de base, et exprimer les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.

Question 5 : Appliquer le principe fondamental de la dynamique, et le projeter dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.

Question 6 : Commenter la projection selon $\overrightarrow{e_x}$. Déterminer l'instant t_{stop} auquel la brique s'arrête.

Question 7 : Que renseigne la projection selon $\overrightarrow{e_y}$?

3.2 Chute d'un parachutiste

Une parachutiste saute d'une altitude H sans vitesse initiale. L'axe vertical (O, z) est ascendant, et l'altitude $z = 0$ correspond au sol.

La sportive, dont on note l'altitude $z(t)$ et la vitesse $v(t)$, subit une force de frottements proportionnelle à la vitesse et de coefficient λ.

Question 8 : Schématiser le problème en faisant apparaître notamment H et $z(t)$.

Question 9 : Définir le système étudié ainsi que le référentiel d'étude.

Question 10 : Établir le bilan des forces extérieures exercées sur le système. Les faire apparaître sur le schéma précédent.

Question 11 : Déterminer l'équation du mouvement de la parachutiste. En déduire l'expression de $v(t)$ à l'aide des conditions initiales. On posera un temps caractéristique τ et une vitesse limite v_{lim}.

Question 12 : Interpréter les expressions de τ et v_{lim}.

Question 13 : À grande vitesse, la force de frottement s'écrit plutôt $-\beta v.\vec{v}$: elle est proportionnelle à v^2. Déterminer la nouvelle vitesse limite v'_{lim} de la parachutiste.

3.3 Oscillations d'un système masse-ressort

On considère le dispositif représenté sur le schéma ci-dessous. Le point A a une masse m_A et une abscisse x_A ; le point B a une masse m_B et une abscisse x_B.

On néglige la pesanteur et la réaction du support, et on admet qu'une force de frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}(B)$ s'applique uniquement sur le point B.

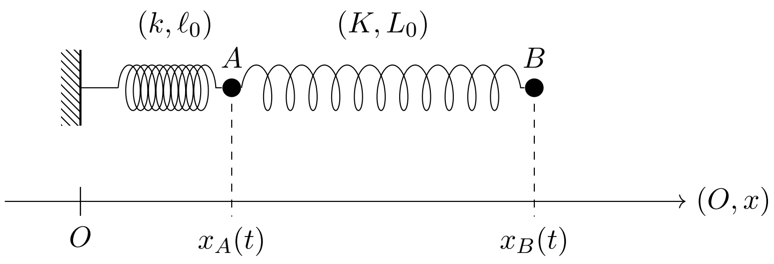


FIGURE 3.2 – Position des ressorts à un instant quelconque.

Question 14 : Déterminer les longueurs ℓ_g et ℓ_d des ressorts de gauche et de droite. Déterminer également les accélérations des points A et B.

Question 15 : Faire le bilan des actions mécaniques s'appliquant sur le point A. Les exprimer explicitement en fonction des données de l'énoncé.

Question 16 : En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer l'équation du mouvement du point A.

Question 17 : Faire le bilan des actions mécaniques appliquées au point B et déterminer également l'équation du mouvement de ce point.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Exercice de la brique.
- ☐ Exercice du parachutiste.
- ☐ Exercice du système masse-ressort.

Chapitre 4 : Équilibre et stabilité d'un point matériel

Objectifs :

— Calculer le travail d'une force constante lors d'un déplacement.

— Reconnaître des situations où le travail d'une force est nul, strictement positif ou strictement négatif.

— Déterminer le travail d'une force conservative à partir de la variation d'énergie potentielle associée.

— Établir l'expression de la force associée à une énergie potentielle de forme connue dans le cas d'un mouvement rectiligne.

— Citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur uniforme et de l'énergie potentielle élastique associée à un ressort.

— Démontrer et exploiter la condition d'équilibre d'un point matériel dans un référentiel galiléen.

— Analyser qualitativement la stabilité d'une position d'équilibre en considérant un petit déplacement au voisinage de celle-ci.

— À partir d'un graphe ou d'une expression analytique de l'énergie potentielle, déterminer les éventuelles positions d'équilibre d'un point matériel et leur stabilité dans un mouvement à un degré de liberté.

— Expliquer qualitativement l'existence d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable dans le cas d'une particule soumise à une force conservative dans un mouvement à un degré de liberté.

4.1 Travail d'une force

Prenons l'exemple d'une voiture roulant sur une pente d'angle β par rapport à l'horizontale (voir figure 4.1). Cette force est soumise à quatre actions mécaniques : son poids $\overrightarrow{P}$, la réaction du support $\overrightarrow{R}$, des frottements fluides $\overrightarrow{f}$ et une force de traction provenant du moteur $\overrightarrow{F_t}$.

