Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 1 : Électrocinétique

Cours

Figure 1 – Physicien italien, Alessandro Volta (1745–1827) est surtout connu pour l'invention de la première pile électrique en 1800, la « pile voltaïque », qui fournit un courant continu stable. Cette invention marque un tournant majeur dans l'histoire de l'électricité : pour la première fois, un dispositif permet de produire de l'électricité sans recours à l'électrostatique. Volta s'est également illustré par ses travaux sur les capacités électriques et les condensateurs. L'unité de tension électrique, le volt V, lui rend hommage.

Figure 2 – Professeur de physique allemand, Georg Simon Ohm (1789–1854) établit en 1827 une relation quantitative entre le courant électrique, la tension et la résistance : c'est la loi d'Ohm. Initialement mal accueillis, ses travaux sont pourtant fondamentaux pour comprendre les circuits électriques. Il a aussi étudié l'acoustique et les conducteurs. En son honneur, l'unité de résistance électrique porte son nom : l'ohm Ω.

Figure 3 – Mathématicien et physicien français, André-Marie Ampère (1775–1836) est l'un des fondateurs de l'électrodynamique. Dès 1820, après les expériences d'Ørsted, il démontre les interactions entre courants électriques et introduit la notion de force électrodynamique. Il formule les lois fondamentales du magnétisme créé par les courants. Il est aussi à l'origine du concept de courant électrique comme mouvement de particules. L'unité d'intensité du courant électrique, l'ampère A, porte son nom.

Table des matières

Chapitre 1 : Circuits en régime permanent

Objectifs :

— Utiliser les lois des nœuds et des mailles.

— Exploiter les caractéristiques courant-tension des dipôles pour déterminer le point de fonctionnement d'un circuit en régime indépendant du temps.

— En régime indépendant du temps, énoncer la relation entre l'intensité du courant et la tension pour une résistance.

— Modéliser une source d'énergie électrique comme l'association d'une source de tension idéale et d'une résistance.

— Relier l'intensité du courant électrique débite par la pile à la capacité électrique de la pile et à la durée d'utilisation. Déterminer l'énergie stockée par une pile, connaissant sa capacité électrique et sa tension.

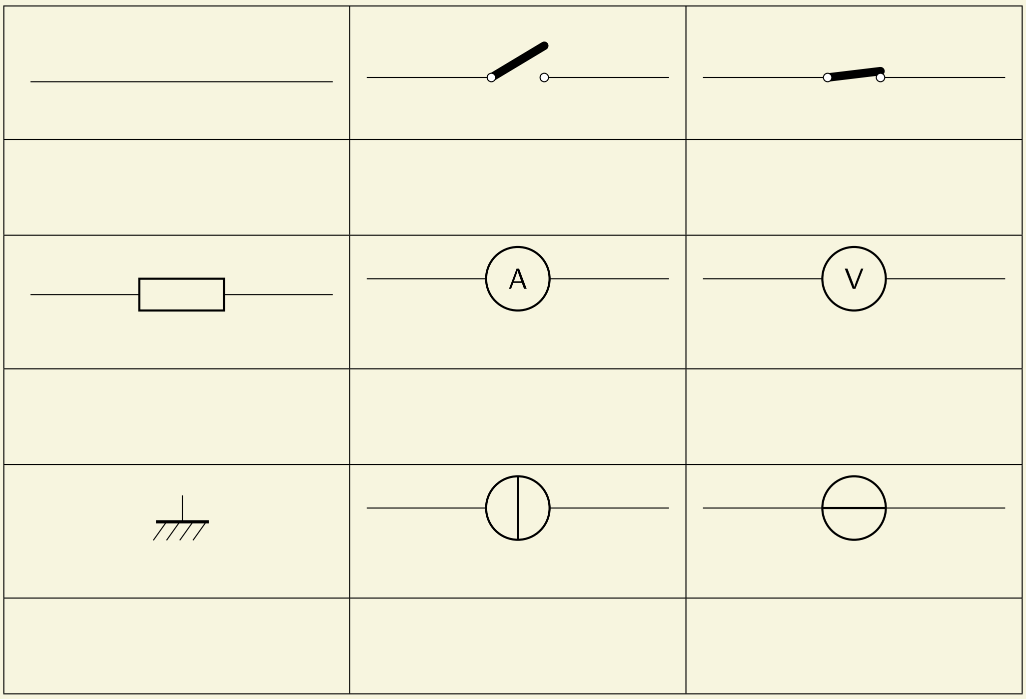
1.1 Grandeurs électriques dans un circuit

On dit qu'un circuit est en **régime permanent** lorsque les grandeurs qui le décrivent (courant électrique, tension électrique...) ne dépendent pas du temps.

1.1.1 Généralités

Dipôles

On appelle **dipôle** un élément possiblement conducteur d'électricité et possédant deux bornes (ou pôles). On définit pour chaque dipôle un symbole permettant de les schématiser.



Un circuit électrique (utile) est composé d'au moins un générateur, un récepteur (résistor, moteur, DEL, etc.) et de fils de connexion. Ainsi, les deux schémas de la figure 1.1 modélisent des circuits électriques.

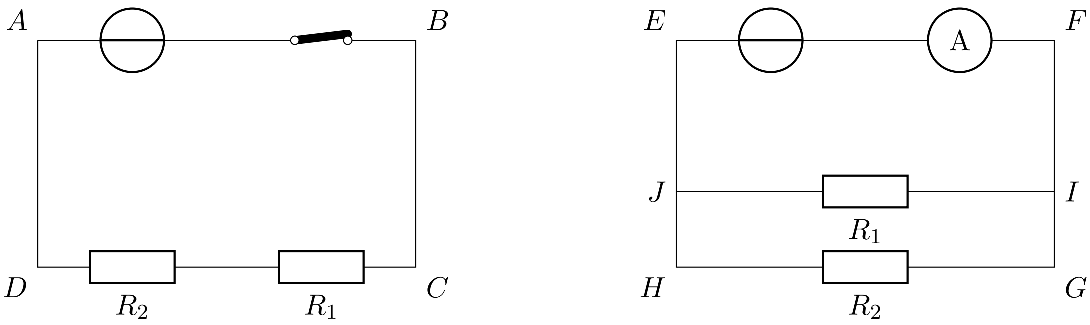
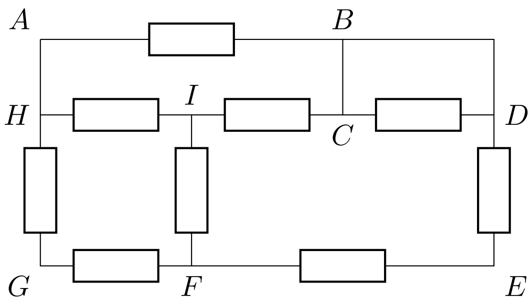


FIGURE 1.1 – Exemples de circuits électriques.

Nœuds et mailles

Un **nœud** est une connexion qui relie au moins trois dipôles entre eux. Par exemples, les points I et J sont des nœuds dans le deuxième circuit de la figure 1.1.
Une **maille** est un chemin fermé dans un circuit électrique. Par exemple, le chemin $ABCDA$ est une maille dans le premier circuit de la figure 1.1.



Question 1 : Entourer en rouge tous les nœuds du circuit ci-contre.

Question 2 : Identifier toutes les mailles du circuit ci-dessus.

Série et dérivation

Deux dipôles sont montés en **série** si aucun nœud n'est présent entre les deux. Par exemple, les résistors du premier circuit de la figure 1.1 sont en série.
Deux dipôles sont montés en **dérivation** [a] si leurs bornes sont connectées aux mêmes nœuds. Par exemple, les résistors du deuxième circuit de la figure 1.1 sont en dérivation.

a. On dit aussi que les dipôles sont montés en **parallèle**.

Question 3 : La source de tension et les deux résistors du premier circuit de la figure 1 sont-ils en série ou en dérivation ?

Question 4 : Que dire de la source de tension et de la résistor de résistance R_1 du deuxième circuit de la figure 1 ?

1.1.2 Charge, courant et loi des nœuds

Charge électrique

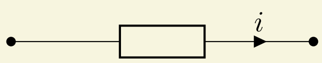
La **charge électrique** est une grandeur physique portée par certains corps qui caractérise leur capacité à créer ou à être influencées par un champ électromagnétique. L'unité de la charge électrique est, dans le Système International, le coulomb C.
Les charges électriques proviennent de la présence d'électrons, de charge électrique négative $q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, et/ou de protons, de charge électrique positive $q_p = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.
On remarque que $q_p = -q_e$: on note alors $e = |q_p| = |q_e|$ la **charge élémentaire** : la charge électrique d'un corps est nécessairement un multiple entier de e. On dit que la charge électrique est **quantifiée**.

Courant électrique

Le **courant électrique** correspond au mouvement d'ensemble de porteurs de charges dans un conducteur. Ceux-ci sont généralement des électrons, qui sont mis en mouvement par un générateur.
L'**intensité i d'un courant électrique**[a] en un point donné se définit à partir du nombre de charges électriques $\mathrm{d}q$ passant par ce point en un temps infinitésimal $\mathrm{d}t$:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

On représente l'intensité du courant i traversant un dipôle par une flèche entrant dans ce dipôle :



L'unité de l'intensité d'un courant est, dans le Système International, l'ampère A.

a. Souvent appelée « intensité électrique », voire « intensité » tout court.

Remarque : Le courant électrique représente par définition le mouvement des charges positives. Seulement, dans la plupart des circuits électriques, les charges se déplaçant sont des électrons de charge négative. Ainsi, lorsqu'on représente un courant allant de la gauche vers la droite, cela signifie en réalité que les électrons vont de la droite vers la gauche...

Faisons à présent une analogie simple avec une canalisation. L'analogue du courant électrique est un courant d'eau d'un certain débit ; les nœuds correspondent alors à des intersections de canalisations (voir figure 1.2).

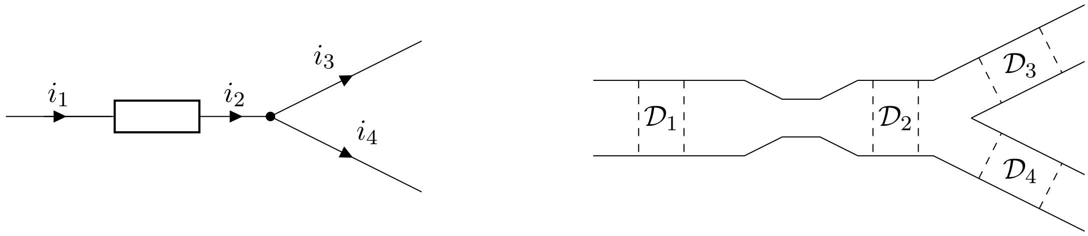


FIGURE 1.2 – Analogie hydro-électrique : les courants i deviennent des débits $\mathcal{D}$.

Question 5 : Que peut-on dire des débits $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, en supposant que l'eau circulant dans les canalisations remplit totalement ces dernières ?

Conservation du courant électrique

Entre deux nœuds, l'intensité du courant électrique est la même, quel que soit le nombre de dipôles que ce courant traverse. En particulier, au sein d'une unique maille ne possédant aucun nœud, l'intensité du courant électrique est en tout point du circuit la même.

Cette propriété est due à la **conservation de la charge électrique** : on ne peut perdre ou créer des charges dans un circuit électrique.

Question 6 : Que peut-on dire des débits $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ par rapport au débit $\mathcal{D}_2$?

Loi des nœuds

La **loi des nœuds** énoncé que la somme des intensités de courant entrant à un nœud est égale à la somme des intensités de courant sortant de ce nœud :

$$\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}$$

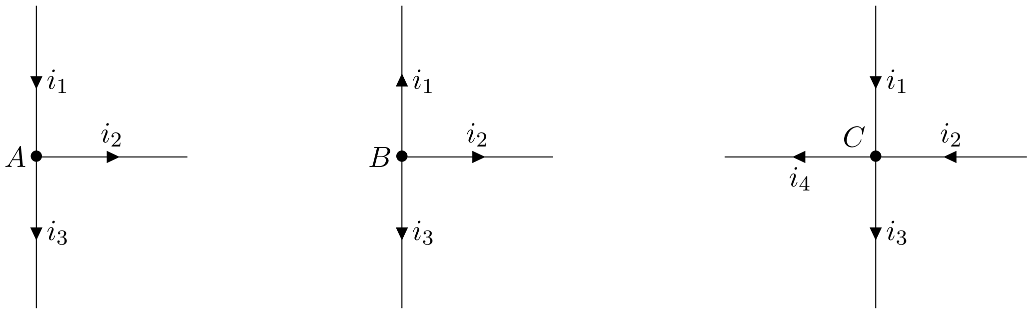


FIGURE 1.3 – Trois nœuds.

