1 Circuits en régime permanent

■ À revoir ■ Maîtrisé

On dit qu'un circuit est en **régime permanent** lorsque les grandeurs qui le décrivent (courant électrique, tension électrique...) ne dépendent pas du temps.

1 Grandeurs électriques dans un circuit

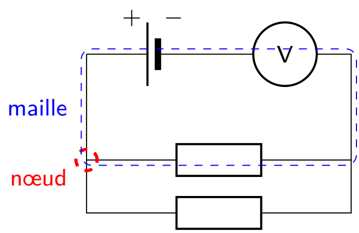
Généralités

On appelle **dipôle** un élément possiblement conducteur d'électricité et possédant deux bornes (ou pôles). On définit pour chaque dipôle un symbole permettant de les schématiser.

Un **nœud** est une connexion qui relie au moins trois dipôles entre eux. Une **maille** est un chemin fermé dans un circuit électrique.

Deux dipôles sont montés en **série** si aucun nœud n'est présent entre les deux (ex : la pile et le voltmètre ci-contre).

Deux dipôles sont montés en **dérivation** (ou en **parallèle**) si leurs bornes sont connectées aux mêmes nœuds (ex : les deux résistors ci-contre).



Charge, courant et loi des nœuds

La **charge électrique** q (en coulomb C) est une grandeur physique portée par certains corps qui caractérise leur capacité à créer ou à être influencées par un champ électromagnétique.

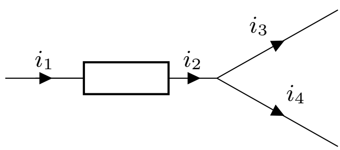
Le **courant électrique** correspond au mouvement d'ensemble de porteurs de charges (généralement, des électrons) dans un conducteur. L'**intensité i d'un courant électrique** (en ampère A) en un point donné se définit à partir du nombre de charges électriques $\mathrm{d}q$ passant par ce point en un temps infinitésimal $\mathrm{d}t$: $\boxed{i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$

Entre deux nœuds, l'intensité du courant électrique est la même, quel que soit le nombre de dipôles que ce courant traverse.

La **loi des nœuds** énonce que la somme des intensités de courant entrant à un nœud est égale à la somme des intensités de courant sortant de ce nœud :

$$\boxed{\sum i_{\text{entrant}} = \sum i_{\text{sortant}}}$$

Ci-dessous, $i_1 = i_2$ et $i_2 = i_3 + i_4$.



Potentiel, tension et loi des mailles

Le **potentiel électrique** ϕ (en volt V) est une grandeur définie en tout point de l'espace, qui correspond à un facteur près à l'énergie potentielle électrique que possèderait une charge électrique en ce point.

La **tension électrique** U_{AB} (en volt V) entre deux points A et B est égale à la différence de potentiels entre ces deux points : $\boxed{U_{AB} = \phi_A - \phi_B}$. On a notamment : $U_{BA} = -U_{AB}$.

Une tension peut donc être positive ou négative. Une tension peut également être nulle : aux bornes d'un fil, la tension est toujours égale à $0\,\mathrm{V}$.

Pour trois points quelconques A, B et C d'un circuit électrique, la **loi d'additivité des tensions** énonce que :

$$\boxed{U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}}$$

La **loi des mailles** énonce alors que, dans une maille quelconque $(ABC...YZA)$, la somme des tensions est nulle :

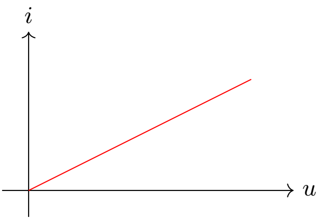
$$\boxed{U_{AB} + U_{BC} + ... + U_{YZ} + U_{ZA} = 0}$$

2 Étude de quelques dipôles

La **caractéristique d'un dipôle électrique** est la relation existant entre l'intensité i du courant traversant le dipôle et la tension u aux bornes de celui-ci.