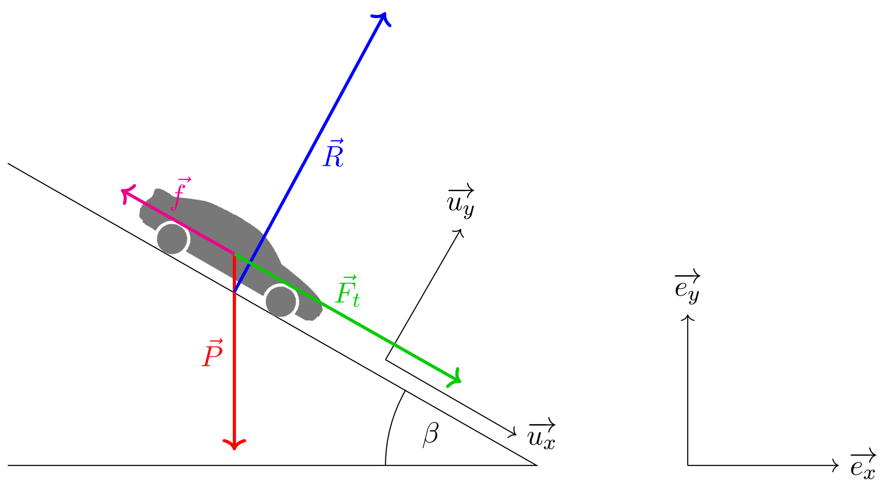


FIGURE 4.1 – Descente d'un voiture selon une pente.

On souhaite évaluer à quel point chaque action mécanique contribue à faire avancer la voiture dans la direction $\overrightarrow{u_x}$.

Question 1 : Répondre qualitativement à cette problématique. On pourra « changer de base » en dirigeant le vecteur $\overrightarrow{u_y}$ selon la verticale ascendante.

Déplacement élémentaire d'un point

On définit le **déplacement élémentaire** $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ d'un point M comme :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}$$

Il s'agit du vecteur-déplacement du point M pendant la durée infinitésimale $\mathrm{d}t$.

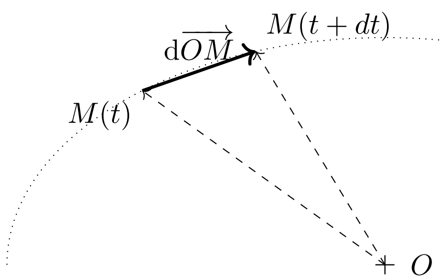


Figure 4.2 – Vecteur-déplacement élémentaire du point M. La trajectoire est représentée en pointillés.

Question 2 : Déterminer l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes.

Travail élémentaire d'une force

On définit le **travail élémentaire $\delta W(\vec{F})$ d'une force** $\vec{F}$ s'appliquant sur un point M comme :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ du point M s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y.\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z.\overrightarrow{e_z}$$

☛ *Remarque :* Le δ présent devant W signifie qu'il s'agit d'une grandeur infinitésimale. On n'utilise pas la lettre d, qui désigne une variation : le travail existe, ou n'existe pas ; on ne peut pas gagner du travail ou en perdre.

Travail d'une force le long d'une trajectoire

Si une force $\vec{F}$, potentiellement dépendante du temps ou de la position du point M, s'applique sur ce dernier le long d'une trajectoire allant de A à B, alors on définit le **travail de la force le long de cette trajectoire** comme :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Ce travail correspond à l'énergie fournie par la force au point M du début (A) jusqu'à la fin (B) du mouvement. Il s'exprime en joules J.
Si $W_{A\to B}(\vec{F}) > 0$, on parle de **travail moteur** ; si $W_{A\to B}(\vec{F}) < 0$, on parle de **travail résistant**.

Question 3 : Montrer que le travail est bien homogène à une énergie.

Question 4 : Déterminer quelles forces appliquées sur la voiture sont motrices et quelles forces sont résistantes. Que dire de la réaction du support ? Est-ce en accord avec les prévisions qualitatives ?

Question 5 : Comment se simplifie l'expression du travail si $\vec{F}$ est constamment orthogonale au déplacement ?

Question 6 : Montrer que, si le vecteur $\vec{F}$ est constant alors $W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Travail d'une force constante le long d'une trajectoire

Soit un point matériel se déplaçant d'un point de départ A à un point d'arrivée B.
Le travail d'une force $\vec{F}$ constante peut alors s'écrire :

$$W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

quelle que soit la trajectoire parcourue entre A et B.
Ainsi, si α est l'angle entre $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$, on a $W(\vec{F}) = F \times AB \times \cos(\alpha)$.

Question 7 : Calculer le travail du poids sur une distance de $100\,\mathrm{m}$, si l'on a une pente d'angle $\beta = 5°$ et que la voiture a une masse d'une tonne.