Question 7 : En appliquant les lois des nœuds en A, B et C, déterminer dans chaque cas de la figure 1.3 l'expression de i_2 en fonction de i_1, i_3 et i_4.

☛ *Remarque :* L'intensité du courant peut être positive ou négative : cela dépend du sens que l'on définit sans connaissance de cause de la réalité. Par exemple, si l'on mesure ou calcule que i_2 est négative, cela signifie que le courant irait en réalité non pas vers la droite mais vers la gauche.

1.1.3 Potentiel, tension et loi des mailles

Potentiel électrique

Le **potentiel électrique** [a] ϕ est une grandeur définie en tout point de l'espace. Il correspond au rapport entre l'énergie potentielle électrique que possèderait une charge électrique en ce point et sa charge électrique : [b]

$$\phi = \frac{\mathcal{E}_{p,\text{élec}}}{q}$$

a. Plus souvent noté V, mais je ne veux pas de confusion entre le potentiel V et son unité, qui s'avère être le volt que l'on note également V...
b. Le potentiel électrique sera défini plus rigoureusement plus tard dans l'année.

☛ *Remarque :* Le potentiel électrique est en fait défini à une constante additive près : choisir $\varphi' = \varphi + \text{cste}$ ne change pas la description physique du système. En effet, nous verrons que la tension électrique repose sur des différences de potentiels et que l'étude d'un système repose sur les variations (et donc les différences) de son énergie au cours du temps.

☛ *Remarque :* Afin de fixer une origine des potentiels, on décide souvent que la présence d'une masse indique là où le potentiel est égal à $0\,\text{V}$, ce qui simplifie souvent les calculs. Nous aborderons ce point en travaux pratiques.

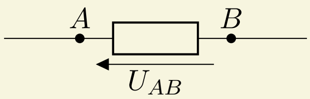
Question 8 : On admet[1] que tout corps a pour but de minimiser son énergie potentielle. Une particule chargée positivement est-elle attirée ou repoussée par les hauts potentiels ? Les faibles potentiels ? Que dire des courants vis-à-vis des potentiels électriques ?

Tension électrique

La **tension électrique** U_{AB} entre deux points A et B est égale à la différence de potentiels entre ces deux points :

$$U_{AB} = \phi_A - \phi_B$$

On la représente, sur un circuit électrique, par une flèche externe au circuit allant du point B au point A.



L'unité de la tension électrique est, dans le Système International, le volt V.

☛ *Remarque :* Comme écrit précédemment, un courant a naturellement tendance à aller des hauts potentiels vers les faibles potentiels. Ainsi, en définissant positivement l'intensité i parcourant un dipôle et la tension U à ses bornes, on aura naturellement i opposé à U. Nous reviendrons sur cette remarque lorsque nous parlerons des conventions récepteur et générateur.

Question 9 : Que peut-on dire de la tension U_{BA} par rapport à la tension U_{AB} ?

☛ *Remarque :* Une tension peut donc être positive ou négative. Une tension peut également être nulle : aux bornes d'un fil, la tension est toujours égale à $0\,\mathrm{V}$.

1. Et on le démontrera en mécanique.

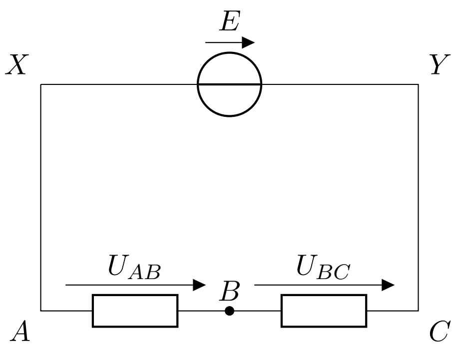


Figure 1.4 – Exemple de circuit électrique.

Question 10 : Montrer que la tension U_{AC} entre les points A et C de la figure 1.4 peut s'exprimer simplement en fonction des tensions U_{AB} et U_{BC} aux bornes des deux dipôles.

Question 11 : Montrer, en extrapolant le résultat précédent, que l'on a $E - U_{AB} - U_{BC} = 0$

Additivité des tensions et loi des mailles

Pour trois points quelconques A, B et C d'un circuit électrique, la **loi d'additivité des tensions** énonce que [a] :

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$$

La **loi des mailles** énonce alors que, dans une maille quelconque $(ABC...YZA)$, la somme des tensions est nulle :

$$U_{AB} + U_{BC} + ... + U_{YZ} + U_{ZA} = 0$$

a. C'est une loi très similaire à la loi de Chasles mathématique.

☛ *Remarque :* Il faut bien faire attention à la définition des tensions dans le circuit. Par exemple, dans la figure 1.5, on a bien $U_{AB}+U_{BC}+U_{CD}+U_{DA} = 0$; en revanche, on n'a pas $u_1+u_2+u_3+u_4 = 0$. En effet, si l'on choisit par exemple le sens horaire pour appliquer la loi des mailles, on aura $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0$.

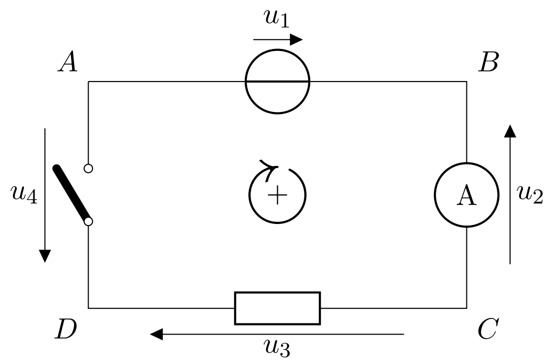


FIGURE 1.5 – Exemple de circuit électrique. Le symbole au centre du circuit explique dans quel sens on « décompte » les tensions électriques : positivement pour celles qui sont orientées dans le sens des aiguilles d'une montre, et négativement pour celles qui sont orientées dans l'autre sens.

1.2 Étude de quelques dipôles

1.2.1 Caractéristique d'un dipôle

Caractéristique d'un dipôle

La **caractéristique d'un dipôle électrique** est la relation [a] existant entre l'intensité i du courant traversant le dipôle et la tension u aux bornes de celui-ci.

a. Au sens mathématique du terme : $i = f(u)$, c'est-à-dire que i dépend de u selon une fonction f.

☛ *Remarque :* Expérimentalement, le montage le plus simple pour étudier la caractéristique d'un dipôle est celui en figure 1.6. On notera que l'ampèremètre, qui mesure l'intensité, se branche en série du dipôle (car on mesure l'intensité dans la branche) ; en revanche, le voltmètre, qui mesure la tension, se branche en dérivation du dipôle (car on mesure la différence de potentiel entre les deux bornes du dipôle). Le résistor de résistance R en série du dipôle est présent pour éviter un possible court-circuit si l'intensité du courant est trop importante.

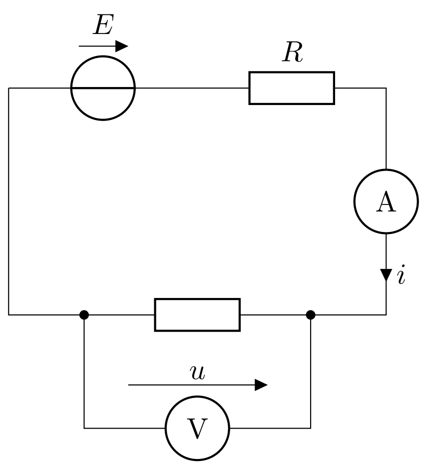


FIGURE 1.6 – Mesure de la caractéristique d'un dipôle.

Question 12 : Tracer la caractéristique d'un fil, et celle d'un interrupteur ouvert.

1.2.2 Les résistors

Un résistor est un dipôle ayant pour but de réguler l'intensité du courant électrique dans une branche. Étudions la caractéristique d'un résistor (figure 1.7).

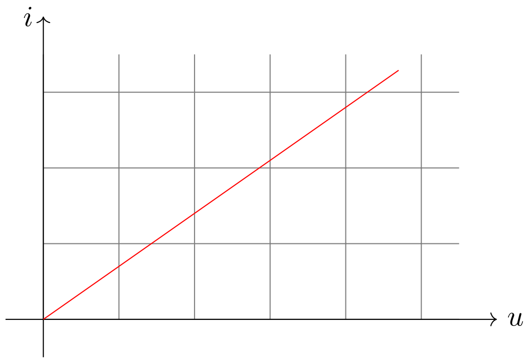


FIGURE 1.7 – Caractéristique d'un résistor.

Question 13 : Que peut-on dire de la caractéristique d'un résistor ? Quel lien y a-t-il entre la tension à ses bornes et l'intensité le parcourant ?

Loi d'Ohm

La tension u aux bornes d'un résistor est proportionnelle à l'intensité i la parcourant : c'est la **loi d'Ohm**. Mathématiquement, on a :

$$u = R \times i$$

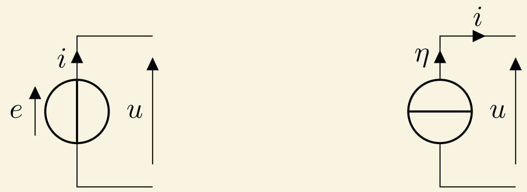
avec R la **résistance** du résistor, qui s'exprime en ohm Ω dans le Système International. Elle quantifie la difficulté que le courant a à traverser un résistor face à une tension donnée.

☛ *Remarque :* Les résistances utilisées en travaux pratiques sont comprises, en ordre de grandeur, entre $10\,\mathrm{k\Omega}$ et $100\,\mathrm{k\Omega}$. On peut également citer d'autres résistances typiques, comme celle d'un ampèremètre ($10\,\Omega$) et celle d'un voltmètre ($1\,\mathrm{M\Omega}$).

Question 14 : Par quelle valeur de résistance peut-on modéliser un fil ? Un interrupteur ouvert ?

1.2.3 Les sources d'énergie électrique

Sources idéales d'énergie électrique



Une **source *idéale* de tension** (gauche) délivre la tension $u = e$ quel que soit le courant i la traversant. e est alors appelée la force électromotrice (ou fém).
Une **source *idéale* de courant** (droite) délivre le courant d'intensité $i = \eta$ quelle que soit la tension u à ses bornes. η est alors appelé le courant électromoteur.

En réalité, les caractéristiques que l'on observe pour des sources de tension sont de la forme de la figure 1.8.

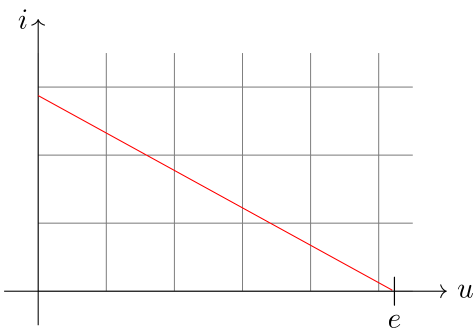


FIGURE 1.8 – Caractéristique d'une source de tension réelle.

Question 15 : Que vaut u si $i = 0$? Est-ce cohérent ?

Question 16 : Sachant que la pente de la droite de la figure 1.8 est $-\dfrac{1}{R_g}$, montrer que l'on a $u = e - R_g i$. Par quoi pourrait-on alors modéliser une source de tension réelle ?

La caractéristique d'une source de courant réelle (figure 1.9) est très similaire à celle d'une source de tension réelle.

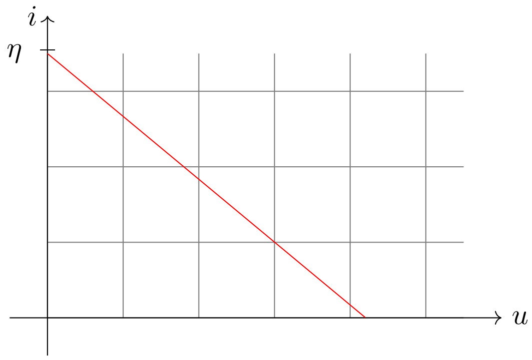


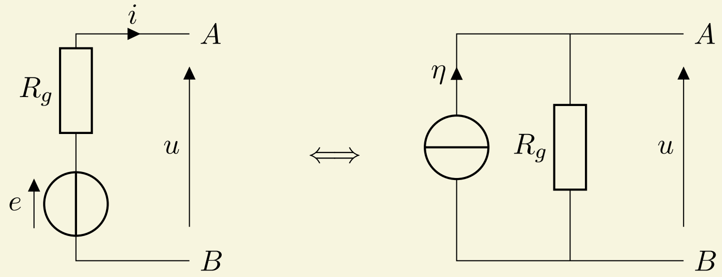
FIGURE 1.9 – Caractéristique d'une source de courant réelle.