Les résistors

Caractéristique d'un résistor :



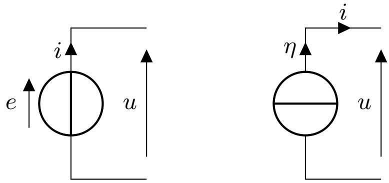
La tension u aux bornes d'un résistor est proportionnelle à l'intensité i la parcourant : c'est la **loi d'Ohm**. Mathématiquement, on a :

$$\boxed{u = R \times i}$$

avec R la **résistance** (en ohm Ω) du résistor. Elle quantifie la difficulté que le courant a à traverser un résistor face à une tension donnée.

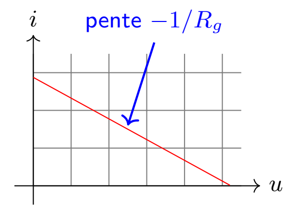
Les résistances utilisées en travaux pratiques sont comprises, en ordre de grandeur, entre $10\,\mathrm{k\Omega}$ et $100\,\mathrm{k\Omega}$. On peut également citer d'autres résistances typiques, comme celle d'un ampèremètre ($10\,\Omega$) et celle d'un voltmètre ($1\,\mathrm{M\Omega}$).

Les sources d'énergie électrique

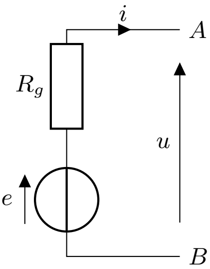


Une **source *idéale* de tension** (gauche) délivre la tension $u = e$ quel que soit le courant i la traversant. e est alors appelée la force électromotrice (ou fém).

Une **source *idéale* de courant** (droite) délivre le courant d'intensité $i = \eta$ quelle que soit la tension u à ses bornes. η est alors appelé le courant électromoteur.



Les sources réelles d'énergie électrique présentent une caractéristique décroissante : plus la tension délivrée augmente, plus le courant débité diminue (gauche). On les modélise alors par une association série d'une source idéale de tension et d'une résistance R_g interne au générateur (droite).



Les piles électriques

Une **pile électrique** est un dispositif électrochimique qui produit de l'électricité en convertissant de l'énergie chimique en énergie électrique.

La **capacité électrique** Q (en coulomb C ou ampère-heure Ah) d'une pile correspond à la charge électrique au sein de la pile. La **capacité nominale** d'une pile Q_{max} correspond à la capacité de la pile neuve, souvent annoncée par le constructeur.

♥ $1\,\mathrm{Ah} = 3600\,\mathrm{C}$ et $1\,\mathrm{mAh} = 3{,}6\,\mathrm{C}$.

Une pile alimentant un circuit débitera une intensité électrique I, ce qui diminuera sa capacité électrique d'une quantité ΔQ pendant une durée Δt selon la relation : $\boxed{\Delta Q = I \times \Delta t}$

L'**énergie $\mathcal{E}_{\text{pile}}$ stockée par une pile** (en joule J ou watt-heure Wh) s'exprime en fonction de sa capacité électrique Q et de la tension U à ses bornes : $\boxed{\mathcal{E}_{\text{pile}} = Q \times U}$

♥ $1\,\mathrm{Wh} = 3600\,\mathrm{J}$ et $1\,\mathrm{mWh} = 3{,}6\,\mathrm{J}$.

3 Point de fonctionnement d'un circuit

Soit un dipôle alimenté par une source d'énergie électrique. On appelle **point de fonctionnement** le point d'intersection des caractéristiques du dipôle et de la source d'énergie : il correspond à l'état de fonctionnement du circuit face à l'alimentation et au dipôle proposés.