4.2 Énergie potentielle

Force conservative

On dit qu'une force $\vec{F}$ est **conservative** si son travail $W_{A \to B}(\vec{F})$ sur un point M ne dépend pas de la trajectoire suivie par ce point mais uniquement des points d'arrivée et de départ.

Question 8 : Montrer que le poids $\vec{P} = -mg.\vec{e_z}$ est conservatif.

Question 9 : Expliquer pourquoi la force de frottements fluides n'est pas conservative.

Énergie potentielle

Toute force conservative $\vec{F_c}$ dérive d'une **énergie potentielle** $\mathcal{E}_p$. Mathématiquement, cela signifie que l'on peut toujours écrire $\delta W(\vec{F_c}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$, où $\mathcal{E}_p$ est une fonction ne dépendant que de la position.

Question 10 : Exprimer le travail élémentaire du poids. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

Énergie potentielle de pesanteur

L'**énergie potentielle de pesanteur** est celle associée au poids d'un corps M de masse m. Notons O le centre du repère et z l'altitude du point M.
Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le haut, on a :

$$\mathcal{E}_{p,\text{pes}} = mgz + \text{cste}$$

Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le bas, on a :

$$\mathcal{E}_{p,\text{pes}} = -mgz + \text{cste}$$

où $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ est l'intensité de la pesanteur.

☛ *Remarque :* Les énergies potentielles sont toutes définies à une constante additive près dont la valeur ne nous intéresse généralement pas. En effet, seules les variations d'énergie potentielle sont pertinentes, car elles retranscrivent une variation d'énergie cinétique, par exemple.

Question 11 : Calculer, en utilisant chacune des deux formules, l'ordre de grandeur de variation de l'énergie potentielle d'un alpiniste allant de la mer jusqu'au au sommet du Mont Blanc (dénivelé d'environ $4800\,\mathrm{m}$). On fera un schéma pour chacun des deux cas.

Question 12 : Supposons que l'axe (O, z) soit ascendant. Comment évolue l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de l'altitude z ? Est-ce cohérent ?

Énergie potentielle élastique

L'**énergie potentielle élastique** est celle associée à la force de rappel d'un ressort sur un point M.
Si l'on note ℓ la longueur du ressort, ℓ_0 sa longueur à vide et k sa constante de raideur, on a :

$$\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}$$

Question 13 : Soit un ressort de constante de raideur $k = 3\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$. Calculer son énergie potentielle élastique pour une longueur $\ell_1 = 5\,\mathrm{cm}$ et pour une longueur $\ell_2 = 15\,\mathrm{cm}$. Commenter.

Question 14 : Pour quelle longueur le ressort a-t-il le moins d'énergie potentielle ? Est-ce cohérent ?

L'énergie potentielle totale d'un système matériel est égale à la somme de chacune des énergies potentielles citées précédemment. Il existe d'autres types d'énergie potentielle (électrostatique, magnétique, gravitationnelle...), qu'il faudrait rajouter si on prend en compte les actions correspondantes.

☛ *Remarque :* Si le système mécanique étudié est constitué de n ressorts, alors il y aura n énergies potentielles élastiques à prendre en compte !

4.3 Équilibre et stabilité

4.3.1 Exemple introductif

Prenons l'exemple d'un skieur se promenant le long d'une chaîne de montagnes. On suppose que son mouvement est unidirectionnel, selon l'axe (Ox). On représente en figure 4.3 sa trajectoire $z(x)$.

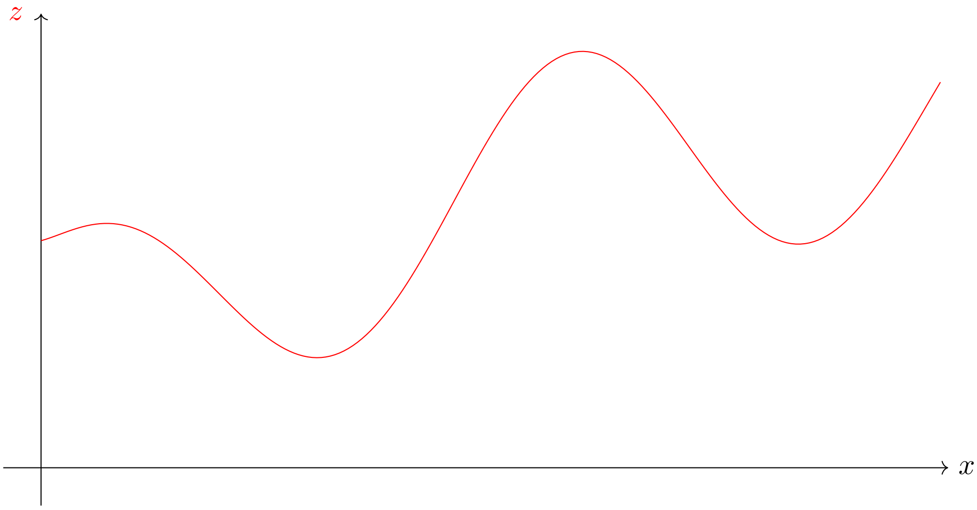


FIGURE 4.3 – Trajectoire du skieur.