Question 17 : L'équation de la droite de la figure 1.9 est $i = \eta - \dfrac{u}{R_g}$. Montrer que cela correspond à un circuit composé d'une source idéale de courant et d'un résistor en dérivation. Pour cela, faire un schéma électrique de la situation, puis appliquer la loi des nœuds et la loi d'Ohm.

Question 18 : Montrer que les deux situations (source de tension réelle, source de courant réelle) sont équivalentes, si l'on impose une condition entre e, R_g et η. Raisonner pour cela sur les équations de droite.

Sources réelles d'énergie électrique

Il existe deux modèles équivalents pour décrire une **source réelle d'énergie électrique** entre deux points A et B :



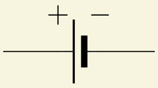
Ainsi, une source réelle de tension, qui est constituée d'une source idéale de tension et d'une résistance en série, est équivalente à une source réelle de courant, qui est constituée d'une source idéale de courant et d'une résistance en dérivation.
Les deux sources sont liées par la formule $e = R_g\eta$, où R_g est la résistance interne du générateur.

☛ *Remarque :* Dans un circuit électrique, on pourra indifféremment passer d'une représentation à une autre (dans les faits, on préférera souvent la première) car elles amèneront aux mêmes résultats. Il faut cependant bien savoir où sont placées la tension u et l'intensité i dans les deux cas...

1.2.4 Les piles électriques

Pile électrique

Une **pile électrique** est un dispositif électrochimique qui produit de l'électricité en convertissant de l'énergie chimique en énergie électrique. Son symbole est le suivant :



où le courant électrique se dirige de la borne positive $+$ vers la borne négative $-$.

FIGURE 1.10 – Piles électriques couramment utilisées. De gauche à droite : 4,5 V, D, C, AA, AAA, AAAA, A23, 9 V, CR2032, LR44. Par Lead holder — Travail personnel, CC BY-SA 3.0, https ://commons.wikimedia.org/w/index.php ?curid=15389714

Capacité électrique d'une pile

De nombreuses piles électriques courantes fournissent la même tension ; par exemple, les piles D, C, AA, AAA, AAAA fournissent une tension nominale [a] de $1{,}5\,\mathrm{V}$.
La différence entre ces piles est leurs **capacités électriques** Q, qui correspond à la charge électrique au sein de la pile. Cette capacité électrique peut s'exprimer en coulomb C, mais s'exprime plus couramment en ampère-heure Ah où [b] $1\,\mathrm{Ah} = 3600\,\mathrm{C}$.

La **capacité nominale** d'une pile Q_{max} correspond à la capacité de la pile neuve, souvent annoncée par le constructeur.

a. C'est-à-dire annoncée par le constructeur tant que la pile est encore neuve.
b. Tout simplement car $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$.

Question 19 : Quelle est l'utilité de mettre plusieurs piles électrique en série ?

Question 20 : Quelle est l'utilité de mettre plusieurs piles électrique en dérivation ?

Courant électrique débité par une pile

Une pile alimentant un circuit débitera une intensité électrique I, ce qui diminuera sa capacité électrique d'une quantité ΔQ pendant une durée Δt selon la relation :

$$\Delta Q = I \times \Delta t$$

Question 21 : Un constructeur annonce, pour une pile AAA, une tension nominale de $1{,}5\,\mathrm{V}$ et une capacité de $1250\,\mathrm{mAh}$ (milliampère-heure). Si la pile alimente un circuit pendant une durée maximale de $10\,\mathrm{h}$, quelle est l'intensité électrique débitée par celle-ci ?

Question 22 : La GameBoy Color est une console de jeux portable ayant été produite par Nintendo entre 1998 et 2003. Elle était alimentée par deux piles AA (tension nominale de $1{,}5\,\mathrm{V}$ pour une pile AA) en série qui devaient permettre une autonomie pouvant aller jusqu'à dix heures pour une consommation allant de $70\,\mathrm{mA}$ à $80\,\mathrm{mA}$. Estimer la capacité électrique maximale d'une pile AA.

Énergie stockée par une pile

L'**énergie $\mathcal{E}_{\text{pile}}$ stockée par une pile** s'exprime en fonction de sa capacité électrique Q et de la tension U à ses bornes :

$$\mathcal{E}_{\text{pile}} = Q \times U$$

Elle s'exprime en joule J si Q et U sont exprimés en coulomb et en volt, et s'exprime en milliwatt-heure mWh si Q est exprimé en milliampère-heure et U en volt.

Question 23 : Déterminer l'énergie stockée initialement par une des piles alimentant la GameBoy Color.

Question 24 : Quelle est l'énergie nécessaire pour alimenter la GameBoy Color ?

1.3 Point de fonctionnement d'un circuit

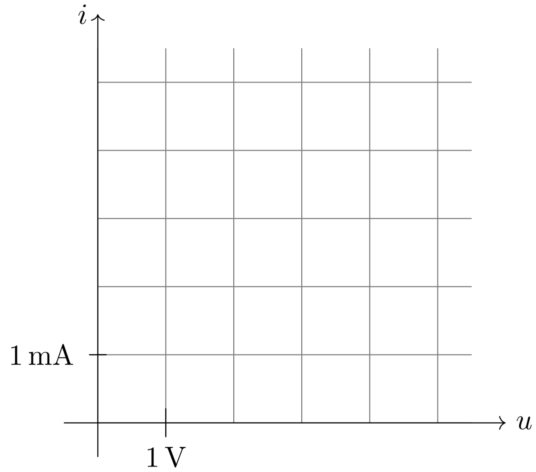
Point de fonctionnement d'un circuit

Soit un dipôle alimenté par une source d'énergie électrique. On appelle **point de fonctionnement** le point d'intersection des caractéristiques du dipôle et de la source d'énergie : il correspond à l'état de fonctionnement du circuit face à l'alimentation et au dipôle proposés.

On alimente un résistor de résistance $R = 15\,\Omega$ par une source réelle de tension $(E = 5\,\mathrm{V}, r = 10\,\Omega)$.

Question 25 : Tracer le circuit électrique associé en faisant apparaître l'intensité i du courant dans la maille et la tension U aux bornes du résistor R.

Question 26 : Tracer sur un même graphe les caractéristiques du résistor et de la source réelle de tension.



Question 27 : Déterminer graphiquement le point de fonctionnement du circuit, puis la valeur de l'intensité électrique débitant dans la maille et la tension aux bornes du résistor.

Question 28 : Retrouver par le calcul les valeurs de i et de U.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Énoncer la loi de conservation de la charge électrique. Énoncer et justifier alors la loi des nœuds. Quelles sont les unités SI de la charge électrique et de l'intensité du courant électrique ?
- ☐ Énoncer la loi d'additivité des tensions et la loi des mailles. Quelle est l'unité SI de la tension électrique ?
- ☐ Énoncer la loi d'Ohm et tracer la caractéristique d'un résistor.
- ☐ Définir une source idéale de tension ainsi qu'une source réelle de tension. Tracer la caractéristique d'une source réelle de tension.
- ☐ Définir la capacité électrique d'une pile et la capacité électrique nominale d'une pile. Donner la conversion entre les milliampères-heure mAh et les coulombs C.
- ☐ Donner la relation entre la variation de capacité électrique ΔQ, l'intensité du courant électrique I et la durée d'utilisation Δt. Donner par ailleurs la relation entre l'énergie $\mathcal{E}_{\text{pile}}$ stockée par une pile, sa capacité électrique Q et la tension à ses bornes U.
- ☐ Déterminer, graphiquement et par le calcul, le point de fonctionnement d'un circuit contenant un résistor de résistance $R = 30\,\Omega$ et une source idéale de tension $(E = 10\,\mathrm{V}, r = 5\,\Omega)$.

Chapitre 2 : Circuits en régime variable

Objectifs :

— Justifier la validité de la loi des nœuds et de la loi des mailles dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

— Citer et utiliser les conventions récepteur et générateur.

— En régime dépendant du temps, énoncer la relation entre l'intensité du courant et la tension pour une résistance, un condensateur ou une bobine.

— Remplacer une association en série ou en parallèle de deux dipôles de même nature ou par un dipôle équivalent.

— Démontrer l'expression de l'énergie stockée par un condensateur en fonction de sa charge ou de la tension entre ses bornes.

— Démontrer l'expression de l'énergie stockée dans une bobine d'inductance connue.

2.1 Approximation des régimes quasi-stationnaires

La loi des nœuds et la loi des mailles sont valables en régime permanent, c'est-à-dire lorsque toutes les grandeurs électriques sont constantes (indépendantes du temps). On cherche à déterminer sous quelle(s) condition(s) on peut considérer ces lois comme toujours valables en régime non-permanent.

Supposons qu'une source d'énergie électrique génère une courant périodique d'intensité $i(t)$ et de période T. On décide de « zoomer » sur une durée Δt très courte par rapport à la période T (voir figure 2.1).

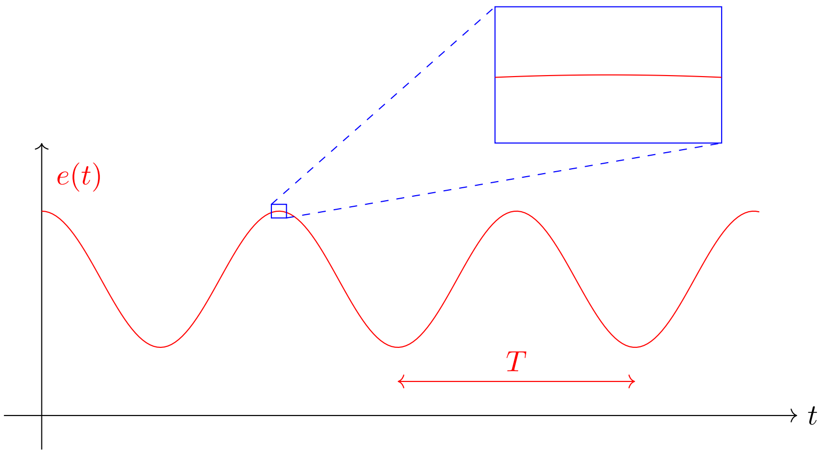


FIGURE 2.1 – « Zoom » sur un signal périodique.

Question 1 : Que peut-on dire de l'intensité sur la durée Δt ?

Approximation des régimes quasi-stationnaires

L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ou ARQS) consiste à considérer comme négligeable le temps de propagation Δt des ondes électriques devant la période du signal T : $\Delta t \ll T$.

Conséquences de l'ARQS sur la loi des nœuds et sur la loi des mailles

Dans le cadre de l'ARQS, la loi des nœuds et la loi des mailles sont vérifiées.

Fréquence d'un signal

Soit un signal de période T. La **fréquence** f de ce signal correspond au nombre de répétitions de celui-ci en une unité de temps :

$$f = \frac{1}{T}$$

La fréquence s'exprime en hertz Hz.

Question 2 : Une source de tension génère un signal de fréquence $f = 3{,}2\,\mathrm{kHz}$. Sachant que la durée Δt nécessaire pour faire « un tour du circuit » est de $2{,}5\,\mathrm{ns}$, peut-on dire que l'ARQS est vérifiée ?

On connaît cependant rarement la durée nécessaire pour qu'une onde électrique se propage d'un point A à un point B. Afin de l'exprimer, supposons à présent qu'une onde électrique (par exemple, un pic de courant) se propage de la source de tension variable $e(t)$ vers un résistor (voir figure 2.2). On note L la distance entre ces deux dipôles.

Ici, l'intensité i du courant électrique dépend donc de x et de t.

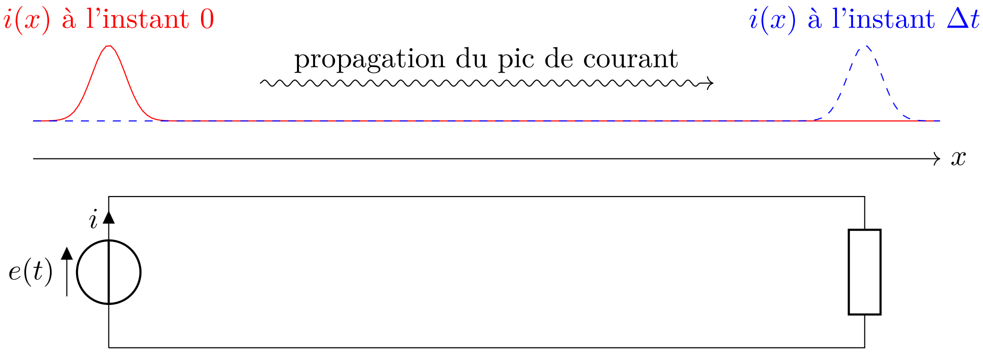


Figure 2.2 – Propagation d'un pic de courant $i(x,t)$ d'une source de tension vers un résistor.

Question 3 : On note c la célérité de l'onde de courant. Exprimer la durée Δt pour que le pic de courant se propage de la source de tension jusqu'au résistor.

Longueur d'onde

Soit un onde de période T et de célérité c. La **longueur d'onde** λ est définie par :

$$\lambda = c \times T$$

La longueur d'onde s'exprime en mètre m.

☛ *Remarque :* Nous étudierons beaucoup plus en détail le sens physique de la longueur d'onde en toute fin d'année, lorsque nous étudierons le thème des ondes.

Question 4 : Montrer que l'ARQS peut se reformuler uniquement en termes taille caractéristique de circuit L et de longueur d'onde λ.

Reformulation de l'approximation des régimes quasi-stationnaires

Si l'on note L la longueur caractéristique d'un circuit électrique et λ la longueur d'onde du signal, l'ARQS peut se traduire par : $L \ll \lambda$.

Question 5 : Le courant industriel fourni par le secteur a une fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Que vaut la longueur d'onde du signal électrique, en prenant $c = 2{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pour la vitesse de propagation dudit signal ? Est-on dans l'ARQS pour des circuits de la dimension d'une ville ? D'un pays comme la France ?

Question 6 : Prenons un émetteur haute-fréquence, de fréquence $f = 10\,\mathrm{MHz}$. Que vaut la longueur d'onde du signal électrique, en prenant $c = 2{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pour la vitesse de propagation dudit signal ? Est-on dans l'ARQS pour des circuits de la dimension d'une ville ? D'une paillasse de TP ?

Intermède : rappels sur la dérivée et l'intégrale

La dérivée

Soit une fonction f et deux réels a et h.

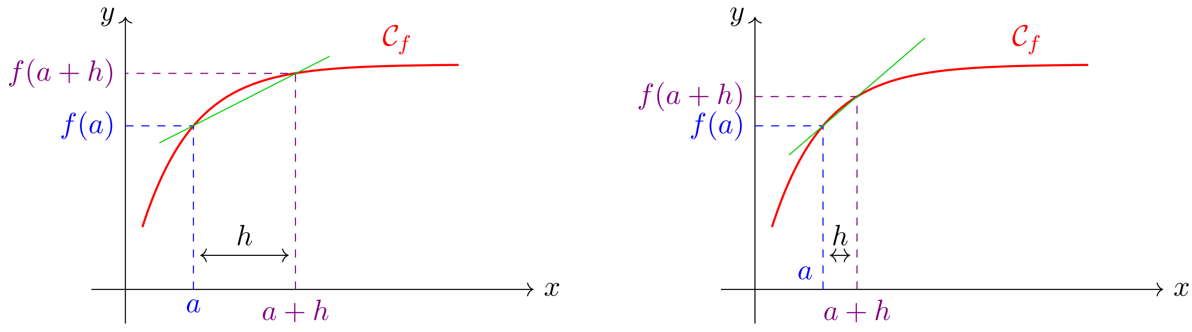


FIGURE 2.3 – Droite intersectant la courbe représentative d'une fonction f aux abscisses a et $a+h$, avec $a = 1$. À gauche, on a $h = 1{,}5$; à droite on a $h = 0{,}5$.

Question 7 : Déterminer le coefficient directeur/la pente passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$.

La quantité $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction f en a pour un pas de h. Il indique si la fonction a été globalement croissante entre les abscisses a et $a+h$.

Lorsque h est de plus en plus petit [1], la droite devient progressivement tangente à $\mathcal{C}_f$ en l'abscisse a (voir figure 2.3). On définit alors la dérivée de f en un point a par la limite du taux d'accroissement :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(a)$ correspond alors au coefficient directeur de la tangente de $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a : cette dérivée indique localement si une fonction est croissante ($f'(a) > 0$) ou décroissante ($f'(a) < 0$).

La notation dx, en physique, signifie *variation infinitésimale* [2] *de* x. Si h est suffisamment petit (c'est-à-dire infinitésimal), on peut ainsi le noter dx : il s'agit d'une très petite variation sur l'axe horizontale des x. De même, on peut donc remplacer $f(a+h) - f(a)$ par df : c'est une très petite variation de la fonction f.

Ainsi, la notation $f'(a)$ peut se remplacer, en physique, par la notation : $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. On appelle l'écriture $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ la notation de Leibniz, en « opposition » à l'écriture $f'(a)$, qui est la notation de Lagrange.

Il faut alors bien comprendre que cette dérivée, en physique-chimie [3], correspond bien à un quotient entre une variation infinitésimale dx et la variation infinitésimale df de la fonction f associée.

1. En mathématiques, on dit : lorsque h tend vers 0.
2. Relatif aux quantités infiniment petites ; infiniment petit.
3. Et uniquement ici : la théorie est en fait bien plus compliquée, et votre professeure de mathématiques vous taperait sur les doigts si vous lui expliquiez ça dans son cours !

L'intégrale

Supposons qu'une personne soit en train de courir sur une route plate ; on note v sa vitesse, pour l'instant constante. La distance L parcourue pendant une durée Δt est alors tout simplement $L = v \times \Delta t$.

En revanche, si la vitesse $v(t)$ dépend du temps (la personne se fatigue et court de moins en moins vite, par exemple), on ne peut pas simplement écrire la relation précédente pour L : quelle valeur de vitesse doit-on prendre ? Celle au début, celle à la fin, … ?

L'astuce est de se dire que, si $v(t)$ ne varie pas trop vite, on peut « découper » L comme une somme de petites longueurs. Par exemple, si la personne court une heure, il n'est pas incohérent de décomposer le mouvement en soixante intervalles d'une minute, et d'écrire que :

$$L = v_0 \times 1\,\mathrm{min} + v_1 \times 1\,\mathrm{min} + v_2 \times 1\,\mathrm{min} + \ldots + v_{59} \times 1\,\mathrm{min}$$

avec v_t correspondant à la vitesse à la minute t (ex : v_{30} est la vitesse à la trentième minute). En effet, chaque terme $v_t \times 1\,\mathrm{min}$ correspond approximativement à la distance parcourue entre la m-ième et la $(m+1)$-ième minute. On peut alors écrire :

$$L = \sum_{t=0\,\mathrm{min}}^{t=59\,\mathrm{min}} v(t) \times 1\,\mathrm{min}$$

Si l'on cherche encore à affiner le calcul, on peut choisir des intervalles de temps de plus en plus courts ; tellement courts qu'on va les considérer infinitésimaux, et les noter $\mathrm{d}t$. Cependant, alors que l'on avait plus tôt 60 termes à additionner, il y en a maintenant un nombre gigantesque, presque indénombrable…

Afin de signaler que la somme ne porte plus sur des quantités dénombrables mais plutôt indénombrables, on utilise alors le symbole $\int$ et non plus $\sum$. Il faut toutefois garder en tête qu'il s'agit toujours d'une somme[4], que l'on écrit :

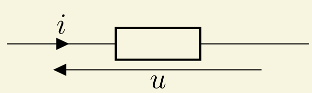
$$L = \int_{\text{instant initial}}^{\text{instant final}} v(t)\mathrm{d}t$$

2.2 Puissance électrique et énergie électrique

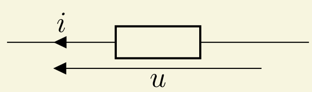
Au moment où l'on aborde l'étude d'un circuit électrique, il faut « baptiser » les tensions et courants des différents composants. Quand cela est possible, il est préférable de choisir des conventions de sens pour des tensions et courants correspondant à la réalité de façon à avoir des grandeurs positives.

Malheureusement, avant d'avoir fait le calcul, on ne sait pas toujours quel sera ce sens positif. Ce n'est pas grave : on peut faire un choix arbitraire et on verra si le résultat est positif ou négatif.

Conventions récepteur et générateur



Si les flèches de courant et de tension sont de sens opposés, on est en **convention récepteur**.



Si les flèches de courant et de tension sont dans le même sens, on est en **convention générateur**).

☛ *Remarque :* Le réflexe à avoir est donc de choisir la bonne convention quand on a à poser soi-même les tensions et intensités. **De manière générale, on posera les sources d'énergie électrique en convention générateur, et les autres dipôles en convention récepteur**.

4. C'est d'ailleurs l'origine du symbole $\int$, qui représente initialement une lettre « S » stylisée.

Puissance électrique instantanée

Soit un dipôle parcouru par une intensité $i(t)$ et ayant une tension $u(t)$ à ses bornes, ces deux grandeurs étant définies en convention récepteur. La **puissance électrique** instantanée $\mathcal{P}(t)$ reçue par ce dipôle est le produit de l'intensité du courant par la tension :

$$\mathcal{P}(t) = u(t) \times i(t)$$

L'unité de la puissance électrique dans le système international est le watt W.

Question 8 : Pour un dipôle passif comme un résistor, quel est le signe de $\mathcal{P}$? Commenter.

Question 9 : Pour un dipôle actif comme une source de tension, quel est le signe de $\mathcal{P}$? Commenter.

Énergie électrique reçue par un dipôle

Prenons l'exemple d'un dipôle étudié en convention récepteur.
L'**énergie électrique** $\Delta\mathcal{E}$ **reçue** par le dipôle entre deux instants t_1 et t_2 est alors :

$$\Delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t$$

— Pour un dipôle passif, on aura $\mathcal{P} > 0$ et donc $\Delta\mathcal{E} > 0$: le dipôle gagne de l'énergie de la part du circuit.

— Pour un dipôle actif, on aura $\mathcal{P} < 0$ et donc $\Delta\mathcal{E} < 0$: le dipôle cède de l'énergie au circuit.

☛ *Remarque :* L'énergie d'un corps est toujours continue du temps : on ne peut avoir une perte ou un gain d'énergie instantané, car cela correspondrait à une puissance infinie.

Question 10 : Si la tension et l'intensité du courant sont indépendantes du temps, comment se simplifie l'expression de $\Delta\mathcal{E}$?

Puissance électrique et énergie électrique en régime indépendant du temps

Dans le cas d'un dipôle étudié en régime permanent pendant une durée Δt, on aura :

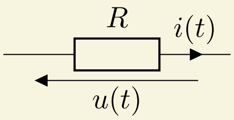
$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{P} \times \Delta t$$

2.3 Dipôles en régime variable

2.3.1 Retour sur les résistors

Retour sur la loi d'Ohm

Soit un résistor de résistance R.



En convention récepteur, la loi d'Ohm s'écrit :

$$u(t) = R \times i(t)$$

☛ *Remarque :* En convention générateur, on aura alors $u(t) = -R \times i(t)$. Il faut donc être très vigilant · e à la façon dont on indique les tensions et les intensités pour un résistor.

Question 11 : Déterminer la puissance reçue par un résistor en fonction de R et de $i(t)$, puis en fonction de R et de $u(t)$. Commenter le signe.

Effet Joule

Soit un résistor de résistance R parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ et possédant une tension $u(t)$ à ses bornes. Le résistor perçoit une puissance électrique :

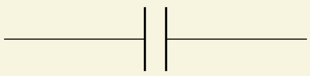
$$\mathcal{P}_R = R \times i^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

L'énergie emmagasinée est libérée plus tard sous forme de chaleur : c'est l'**effet Joule**.

2.3.2 Les condensateurs

Condensateur

Un **condensateur** est un dipôle constitué de deux armatures conductrices et séparées par un isolant. Chaque armature possède une charge $\pm Q$, opposée à celle de l'autre armature. Le symbole d'un condensateur dans un circuit électrique est le suivant :



La charge (en valeur absolue) Q présente sur chacune des armatures est proportionnelle à la tension u aux bornes du condensateur :

$$Q = C \times u$$

Le coefficient de proportionnalité C est la **capacité** du condensateur, dont l'unité SI est le farad F.

☛ *Remarque :* En pratique, les capacités varient typiquement entre $1\,\mathrm{nF}$ et $1\,\mu\mathrm{F}$.

Relation intensité-tension pour un condensateur

L'intensité i parcourant un condensateur est proportionnelle à la dérivée temporelle de la tension u à ses bornes. En convention récepteur, on a :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

☛ *Remarque :* À nouveau, en convention générateur on aurait $i = -C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

Question 12 : Rappeler le lien entre l'intensité i du courant électrique. En déduire un relation entre i, C et u.