Équilibre d'un point matériel

Un point M est **à l'équilibre** mécanique lorsque sa position ne varie pas dans le temps.

Question 15 : Qualitativement, désigner sur la figure 4.3 les différentes positions où le skieur sera à l'équilibre.

Question 16 : Quelles positions d'équilibre peut-on qualifier de stables ? d'instables ?

Question 17 : Expliquer pourquoi la figure 4.3 représente, à un facteur près, l'évolution de l'énergie potentielle de pesanteur du skieur en fonction de sa position.

4.3.2 Généralisation

Soit un point matériel soumis à la résultante des forces $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$ s'appliquant sur lui.

Question 18 : Si le point matériel est à l'équilibre, que peut-on dire du travail $W\left(\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}\right)$ de la résultante de ces forces ?

Question 19 : On suppose que toutes les forces s'appliquant au point matériel à l'équilibre sont conservatives. Quelle conséquence cela impose-t-il sur son énergie potentielle ?

Lien entre les positions d'équilibre et l'énergie potentielle

Dans le cas de forces uniquement conservatives, un point matériel est à l'équilibre si son énergie potentielle est extrémale (minimale ou maximale). Ceci se repère par une pente nulle (tangente horizontale) dans un graphe d'énergie potentielle.

☛ *Remarque :* La traduction de l'équilibre par l'approche de l'énergie potentielle n'est bien valable que pour des systèmes conservatifs ! Si l'on prend en compte des frottements (forces non-conservatives car inassociables à des énergies potentielles), un point matériel glissant sur une table horizontale s'arrêtera à une position d'équilibre qui ne dépend que de la vitesse initiale...

Stabilité d'un équilibre

Une position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ d'un point matériel M est **stable** si, lorsque l'on déplace légèrement le point M, celui-ci revient naturellement vers $x_{\text{éq}}$. Graphiquement, l'énergie potentielle forme un minimum local.
Au contraire, cette position d'équilibre est **instable** si, lorsque l'on déplace légèrement le point M, celui-ci s'éloigne naturellement de $x_{\text{éq}}$. Graphiquement, l'énergie potentielle forme un maximum local.

4.4 Complément sur le potentiel harmonique

On a étudié dans ce chapitre une énergie potentielle du type $\mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}k(x-\ell_0)^2$, qui est une fonction positive et parabolique. Ce type d'énergie potentielle est appelé « potentiel harmonique ». Comment expliquer que l'on souhaite étudier ce type de potentiel en particulier ?

Prenons comme exemple une énergie potentielle quelconque (figure 4.4) dépendant d'une variable x.

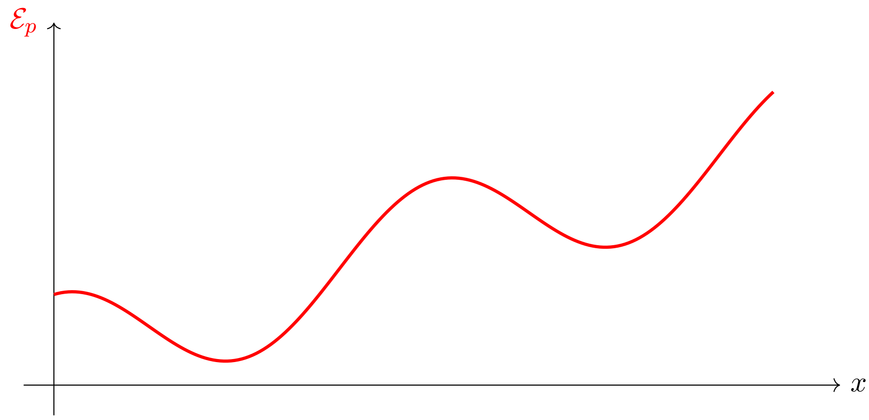


FIGURE 4.4 – Énergie potentielle quelconque d'un système.

On observe que cette énergie potentielle possède notamment des minima locaux, qui correspondent donc à des positions d'équilibre stables. Vers ces positions d'équilibre, on a l'impression d'observer localement des arcs de parabole (figure 4.5)... et donc des potentiels harmoniques !

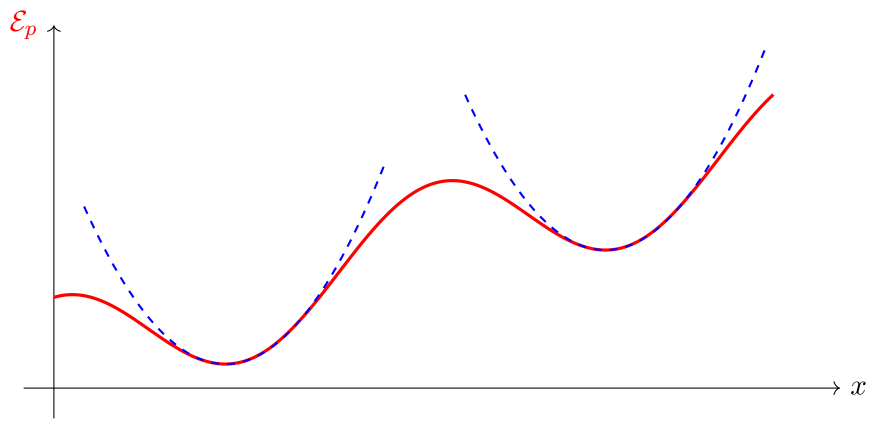


FIGURE 4.5 – Approximation harmonique des minima locaux de l'énergie potentielle. Les courbes bleues en traitillés sont, par construction, des paraboles épousant d'autant bien l'énergie potentielle que l'on est proche des minimas.

Cette modélisation devient de plus en plus mauvaise lorsque l'on s'éloigne des positions d'équilibre... mais sont une très bonne approximation lorsqu'on en est proche.

Cette propriété provient d'un résultat mathématique, appelé développement de Taylor. Si l'on est suffisamment proche d'un point quelconque a, on peut écrire :

$$\mathcal{E}_p(a+x) \approx \mathcal{E}_p(a) + (x-a) \times \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(a)$$

Or, lorsque le point étudié est une position d'équilibre (c'est-à-dire pour $a = x_{\text{éq}}$), on a $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}(x_{\text{éq}}) = 0$: la tangente en ce point a une pente nulle, et est donc horizontale. Par ailleurs, pour une position d'équilibre stable, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{éq}}) > 0$. Ainsi, on peut écrire :

$$\mathcal{E}_p(x_{\text{éq}} + x) \approx \mathcal{E}_p(x_{\text{éq}}) + \frac{1}{2}K(x - x_{\text{éq}})^2$$

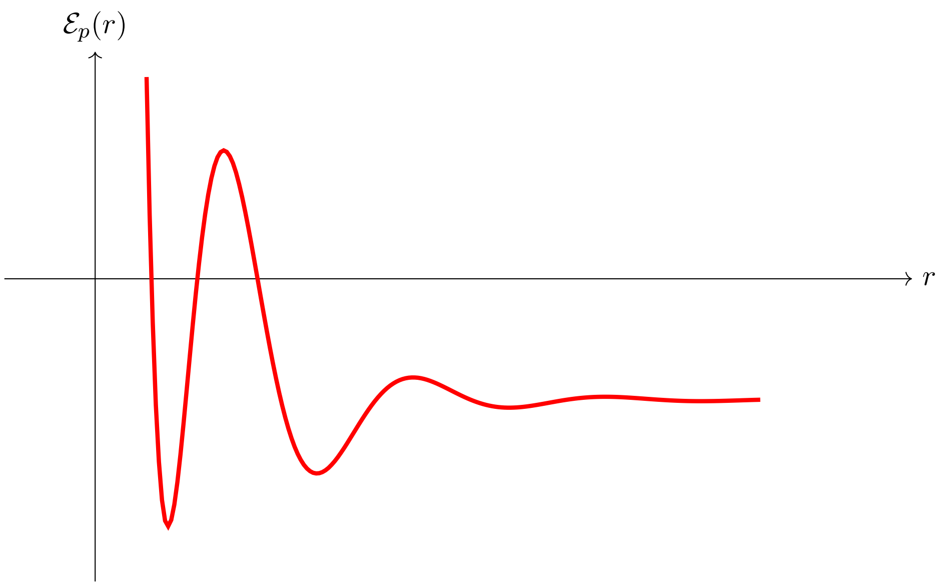
où $K = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{éq}})$ est une constante positive.

On reconnaît ici, à une constante additive [1] $\mathcal{E}_p(x_{\text{éq}})$ près, l'énergie potentielle élastique du chapitre : $\mathcal{E}_{p,\text{éq}} = \dfrac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$, où ℓ_0 était bien la position d'équilibre du système.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Définir le travail d'une force ; donner son unité et son interprétation physique.
- ☐ Soit un point matériel de masse $m = 5{,}0\,\text{tonnes}$ et de vitesse $v = 36\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; déterminer son énergie cinétique sans calculatrice.
- ☐ Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur et celle de l'énergie potentielle élastique d'un ressort. Montrer que l'on retrouve l'expression du poids à partir de l'énergie potentielle de pesanteur.
- ☐ Définir l'équilibre d'un système matériel. Comment traduire graphiquement cette condition ?
- ☐ Définir ce qu'est un équilibre stable. Comment traduire graphiquement cette condition ?
- ☐ Définir ce qu'est un équilibre instable. Comment traduire graphiquement cette condition ?
- ☐ Déterminer, sur le graphe d'énergie potentielle ci-dessous, les positions d'équilibre ainsi que leurs stabilités.