Question 13 : Exprimer la puissance instantanée $\mathcal{P}_C$ reçue par le condensateur. En déduire, si le condensateur est initialement (à $t = 0$) à une tension nulle, que l'énergie électrique emmagasinée par celui-ci à l'instant t est proportionnelle à $u^2(t)$.

Énergie emmagasinée par un condensateur

L'**énergie $\mathcal{E}_C$ stockée dans un condensateur** dont la tension à ses bornes est u vaut :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2$$

On peut réécrire cette formule sous la forme : $\mathcal{E}_C = \dfrac{Q^2}{2C}$.
On en déduit que la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

2.3.3 Les bobines

Bobine

Une **bobine** est un dipôle constitué d'un enroulement de fils (des spires) autour d'un même axe. Le passage d'un courant dans une bobine crée un champ magnétique qui lui confère des propriétés électriques.
Le symbole d'un condensateur dans un circuit électrique est le suivant :

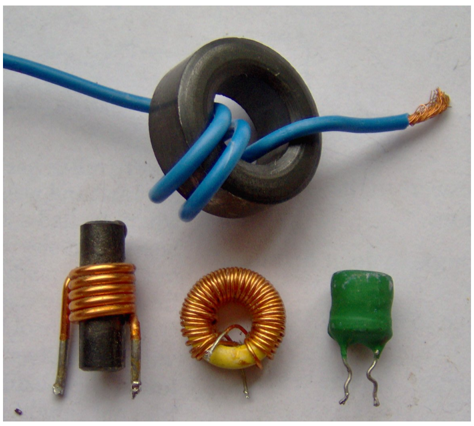


FIGURE 2.4 – Divers types de bobines. Par Miguel — Photograph, CC BY-SA 3.0, https ://commons.wikimedia.org/w/index.php ?curid=1534586

Relation intensité-tension pour une bobine

La tension u aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée temporelle de l'intensité i la traversant. En convention récepteur, on a donc :

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Le coefficient de proportionnalité L est l'**inductance** de la bobine, dont l'unité SI est le henry H.

☛ *Remarque :* En pratique, les inductances varient typiquement entre $10\,\mathrm{mH}$ et $100\,\mathrm{mH}$.

☛ *Remarque :* À nouveau, en convention générateur on aurait $u = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Question 14 : Exprimer la puissance instantanée P_L reçue par la bobine. En déduire, si la bobine est initialement $(t = 0)$ parcourue par une courant nul, que l'énergie électrique emmagasinée par celle-ci à l'instant t est proportionnelle à $i^2(t)$.

Énergie emmagasinée par une bobine

L'**énergie $\mathcal{E}_L$ stockée dans une bobine** traversée par un courant i est :

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$$

On en déduit que l'intensité du courant parcourant une bobine ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

☛ *Remarque :* Ce que nous venons de modéliser n'est en fait pas une bobine réelle, mais ce que l'on appelle une bobine idéale. En effet, une bobine étant un enroulement de fils de longueur non négligeable, il s'avère qu'une bobine réelle est en fait modélisée par une bobine idéale L et un résistor r en série (voir figure 2.5). La résistance ajoutée correspond à celle des fils de l'enroulement.

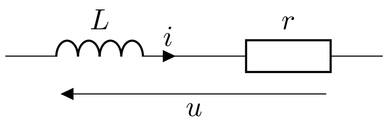


FIGURE 2.5 – Modélisation d'une bobine réelle.

Question 15 : Exprimer en fonction de i, L et r la tension u aux bornes d'une bobine réelle.

2.4 Association de dipôles

Le but de cette partie est de pouvoir simplifier des schémas électriques lorsque plusieurs dipôles de même nature sont présents en série ou en dérivation les uns par rapport aux autres.

2.4.1 Résistors en série, résistors en dérivation

On suppose que deux résistors de résistances R_1 et R_2 sont en série (voir figure 2.6).

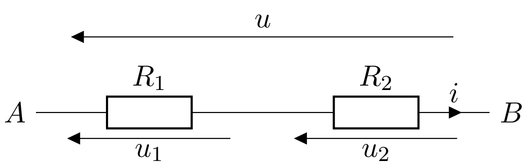


FIGURE 2.6 – Deux résistors en série.

Question 16 : Exprimer u en fonction de u_1 et u_2, puis en fonction de R_1, R_2 et i.

Résistors en série

Deux résistors de résistances R_1 et R_2 en série sont équivalents à un résistor de résistance $R_{\text{éq}} = R_1 + R_2$.
En généralisant, n résistors de résistances $R_1, ..., R_n$ en série sont équivalents à un résistor de résistance :

$$R_{\text{éq}}^{\text{série}} = R_1 + ... + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

☛ *Remarque :* Cela signifie que placer deux résistors de résistances $R_1 = 100\,\Omega$ et $R_2 = 50\,\Omega$ en série entre deux points A et B est strictement équivalent, que ce soit en théorie ou en pratique, à placer un unique résistor de résistance $R_{\text{éq}} = 150\,\Omega$.

Supposons à présent que l'on ait deux résistors, non plus en série mais en parallèle. Les résistances associées sont toujours R_1 et R_2 (voir figure 2.7).

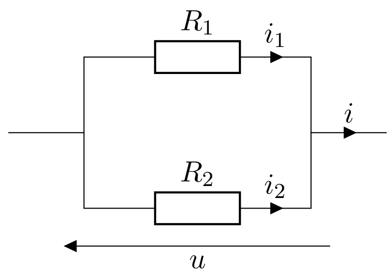


Figure 2.7 – Deux résistors en parallèle.

Question 17 : Après avoir appliqué la loi des nœuds, exprimer i en fonction de u, R_1 et R_2.

Résistors en dérivation

Deux résistors de résistances R_1 et R_2 en dérivation sont équivalents à un résistor de résistance $R_{\text{éq}}$ tel que $\dfrac{1}{R_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.
En généralisant, n résistors de résistances $R_1, ..., R_n$ en dérivation sont équivalents à un résistor de résistance $R_{\text{éq}}^{\text{dérivation}}$ tel que :

$$\frac{1}{R_{\text{éq}}^{\text{dérivation}}} = \frac{1}{R_1} + ... + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

☛ *Remarque :* Attention, l'erreur typique est d'écrire $R_{\text{éq}}^{\text{dérivation}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. En plus d'être évidemment fausse, cette relation n'est même pas homogène.

Question 18 : Quelle est la résistance équivalente de n résistors identiques, chacune de résistance R_0 ?

2.4.2 Condensateurs en série, condensateurs en dérivation

Condensateurs en série

Deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 en série sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{\text{éq}}$ tel que $\dfrac{1}{C_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$.
En généralisant, n condensateurs de capacités $C_1, ..., C_n$ en série sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{\text{éq}}^{\text{série}}$ tel que :

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}^{\text{série}}} = \frac{1}{C_1} + ... + \frac{1}{C_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}$$

Condensateurs en dérivation

Deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 en dérivation sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{\text{éq}} = C_1 + C_2$.
En généralisant, n condensateurs de capacités $C_1, ..., C_n$ en dérivation sont équivalents à un condensateur de capacité :

$$C_{\text{éq}}^{\text{dérivation}} = C_1 + ... + C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

☛ *Remarque :* Nous démontrerons ces relations en TD.

☛ *Remarque :* Les règles pour des associations de condensateurs sont donc les strictes opposées des règles pour des associations de résistors.

2.4.3 Bobines en série, bobines en dérivation

Bobines en série

Deux bobines d'indutances L_1 et L_2 en série sont équivalentes à une bobine d'inductance $L_{\text{éq}} = L_1 + L_2$.
En généralisant, n bobines d'inductances $L_1, ..., L_n$ en série sont équivalentes à une bobine d'inductance :

$$L_{\text{éq}}^{\text{série}} = L_1 + ... + L_n = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

Bobines en dérivation

Deux bobines d'inductances L_1 et L_2 en dérivation sont équivalentes à une bobine d'inductance $L_{\text{éq}}$ telle que $\dfrac{1}{L_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}$.
En généralisant, n bobines d'inductances $L_1, ..., L_n$ en dérivation sont équivalentes à une bobine d'inductance $L_{\text{éq}}^{\text{dérivation}}$ telle que :

$$\frac{1}{L_{\text{éq}}^{\text{dérivation}}} = \frac{1}{L_1} + ... + \frac{1}{L_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}$$

☛ *Remarque :* Nous démontrerons ces relations en TD.

☛ *Remarque :* Les règles pour des associations de bobines sont donc les mêmes que les règles pour des associations de résistors.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ En quoi consiste l'approximation des régimes quasi-stationnaires ? Est-elle valable à l'échelle d'une paillasse de TP/d'une ville/de la France pour la fréquence industrielle ($f = 50\,\mathrm{Hz}$) ? pour une fréquence de $f = 10\,\mathrm{MHz}$? On admettra que la vitesse de propagation des ondes électriques est $c \approx 2{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
- ☐ Expliquer en quoi consistent la convention récepteur et la convention générateur pour un dipôle.
- ☐ Définir la puissance électrique et l'énergie électrique reçue par un dipôle. Quelles sont leurs unités ? Comment interpréter leurs signes ?
- ☐ Donner les expressions de la puissance reçue par un résistor. En quoi l'énergie emmagasinée se convertit-elle ?
- ☐ Donner le symbole d'un condensateur, ainsi que la relation intensité-tension correspondante. Rappeler l'unité SI de la capacité du condensateur.
- ☐ Donner l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur. Quelle grandeur est continue du temps dans ce dipôle ?
- ☐ Donner le symbole d'une bobine, ainsi que la relation intensité-tension correspondante. Rappeler l'unité SI de l'inductance d'une bobine.
- ☐ Donner l'expression de l'énergie stockée dans une bobine. Quelle grandeur est continue du temps dans ce dipôle ?
- ☐ Rappeler les règles pour les associations de résistors en série et en dérivation.
- ☐ Rappeler les règles pour les associations de condensateurs en série et en dérivation.
- ☐ Rappeler les règles pour les associations de bobines en série et en dérivation.

Chapitre 3 : Circuits linéaires du premier ordre

Objectifs :

— Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge par une source idéale de tension et dans le cas de sa décharge.

— Déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire dans un circuit RC série.

— Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes d'une bobine dans le cas de l'établissement et de la rupture du courant.

— Déterminer l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire dans un circuit RL série.

3.1 Charge d'un condensateur dans un circuit RC série

Un circuit RC série est composé d'une résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C en série, possiblement alimentés par une source d'énergie électrique.

Dans notre étude, on supposera que le circuit est initialement éteint depuis « très longtemps ». À l'instant $t = 0$, on alimente le circuit par une source de tension : on passe instantanément de $e = 0$ à $e = E$ (voir figure 3.1).

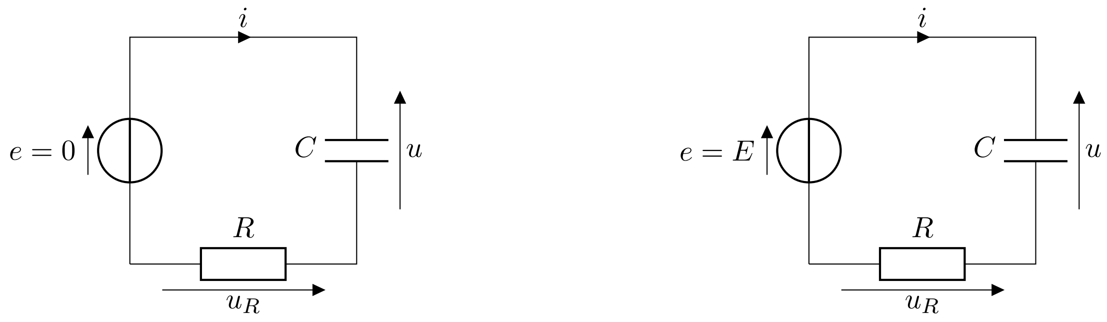


FIGURE 3.1 – Circuit RC série. Gauche : $t < 0$; droite : $t \geq 0$.

Le but de la partie est de déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$.

3.1.1 Établissement de l'équation électrique

Question 1 : En appliquant la loi des mailles pour $t \geq 0$, montrer que $RC \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E$.

Équation différentielle

Une **équation différentielle** est une équation dans laquelle la grandeur inconnue est une fonction, et où cette fonction est liée à sa ou ses dérivées.
L'**ordre** d'une équation différentielle correspond à la dérivée de plus haut degré y apparaissant.