1. On rappelle que l'énergie potentielle est toujours définie à une constante près, car seules les variations d'énergie potentielle ont du sens.

Chapitre 5 : Théorèmes énergétiques

Objectifs :

— Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour déterminer des paramètres du mouvement d'un point matériel.

— Identifier les cas de conservation de l'énergie mécanique.

— Dans une situation à un degré de liberté, exploiter l'expression analytique de l'énergie potentielle ou une représentation graphique de celle-ci pour déterminer des caractéristiques du mouvement d'un point matériel, son énergie mécanique étant connue.

— Énoncer et exploiter le théorème de la puissance mécanique en présence de forces non conservatives.

— Déterminer des caractéristiques du mouvement connaissant l'énergie mécanique du système.

— Exprimer l'énergie mécanique d'un oscillateur en fonction de l'amplitude des oscillations.

— Représenter les variations en fonction du temps des énergie potentielle, cinétique et mécanique d'un oscillateur harmonique non amorti.

5.1 Théorème de l'énergie cinétique

Soit un point matériel M de masse m, soumis à des forces extérieures $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$. On se place dans un référentiel galiléen.

Question 1 : Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point M en fonction de sa vitesse $\vec{v}$, puis effectuer le produit scalaire de cette équation avec le déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. Que reconnaît-on dans le membre de droite de l'équation ?

Question 2 : En observant que $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{v}.\mathrm{d}t$ et que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}\vec{u}^2\right)$, déterminer ce que devient le membre de gauche de l'équation.

Énergie cinétique d'un point matériel

Soit un point matériel de masse m et de vitesse instantanée v. L'**énergie cinétique** de ce point matériel est :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Elle s'exprime en joule J dans le système international.

Question 3 : Intégrer les deux membres de l'équation entre le début du mouvement et la fin du mouvement.

Théorème de l'énergie cinétique

Soit un point matériel soumis à des forces extérieures $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ dans un référentiel galiléen. Le **théorème de l'énergie cinétique** énonce que la variation de l'énergie cinétique de ce point matériel est égale à la somme des travaux échangés avec l'extérieur :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \sum W\left(\vec{F}_{\text{ext}}\right)$$

Question 4 : On suppose que la force de traction compense exactement la force de frottement à tout instant. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse de la voiture après avoir parcouru une distance de $100\,\mathrm{m}$. On supposera que la vitesse initiale de la voiture est nulle.

5.2 Théorème de la puissance mécanique

Puissance d'une force

Soit M un point matériel en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et soumis à une force $\vec{F}$. La **puissance** de $\vec{F}$ dans $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Ainsi, si l'on note α l'angle entre la vitesse et la force, on a $\mathcal{P}(\vec{F}) = Fv\cos(\alpha)$.
Dans le système international, la puissance s'exprime en watt W.

Puissance motrice, puissance résistante

- Si la puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ est positive, on dit que la force est **motrice** ;
- Si la puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ est négative, on dit que la force est **résistante**.

Intéressons-nous à un point matériel M se déplaçant dans l'espace. On note O l'origine du repère d'étude.

Question 5 : Montrer que la puissance d'une force est bien homogène au rapport d'une énergie par une durée.

Question 6 : On rappelle que $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$. Montrer qu'il existe un lien simple entre la puissance d'une force $\vec{F}$ et son travail élémentaire.

Lien entre le travail élémentaire d'une force et sa puissance

Soit une force $\vec{F}$ appliquée sur un point matériel M. Le travail élémentaire échangé avec M au cours d'une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ peut s'exprimer en fonction de la puissance de la force :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}) \times \mathrm{d}t$$

Prenons un point matériel M de masse m. Celui-ci est soumis à des forces extérieures, conservatives ou non. On peut donc écrire que $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{c}}} + \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{nc}}}$.

Si l'on se place dans un référentiel galiléen, le PFD donne alors que $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{c}}} + \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{nc}}}$, ou encore :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{c}}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{nc}}}$$

Question 7 : Effectuer le produit scalaire de cette équation avec la vitesse $\vec{v}(M)$. Que reconnaît-on dans le membre de droite de l'équation ?

Question 8 : En utilisant la définition de la vitesse $\vec{v}$, montrer que le second terme du membre de gauche peut s'écrire $-\sum \dfrac{\delta W(\vec{F_{\text{ext}}^{c}})}{\mathrm{d}t}$. Y reconnaître la dérivée temporelle de l'énergie potentielle.