Forme canonique d'une équation différentielle d'ordre 1

Une équation différentielle d'ordre 1 est mise sous **forme canonique** si elle est écrite sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_\infty$$

τ est appelée **constante de temps** ou **temps caractéristique**.

Question 2 : Mettre l'équation électrique sous forme canonique $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}u_\infty$. Donner les expressions de τ et u_∞ en fonction de E, R et C.

Question 3 : Déterminer la dimension de τ.

3.1.2 Solutions de l'équation électrique

Solutions d'une équation différentielle d'ordre 1

Les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_\infty$ sont de la forme :

$$F(t) = F_\infty + A \times e^{-t/\tau}$$

où A est une constante.

Question 4 : Vérifier que $t \mapsto F_\infty + A \times e^{-t/\tau}$ obéit à l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \dfrac{1}{\tau} \times F(t) = \dfrac{1}{\tau} \times F_\infty$ quelle que soit la valeur de A.

Il existe donc une infinité de solutions pour une équation différentielle d'ordre 1 : on peut effectivement écrire $F_\infty + A \times e^{-t/\tau}$ avec une infinité de choix pour la valeur de A... ce qui n'est pas le cas en réalité ! Par exemple, si l'on lâche la balle à vitesse initiale nulle, on sait bien que la vitesse de celle-ci va augmenter au cours du temps, et donc que $A > 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de répondre à ce problème (et de montrer que la physique est déterministe).

Théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle d'ordre 1

Soit un nombre F_0 quelconque fixé. Une équation différentielle d'ordre 1 à laquelle on impose la condition :

$$F(t = 0) = F_0$$

ne possède qu'une unique solution.

Une telle condition est appelée **condition initiale**. En d'autres termes, si à l'instant initial $t = 0$ on connaît une caractéristique du système (sa vitesse initiale si l'équation différentielle porte sur la vitesse, sa position initiale si l'équation différentielle porte sur la position...), alors il n'existe qu'une seule solution vérifiant l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \dfrac{1}{\tau} \times F(t) = \dfrac{1}{\tau} \times F_\infty$ et la condition initiale... ce qui est rassurant !

3.1.3 Régime transitoire, régime permanent

Question 5 : On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$. Quelle est la limite de $F(t)$ lorsque $t \to +\infty$?

Signification de F_∞

Soit une équation différentielle d'ordre 1 mise sous forme canonique $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_\infty$.
F_∞ représente la valeur de $F(t)$ lorsque t tend vers l'infini. En d'autres termes, il s'agit de la valeur de $F(t)$ « à l'équilibre ».

☛ *Remarque :* On note parfois $F_{\text{éq}}$ au lieu de F_∞.

Question 6 : Quelle est l'expression de $u(t)$ lorsque $t \to +\infty$? Et lorsque $t = 0$?

On aperçoit donc ici que la tension aux bornes du condensateur passe progressivement d'une valeur initiale $u(t=0)$ à une valeur finale u_∞ différente de $u(t=0)$. Ce passage de l'état initial à l'état final n'est pas instantané (voir figure 3.2).

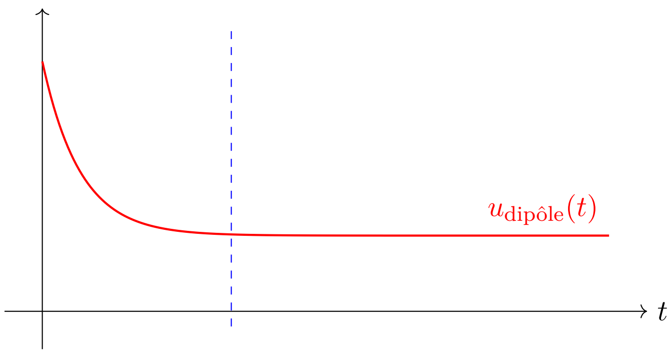


FIGURE 3.2 – Tension aux bornes d'un dipôle quelconque au cours du temps. On peut clairement identifier deux types de comportement (des régimes) : au départ, on a une évolution rapide du signal pour s'approcher d'un état final qui ne dépend plus du temps. La démarcation entre ces deux régimes est visible par le trait vertical en traitillés.

Régime transitoire et régime permanent

La dynamique d'un système dépend, pour des problèmes linéaires, uniquement des caractéristiques internes du système et de l'excitation extérieure agissant sur lui.
Le **régime permanent** du système correspond à la phase où la dynamique de ce système « ressemble » à l'excitation l'ayant mis en action (par exemple : vitesse constante si la force appliquée est constante, tension sinusoïdale si celle du générateur est sinusoïdale).
Le **régime transitoire** correspond alors à la phase où le système passe de son état initial jusqu'à son état permanent.

Question 7 : On rappelle la relation intensité-tension pour un condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. En régime permanent, u et i sont constants. Quelle est nécessairement la valeur de i ? Quel dipôle simple possède cette propriété ?

Comportement asymptotique d'un condensateur

En régime permanent, un condensateur est équivalent à **un interrupteur ouvert**.

☛ *Remarque :* Le comportement asymptotique d'un dipôle est pertinent à utiliser lorsqu'il est étudié en régime permanent... donc lorsque le circuit est en route depuis très longtemps ! Cela n'arrive que dans deux cas : lorsque $t \to +\infty$, et très souvent en $t = 0^-$, si l'on suppose que le circuit était dans son état précédent depuis une durée suffisamment longue.

3.1.4 Recherche des conditions initiales

On a pour l'instant établi que l'on a :

$$u(t) = u_\infty + Ae^{-t/\tau}$$

avec $u_\infty = E$ et $\tau = RC$. Pour résoudre complètement l'équation différentielle, il faut déterminer la valeur de A d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Afin de connaître la valeur de [1] $u(t = 0)$, il faut s'intéresser au circuit juste avant la mise en route de la source de tension (à $t = 0^-$) et juste après (à $t = 0^+$).

Question 8 : Représenter le circuit électrique équivalent en $t = 0^-$. Que valent $i(t = 0^-)$ et $u(t = 0^-)$?

1. À l'oral, on dit : « la valeur de u lorsque $t = 0$ ».

Question 9 : Pourquoi peut-on affirmer que u est continue du temps, c'est-à-dire que $u(t=0^-) = u(t=0^+)$? En déduire l'expression de $u(t=0^+)$.

Question 10 : Peut-on déterminer l'expression de $i(t=0^+)$ par un argument de continuité ? Expliquer.

Question 11 : Représenter le circuit électrique équivalent en $t=0^+$. Déterminer l'expression de $i(t=0^+)$.

Conditions initiales

Les valeurs des différentes grandeurs électriques du circuit à l'instant $t=0^+$ sont appelées les **conditions initiales** du circuit. Elles sont nécessaires à toute étude quantitative et détaillée de l'évolution temporelle d'un circuit électrique.

3.1.5 Résolution de l'équation électrique

Question 12 : Déterminer l'expression totale de $u(t)$ en fonction des données de l'énoncé à l'aide de la condition initiale déterminée précédemment.

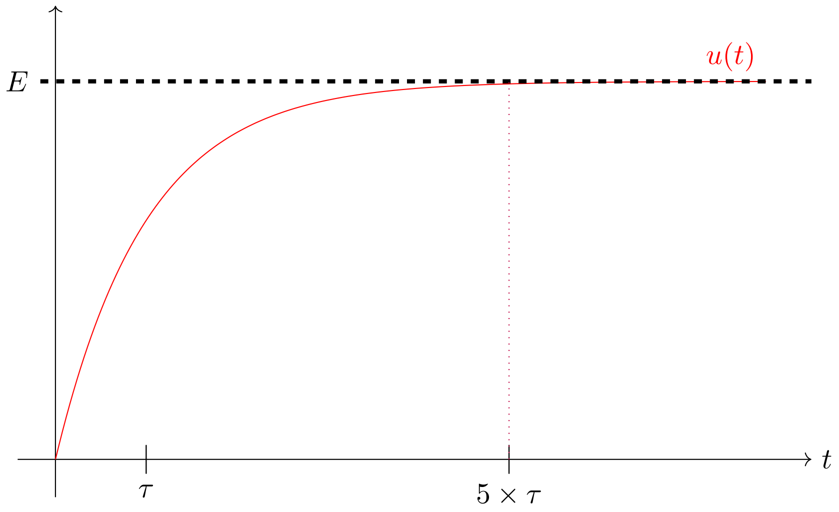


FIGURE 3.3 – Tracé de l'évolution temporelle de la tension aux bornes du condensateur.

Question 13 : Que vaut $1 - e^{-t/\tau}$ lorsque $t = \tau$? En déduire une technique pour déterminer la valeur numérique de τ.

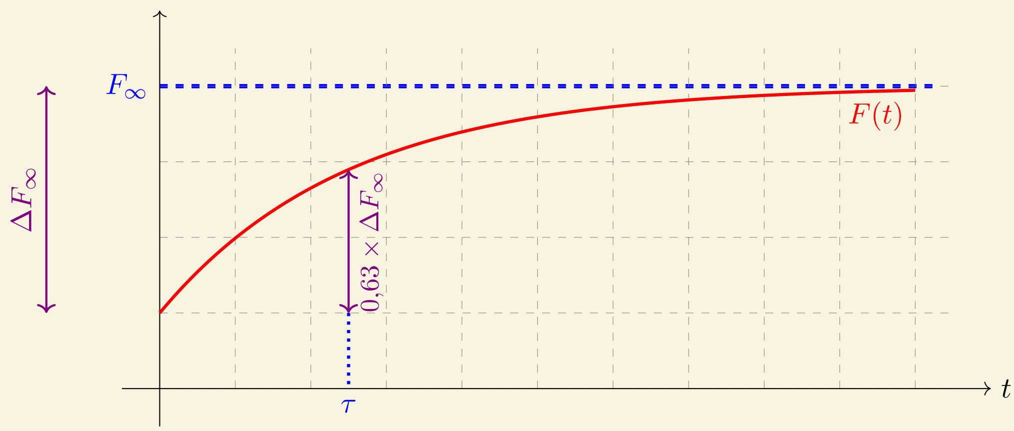
Détermination de la valeur numérique de τ par la méthode des $63\,\%$

Si $F(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et de constante de temps τ, on peut déterminer celle-ci par :

$$F(t = \tau) - F(t = 0) = 0{,}63 \times (F_\infty - F(t = 0))$$

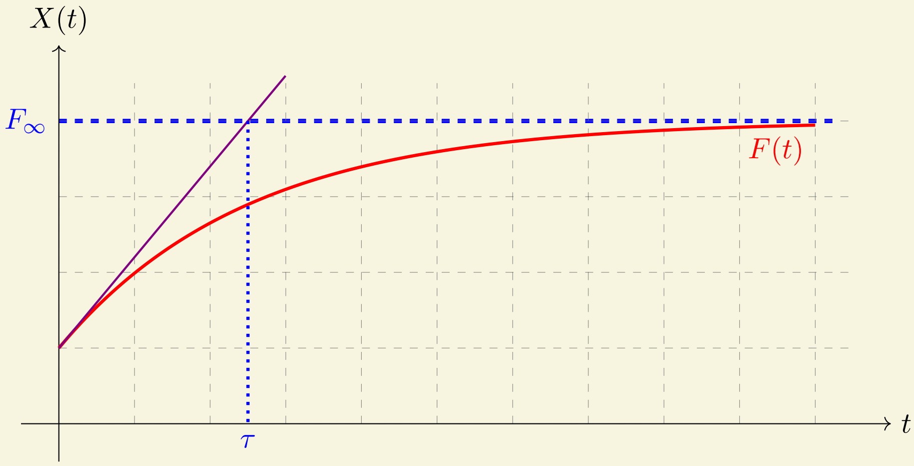
C'est-à-dire :

$$\Delta F_\tau = 0{,}63 \times \Delta F_\infty$$



Détermination de la valeur numérique de τ par la méthode de la pente à l'origine

Si $F(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et de constante de temps τ, on peut déterminer celle-ci en cherchant où la tangente à l'origine coupe la droite horizontale F_∞.



Question 14 : Que vaut $1 - e^{-t/\tau}$ lorsque $t = 5 \times \tau$? En déduire que l'on a alors atteint à plus de 99% le régime permanent.

Interprétation qualitative de la constante de temps

On estime généralement que le régime permanent est atteint au bout de $5 \times \tau$. La constante de temps τ représente donc, en ordre de grandeur, une durée nécessaire pour passer du régime transitoire au régime permanent.

3.2 Établissement du courant dans un circuit RL série

Le circuit ci-dessous est alimenté par un générateur idéal de tension continue et de force électromotrice E. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur (voir figure 3.4).

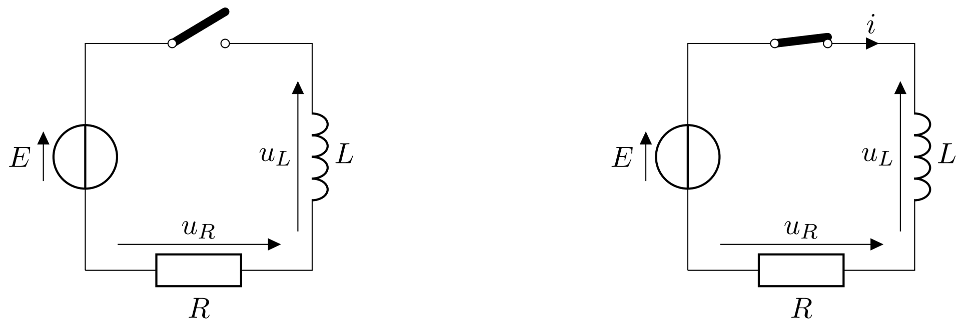


FIGURE 3.4 – Circuit RL série. Gauche : $t < 0$; droite : $t \geq 0$.

Le but de la partie est de déterminer l'expression de $i(t)$.

Question 15 : Que vaut $i(t = 0^-)$? En déduire, en justifiant, l'expression de $i(t = 0^+)$.

Question 16 : En appliquant la loi des mailles pour $t \geq 0$, montrer que $L \times \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R \times i = E$.

Question 17 : Mettre l'équation électrique sous forme canonique. Donner les expressions de τ et i_∞.

Question 18 : Déterminer l'expression de $i(t)$ en fonction des données de l'énoncé en utilisant notamment la condition initiale.

Question 19 : Rappeler la relation intensité-tension pour une bobine. En régime permanent, u et i sont constants. Quelle est nécessairement la valeur de u ? Quel dipôle simple possède cette propriété ?

Comportement asymptotique d'une bobine

En régime permanent, une bobine est équivalente à **un fil**.

Question 20 : Tracer le circuit équivalent lorsque $t \to +\infty$. En déduire l'expression de $i(t \to +\infty)$. Est-ce cohérent avec les résultats déterminés précédemment ?

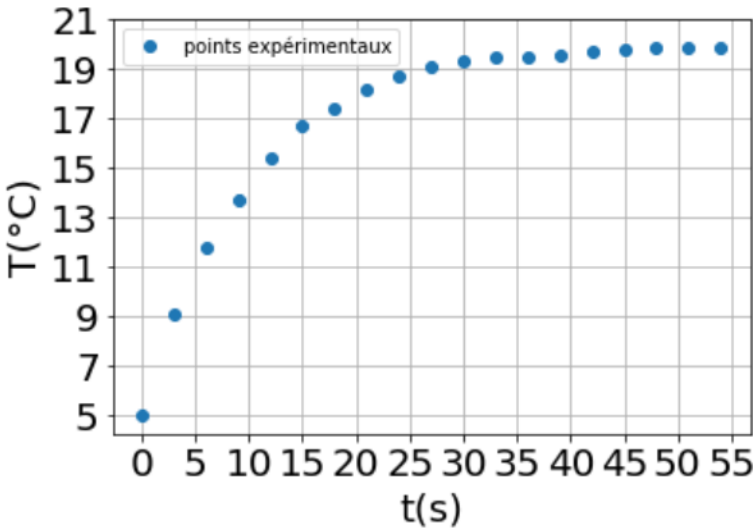
Question 21 : Quelle est l'énergie stockée $\mathcal{E}_{L,\infty}$ par la bobine en régime permanent ?

Question 22 : Déterminer les valeurs de i_∞, τ et $\mathcal{E}_{L,\infty}$ pour $E = 10\,\mathrm{V}$, $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 100\,\mathrm{mH}$.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}F(t) = \dfrac{1}{\tau}F_\infty$. Que représentent physiquement F_∞ et τ ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $T \times \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + 2\theta(t) = 3\theta_0$. La résoudre, sachant que $\theta(t=0) = 5\theta_0$. Tracer l'allure de la solution.
- ☐ Proposer, à l'aide de vos propres mots, des définitions pour « régime permanent » et « régime transitoire ».
- ☐ En régime permanent, à quoi est équivalent un condensateur ? une bobine ?
- ☐ Soit un circuit RC série, depuis longtemps éteint puis alimenté instantanément à $t = 0$ par une source idéale de tension E. Déterminer totalement l'expression de $u_C(t)$, tension aux bornes du condensateur.
- ☐ Soit un circuit RL série, depuis longtemps éteint puis alimenté instantanément à $t = 0$ par une source idéale de tension E. Déterminer totalement l'expression de $i(t)$, intensité du courant parcourant le circuit.
- ☐ Soit la fonction $T(t) = T_f + (T_0 - T_f) \times e^{-t/\tau}$ tracée ci-dessous. Déterminer graphiquement T_0 et T_f. Mesurer également de deux manières différentes la valeur de τ.



Chapitre 4 : Circuits linéaires du deuxième ordre

Objectifs :

— Établir et exploiter l'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique non amorti. Résoudre cette équation connaissant les conditions initiales.

— Établir et résoudre l'équation d'évolution de la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge ou de sa décharge, dans les différents régimes possibles d'un circuit RLC série.

— Écrire l'équation différentielle en faisant apparaitre la pulsation propre et le facteur de qualité. Résoudre et interpréter les solutions de cette équation différentielle.

— Dans le cas d'un régime pseudo-périodique, identifier un temps caractéristique d'amortissement et un temps caractéristique d'oscillation. Relier qualitativement le facteur de qualité au nombre d'oscillations visibles.

4.1 Oscillations harmoniques d'un circuit LC

Prenons l'exemple d'un circuit LC série, initialement non alimenté. À $t = 0$, on alimente le circuit par une tension continue E (voir figure 4.1).

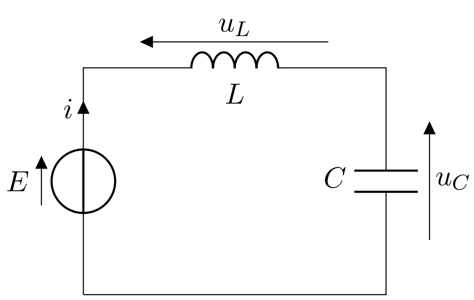


FIGURE 4.1 – Circuit LC pour $t \geq 0$.

Question 1 : Par la loi des mailles, puis en utilisant à la suite les relations intensité-tension pour la bobine et pour le condensateur, montrer que l'on a $LC\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = E$.

Oscillateur harmonique

Une équation différentielle de la forme :

$$\alpha \times \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2}(t) + \gamma \times F(t) = \varepsilon$$

caractérise un **oscillateur harmonique**.

Forme canonique d'une équation différentielle d'oscillateur harmonique

Une équation différentielle d'oscillateur harmonique est mise sous forme canonique si elle est écrite sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty$$

ω_0 est la **pulsation propre**.

Par analogie avec les solutions d'une équation différentielle d'ordre 1, on décide de chercher les solutions de l'oscillateur harmonique sous la forme $F(t) = F_\infty + \alpha \times e^{rt}$.

Question 2 : Que vaut r pour une équation différentielle d'ordre 1 : $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \dfrac{1}{\tau} \times F(t) = \dfrac{1}{\tau} \times F_\infty$? Est-ce cohérent ?

Question 3 : Que vaut r pour une équation différentielle d'oscillateur harmonique ? Commenter.

Si les solutions $t \mapsto F_\infty + \alpha e^{j\omega_0 t}$ et $t \mapsto F_\infty + \beta e^{-j\omega_0 t}$ (avec α et β des constantes complexes quelconques) sont des solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, le théorème de superposition énonce que $t \mapsto F_\infty + \alpha e^{j\omega_0 t} + \beta e^{-j\omega_0 t}$ est également solution de l'équation différentielle.

Par ailleurs, la formule d'Euler énonce que $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, en posant $\theta = \omega_0 t$, on peut réécrire les solutions réelles de l'équation de l'oscillateur harmonique sous la forme : $F(t) = F_\infty + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

Solutions d'une équation différentielle d'oscillateur harmonique

Les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty$ sont de la forme :

$$F(t) = F_\infty + A \times \cos(\omega_0 t) + B \times \sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont des constantes.
On peut également écrire $F(t)$ sous la forme :

$$F(t) = F_\infty + C \times \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

où $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ est l'**amplitude** de $F(t)$.

Fréquence et période d'un oscillateur harmonique

La **fréquence** f_0 d'un oscillateur harmonique est liée à sa **pulsation** ω_0 par la formule :

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

On peut également lier la pulsation ω_0 à la **période** T_0 par la formule :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Question 4 : Vérifier que $t \mapsto F_\infty + C \times \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est bien solution de l'équation différentielle pour toutes valeurs de C et φ.

Théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle d'ordre 2

Soient deux nombres F_0 et F_0' quelconques fixés. Une équation différentielle d'ordre 2 à laquelle on impose la condition :

$$F(t = 0) = F_0$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t = 0) = F_0'$$

ne possède qu'une unique solution.

Question 5 : Déterminer les valeurs initiales de u_C et i. En déduire $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0)$.

Question 6 : Donner alors l'expression de $u_C(t)$ en fonction de E, ω_0 et t.

Question 7 : Tracer l'allure de $u_C(t)$.

4.2 Rappels et compléments sur les équations du second degré

Soient a, b et c trois nombres réels tels que $a \neq 0$. L'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

est une **équation du second degré**.

On peut écrire les identités suivantes, toutes équivalentes les unes aux autres :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && \text{puisque } a \neq 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 && \text{on complète le carré} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

On observe que le terme de gauche est un carré, donc *a priori* positif ou nul, alors que le terme de droite possède le signe de $b^2 - 4ac$ car le terme $4a^2$ au dénominateur est forcément positif [1]. Si $b^2 - 4ac$ est positif ou nul, alors l'équation peut avoir des solutions dans $\mathbb{R}$.

On note alors $\Delta = b^2 - 4ac$, et on appelle ce terme le **discriminant** de l'équation : il permet de de faire la distinction entre les cas où les solutions de l'équation sont réelles et ceux où elles ne le sont pas.

L'équation du second degré devient alors :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Solutions si le discriminant est strictement positif

Si le discriminant Δ de l'équation est strictement positif, alors on a :

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

C'est-à-dire :

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Solutions d'une équation du second degré si son discriminant est strictement positif

Soit l'équation du second degré $a^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
Si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif, l'équation admet deux solutions réelles :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

1. On rappelle que a est un nombre réel

Question 8 : Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $2x^2 + 6x - 20 = 0$.

Solutions si le discriminant est nul

Si le discriminant Δ de l'équation est nul, alors on a :

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

C'est-à-dire :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Solutions d'une équation du second degré si son discriminant est nul

Soit l'équation du second degré $a^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
Si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul, l'équation admet une unique solution réelle :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Question 9 : Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $3x^2 + 12x + 12 = 0$.

Solutions si le discriminant est strictement négatif

Si le discriminant Δ de l'équation est strictement négatif, il n'existe pas de solutions réelles[2].

Question 10 : L'équation $x^2 - 2x + 10 = 0$ admet-elle des solutions réelles ?

Revenons sur l'équation $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$ avec $\Delta < 0$. On peut l'écrire sous la forme : $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = -\underbrace{\dfrac{-\Delta}{4a^2}}_{>0}$. Si l'on pose $X = x + \dfrac{b}{2a}$ et $u = \sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a^2}} = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, l'équation du second degré peut temporairement s'écrire :

$$X^2 = -u^2$$

avec $u > 0$. Cette équation a des solutions complexes : $X = +j \times u$ et $X = -j \times u$ avec j l'unité imaginaire[3] telle que $j^2 = -1$.

En réutilisant les expression de X et u, on a donc :

$$x + \frac{b}{2a} = j \times \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -j \times \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

C'est-à-dire :

$$x = -\frac{b}{2a} + j \times \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{b}{2a} - j \times \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Solutions d'une équation du second degré si son discriminant est strictement négatif

Soit l'équation du second degré $a^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
Si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement négatif, l'équation admet deux solutions complexes :

$$x = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

avec j l'unité imaginaire telle que $j^2 = -1$.

Question 11 : Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 2x + 10 = 0$.

2. Cela veut dire qu'on ne peut pas trouver de nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Toujours notée i en mathématiques, on préfère en physique la noter j car i représente souvent l'intensité du courant électrique !