Énergie mécanique

L'**énergie mécanique** d'un point M est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

Question 9 : Montrer que le membre de gauche de l'équation peut se réécrire simplement : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t}$.

Théorème de la puissance mécanique

Soit un système matériel d'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et soumis à des forces non conservatives extérieures de puissance $\mathcal{P}_{\text{n.c.}}^{\text{ext}}$.
Le **théorème de la puissance mécanique** énonce alors que la puissance de ces forces non-conservatives modifie la valeur de l'énergie mécanique du système au cours du temps :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{n.c.}}^{\text{ext}}$$

☛ *Remarque :* Le théorème de la puissance mécanique est analogue au principe fondamental de la dynamique lorsque l'on souhaite déterminer une équation du mouvement. Il est donc bien pratique lorsque l'on ne souhaite pas projeter des équations...

Considérons un système composé d'un point matériel M, de masse m, relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Ce ressort possède une extrémité fixe liée au bâti (figure 5.1, haut).

On étudiera uniquement le mouvement horizontal du point M, en négligeant par exemple son poids ou bien en considérant que celui-ci se compense avec une éventuelle réaction du sol.

On décide de déplacer le point M vers la droite, à une distance L de sa position initiale : le ressort est en extension (figure 5.1, bas). On note $x(t)$ la position horizontale du point M à l'instant t, et on lâche le ressort à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale.

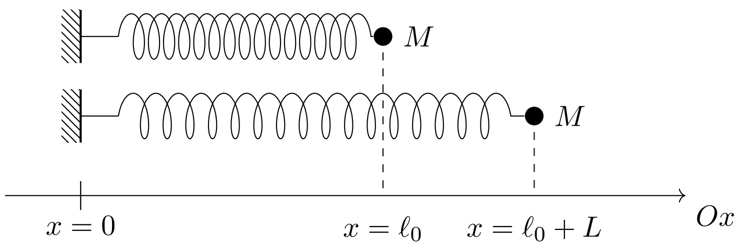


FIGURE 5.1 – Ressort au repos (haut) et tendu à $t = 0$ (bas).

Question 10 : Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de x, $\dot{x}$, ℓ_0, k et m.

Question 11 : Quelles sont les forces extérieures s'appliquant sur le point M ? Sont-elles conservatives ?

Question 12 : En déduire que l'on vérifie l'équation suivante : $m\dot{x}\ddot{x} + k(x - \ell_0)\dot{x} = 0$. On utilisera notamment le fait que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(t)^2\right) = 2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \times u(t)$.

Question 13 : Mettre l'équation du mouvement sous forme canonique.

Question 14 : En utilisant les conditions initiales, exprimer $x(t)$ en fonction de ℓ_0, L, ω_0 et t.

5.3 Conservation de l'énergie mécanique

Question 15 : Montrer que si toutes les forces extérieures sont conservatives ou à puissance nulle, alors l'énergie mécanique est conservée.

Conservation de l'énergie mécanique

Si un système n'est soumis qu'à des forces extérieures conservatives, alors son énergie mécanique est **conservée** au cours du temps :

$$\mathcal{E}_m = \text{cste}$$

☛ *Remarque :* Dans tous les problèmes de mécanique ne faisant pas intervenir de frottements, il faut penser le plus rapidement possible à utiliser la conservation de l'énergie, qui est une méthode très rapide et efficace pour déterminer les positions où la vitesse est nulle ou bien la vitesse à un point précis.

Question 16 : Quel est le signe de l'énergie cinétique ? En déduire une inégalité entre l'énergie potentielle et l'énergie mécanique.

Positions accessibles

Les **positions accessibles** à un système matériel sont celles vérifiant $\mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_m$.

Question 17 : Soit une balle de masse m lâchée sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur. On néglige tout frottement de l'air. Quelles sont les positions accessibles à la balle ?

Revenons sur le système masse-ressort étudié précédemment. L'équation différentielle et les conditions initiales nous donnent l'expression de $x(t)$:

$$x(t) = \ell_0 + L \times \cos(\omega_0 t)$$

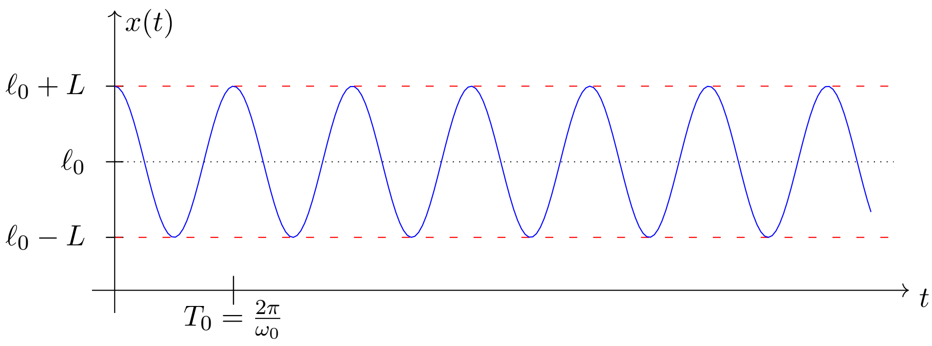


FIGURE 5.2 – Position horizontale $x(t)$ du point M en fonction du temps t

On observe que le point M oscille indéfiniment entre les positions $\ell_0 - L$ et $\ell_0 + L$. On dit que L est **l'amplitude** du mouvement du point M, et ℓ_0 **la position d'équilibre** du point M.