4.3 Réponses amorties d'un circuit RLC

Le circuit RLC série est très similaire au circuit RC série : seule une résistance R est ajoutée en série du condensateur et de la bobine (figure 4.2). On se place, comme précédemment, dans le cas où l'alimentation continue E est mise en route à $t = 0$.

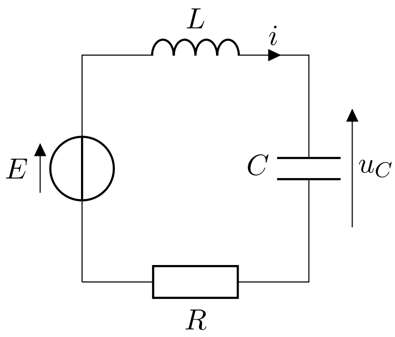


FIGURE 4.2 – Circuit RLC pour $t \geq 0$.

4.3.1 Équation électrique

Question 12 : Montrer que l'on a : $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u_C = \dfrac{1}{LC}E$.

Équation d'un oscillateur amorti

On dit qu'une grandeur $F(t)$ suit l'équation d'un oscillateur amorti si l'équation différentielle portant sur son évolution est du type :

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty$$

ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur amorti, et Q est son **facteur de qualité**, sans dimension. $F_\infty = F(t \to \infty)$ est la valeur de $F(t)$ à l'équilibre du système lorsque t tend vers l'infini.

Question 13 : Donner l'expression de ω_0 du système masse-ressort amorti, puis l'expression du facteur de qualité Q.

Question 14 : Que vaut $u_C(t \to \infty)$?

Question 15 : Que se passe-t-il lorsque Q tend vers l'infini ? À quoi correspond physiquement ce cas, à capacité C et inductance L fixées ? Est-ce cohérent ?

4.3.2 Équation caractéristique

Les solutions de l'équation différentielle peuvent s'écrire comme une somme de deux solutions : la première est celle du régime transitoire, et la deuxième celle du régime permanent.

Ici, on aura donc :

$$u_C(t) = u_{C,\text{transitoire}}(t) + \underbrace{E}_{\text{rég. permanent}}$$

Le but est, dans cette partie, de déterminer les solutions associées au régime transitoire. On cherche ces solutions sous la forme $u_{C,\text{transitoire}}(t) = U_0 \times e^{rt}$ où U_0 et r sont des inconnues.

Question 16 : Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}(t)$ en fonction de $u_{C,\text{transitoire}}(t)$ et r. Montrer, en réinjectant ces expressions dans l'équation du mouvement, qu'elle se transforme en une équation du second degré portant sur r.

Équation caractéristique d'une équation différentielle

À l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}(t) + \dfrac{\omega_0}{Q} \times \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty$, on associe l'**équation caractéristique** :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times r + \omega_0^2 = 0$$

r est ici une inconnue, que l'on cherche à déterminer.

Question 17 : Calculer le discriminant Δ de cette équation du second degré. Pour quelles valeurs de Q le discriminant est-il positif ? négatif ?

4.3.3 Régime apériodique ($Q < 1/2$)

Régime apériodique d'un oscillateur amorti

Lorsque le facteur de qualité Q d'un oscillateur amorti est plus petit que $1/2$, on parle de **régime apériodique**.

Question 18 : Quelles sont les solutions r_1 et r_2 de l'équation du second degré ?

Question 19 : Montrer que r_1 et r_2 sont négatifs.

Question 20 : Montrer que r_1 et r_2 sont homogènes à l'inverse d'une durée.

On déduit des deux questions précédentes que l'on peut noter $r_1 = -1/\tau_1$ et $r_2 = -1/\tau_2$ avec τ_1 et τ_2 des durées positives.

Question 21 : Donner les expressions de τ_1 et τ_2 en fonction de ω_0 et Q.

Deux familles de fonctions sont alors solutions de l'équation différentielle : celles du type $t \mapsto Ae^{-t/\tau_1}$ et celles du type $t \mapsto Be^{-t/\tau_2}$. La solution générale de l'équation différentielle régissant l'évolution de u_C est alors une somme de ces solutions :

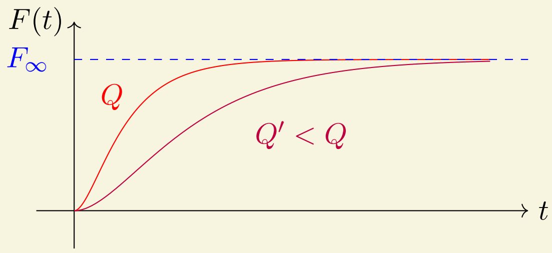
$$u_C(t) = E + Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$$

Solutions de l'équation d'un oscillateur amorti en régime apériodique

En régime apériodique, les deux solutions $-\dfrac{1}{\tau_1}$ et $-\dfrac{1}{\tau_2}$ de l'équation caractéristique sont réelles et négatives. On a alors :

$$F(t) = \underbrace{Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}}_{\text{régime transitoire}} \quad + \quad \underbrace{F_\infty}_{\text{régime permanent}}$$

avec A et B deux constantes qui dépendent des conditions initiales.



τ_1 et τ_2 représentent deux durées caractéristiques afin d'atteindre le régime permanent. La durée du régime transitoire sera alors $5 \times \max(\tau_1, \tau_2)$.

Question 22 : Justifier que l'on appelle ce régime le régime « apériodique ».

Question 23 : Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t)$. En utilisant les conditions initiales $u_C(t=0)=0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0)=0$, montrer que l'on a un système portant sur A et B (on ne cherchera pas à le résoudre).

4.3.4 Régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$)

Régime pseudo-périodique d'un oscillateur amorti

Lorsque le facteur de qualité Q d'un oscillateur amorti est plus grand que $1/2$, on parle de **régime pseudo-périodique**.

Question 24 : Quelles sont les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique ? On rappelle que $\Delta < 0$, et on notera j le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$.

Question 25 : Montrer que ces solutions sont complexes conjuguées, et que leur partie réelle est strictement négative.

Question 26 : On pose τ et Ω positifs tels que $r_{1,2} = -\dfrac{1}{\tau} \pm j\Omega$. Donner les expressions de τ et Ω en fonction de ω_0 et Q.

Les solutions générales de l'équation différentielle sont donc du type :

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= E + \alpha e^{(-\frac{1}{\tau}+j\Omega)t} + \beta e^{(-\frac{1}{\tau}-j\Omega)t} \\
&= E + \alpha e^{-t/\tau+j\Omega t} + \beta e^{-t/\tau-j\Omega t} \\
&= E + \alpha e^{-t/\tau} e^{j\Omega t} + \beta e^{-t/\tau} e^{-j\Omega t} && \text{car } e^{a+b} = e^a \times e^b \\
&= E + \left[\alpha e^{j\Omega t} + \beta e^{-j\Omega t}\right] \times e^{-t/\tau} && \text{en factorisant par } e^{-t/\tau}
\end{aligned}$$

Or, on sait que l'on peut écrire, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
u_C(t) &= E + [\alpha\cos(\Omega t) + j\alpha\sin(\Omega t) + \beta\cos(\Omega t) - j\beta\sin(\Omega t)] \times e^{-t/\tau} \\
&= E + [(\alpha+\beta)\cos(\Omega t) + (j\alpha + j\beta)\sin(\Omega t)] \\
&= E + [A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] \times e^{-t/\tau}
\end{aligned}$$

avec $A = \alpha + \beta$ et $B = j\alpha - j\beta$.

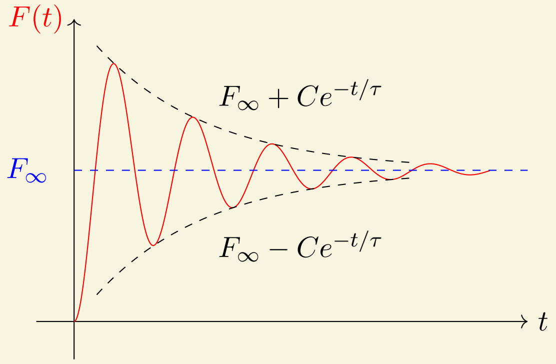
Solutions de l'équation d'un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique

En régime pseudo-périodique, les deux solutions $-\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$ de l'équation caractéristique sont complexes et conjuguées. On a alors :

$$F(t) = \underbrace{[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]\, e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} \quad + \quad \underbrace{F_\infty}_{\text{régime permanent}}$$

avec A et B deux constantes qui dépendent des conditions initiales.

☛ *Remarque :* On peut également écrire $F(t) = C\cos(\Omega t + \varphi)e^{-t/\tau} + F_\infty$.



$\Omega = \omega_0 \times \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ est la pulsation des oscillations du système, qui toujours inférieure à ω_0. Un système oscillera d'autant plus lentement qu'il est amorti.
$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ représente la durée caractéristique afin d'atteindre le régime permanent. La durée du régime transitoire sera alors $5 \times \tau$.

Question 27 : Justifier que l'on appelle ce régime le régime « pseudo-périodique ».

Question 28 : Uniquement pour cette question : si $Q \gg 1$, comment évoluent Ω et τ ? À quoi cela correspond-il, physiquement ?

Question 29 : Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t)$.

Question 30 : En utilisant les conditions initiales $u_C(t=0)=0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0)=0$, montrer que l'on a un système portant sur A et B. Le résoudre pour donner l'expression de $u_C(t)$ en fonction de Ω, τ, E et t.

Question 31 : Quel est le temps caractéristique d'amortissement du système étudié ? Et son temps caractéristique d'oscillation ?

Question 32 : Un grand facteur de qualité implique-t-il un nombre faible ou élevé d'oscillations visibles ?

Complément sur le régime apériodique critique

Régime apériodique critique

Si $Q = 1/2$, on se situe dans le cas **apériodique critique**. Ce cas est uniquement théorique, car Q n'est jamais exactement égal à $1/2$.

La seule solution de l'équation caractéristique est réelle et négative : $r_0 = -\dfrac{1}{\tau_0}$. Les solutions sont alors du type :

$$F(t) = \underbrace{(At+B)e^{-t/\tau_0}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{F_\infty}_{\text{régime permanent}}$$

avec A et B deux constantes qui dépendent des conditions initiales.

En particulier, il s'agit du régime apériodique dont la durée du régime transitoire est la plus courte ; en d'autres termes, il s'agit du régime apériodique allant le plus rapidement jusqu'à son régime permanent.
Mathématiquement, on a donc $\tau_0 < \min(\tau_1, \tau_2)$ avec τ_1 et τ_2 les durées caractéristiques du régime apériodique.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 F(t) = \omega_0^2 F_\infty$. Que représentent physiquement F_∞ et ω_0 ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $\tau \times \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4}{\tau}y(t) = \dfrac{1}{\tau}y_0$. La résoudre, sachant que $y(t=0) = 5y_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t=0) = \dfrac{6y_0}{\tau}$. Tracer l'allure de la solution.
- ☐ Soit un circuit LC série, éteint depuis longtemps puis alimenté à partir de $t = 0$ par une source idéale de tension E constante. Déterminer l'expression de $u_C(t)$ en fonction de E, L, C et t.
- ☐ Soit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 F(t) = \omega_0^2 F_\infty$. Que représentent physiquement $y_{\text{éq}}$, ω_0 et Q ? Quel lien peut-on qualitativement faire entre Q et le nombre d'oscillations visibles ?
- ☐ À quel régime correspond le cas $Q < 1/2$? le cas $Q > 1/2$? Donner la forme mathématique des solutions dans chacun des deux cas, puis tracer leurs allures.
- ☐ Montrer que, dans le cas d'un régime pseudo-périodique, le temps caractéristique d'amortissement s'écrit $\dfrac{2Q}{\omega_0}$ et le temps caractéristique d'oscillation s'écrit $\omega_0 \times \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$.
- ☐ Soit un circuit RLC série, éteint depuis longtemps puis alimenté à partir de $t = 0$ par une source idéale de tension E constante. Montrer que pour $R = 5\,\Omega$, $L = 1\,\mathrm{H}$ et $C = 4\,\mathrm{F}$, le régime est

apériodique. Donner les expressions (en fonction de R, L et C) puis les valeurs des deux constantes de temps du système.

☐ Soit un circuit RLC série, éteint depuis longtemps puis alimenté à partir de $t = 0$ par une source idéale de tension E constante. Montrer que pour $R = 40\,\Omega$, $L = 16\,\mathrm{H}$ et $C = 169\,\mathrm{F}$, le régime est apériodique. Donner les expressions (en fonction de R, L et C) puis les valeurs du temps caractéristique d'amortissement et du temps caractéristique d'oscillation du système.