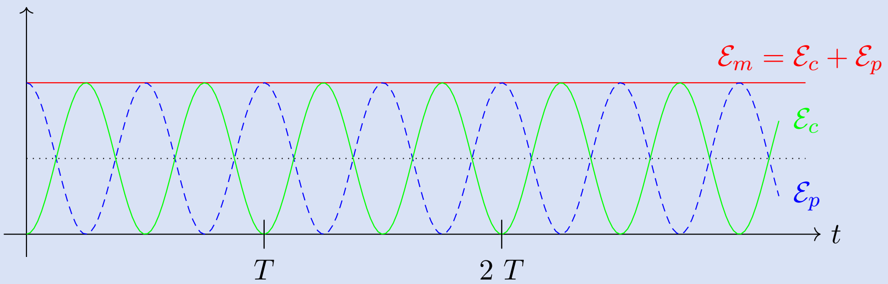
Question 18 : Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du point M en fonction de m, L, ω_0 et t.

Question 19 : Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système en fonction de k, L, ω_0, t.

Question 20 : Déterminer alors l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du système {masse + ressort}, et montrer qu'elle est indépendante du temps (rappel : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$).

Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique

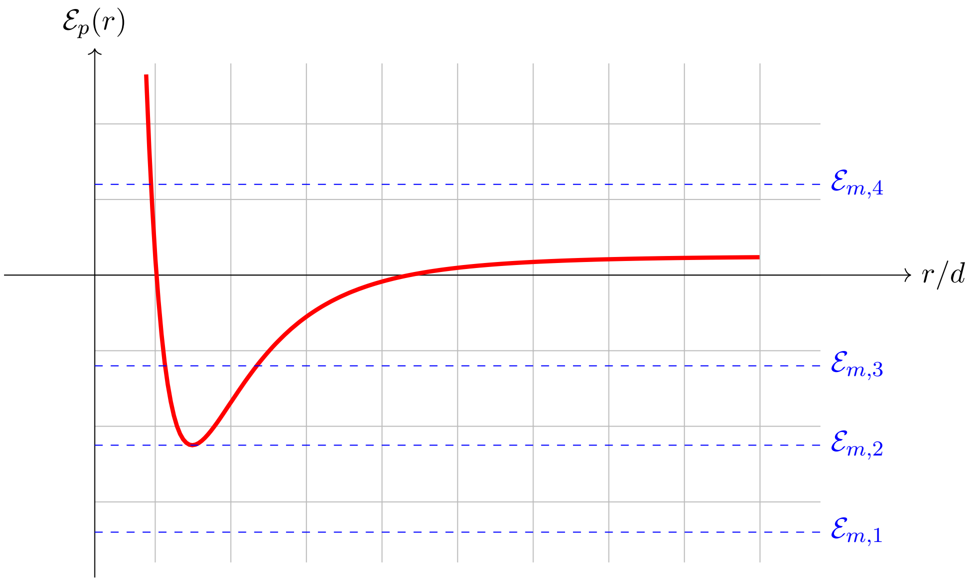
L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ d'un oscillateur harmonique est une constante : quel que soit l'instant, sa valeur sera identique. Ceci retranscrit le fait que le système ne subit aucun frottement : aucune perte énergétique n'est à déplorer !
On en déduit également que l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ (et donc la vitesse v) du système diminue lorsque son énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ augmente, et inversement.



Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Définir la puissance d'une force ; donner son unités et le lien avec le travail élémentaire de cette même force.
- ☐ Énoncer le théorème de l'énergie cinétique. En déduire la vitesse d'une balle lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur H juste avant de toucher le sol (on négligera les frottements de l'air).
- ☐ Donner la définition de l'énergie mécanique d'un système. À quelle(s) condition(s) l'énergie mécanique d'un système est-elle conservée ?
- ☐ Énoncer le théorème de la puissance mécanique. En déduire l'équation du mouvement pour une balle chutant dans l'air.
- ☐ Soit un système mécanique dont le graphe de l'énergie potentielle en fontion de la position est donné ci-dessous, avec d une longueur caractéristique :



Déterminer les positions accessibles au système mécanique selon la valeur de son énergie mécanique $\mathcal{E}_m$.