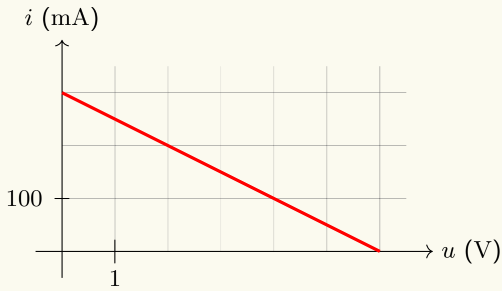
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Alimentation d'une lampe par une pile

Énoncé

On étudie une pile dont la caractéristique est donnée ci-dessous :



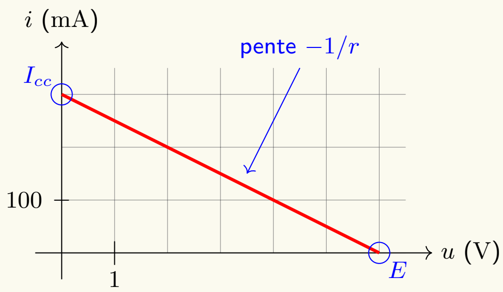
1. Déterminer la tension à vide E (pour un courant nul) et l'intensité de court-circuit I_{cc} (pour une tension nulle) de la pile.
2. Déterminer la résistance interne r de la pile.
3. Lorsque la pile atteint l'équilibre, elle est usée et ne fonctionne plus. Considérant une pile dont la capacité électrique est $Q_{\text{max}} = 720\,\text{C}$, calculer le nombre N_e d'électrons échangés pendant toute sa durée de fonctionnement. On rappelle que la charge d'un électron est $q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$.
4. Quelle énergie la pile possède-t-elle initialement, sachant que la tension à ses bornes vaut alors E ? L'exprimer en joules puis en milliwatt-heure.
5. La pile alimente une lampe de résistance $R = 40\,\Omega$. Déterminer graphiquement le point de fonctionnement du circuit.
6. En déduire la durée de fonctionnement de la pile en considérant un courant constant.

Exercice résolu

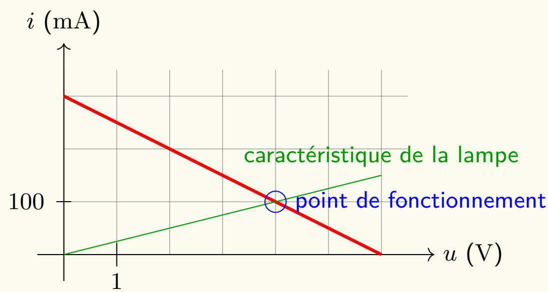
■ À revoir ■ Maîtrisé

Résolution

1. On observe graphiquement que $E = 6\,\mathrm{V}$ et $I_{cc} = 300\,\mathrm{mA}$.



2. On relève graphiquement que la pente a de la caractéristique est $a = \dfrac{-I_{cc}}{E} = -\dfrac{300 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}}{6\,\mathrm{V}} = -5 \times 10^{-2}\,\Omega^{-1}$. Or cette pente est égale à $-1/r$, donc $r = \dfrac{-1}{a} = 20\,\Omega$.
3. La capacité électrique de la pile est due à la charge de chacun des électrons de conduction, donc $Q_{\text{max}} = N_e \times |q_e|$. On en déduit que $N_e = \dfrac{Q_{\text{max}}}{|q_e|} = 4{,}5 \times 10^{21}$ électrons.
4. Initialement, la capacité électrique de la pile est Q_{max} et sa tension est E. On a donc $\mathcal{E}_{\text{pile}} = Q_{\text{max}} \times E = 4320\,\mathrm{J} = 1200\,\mathrm{mWh}$.
5. On superpose la caractéristique de la lampe à celle de la pile, en traçant la droite $i = u/R$ (loi d'Ohm) :



   On en déduit que la pile et la lampe fonctionnent à une tension de $4\,\mathrm{V}$ et pour un courant d'intensité $100\,\mathrm{mA}$.
6. On a $Q_{\text{max}} = I \times \Delta t$ avec $I = 100\,\mathrm{mA}$ d'après la question précédente. Il vient donc que $\Delta t = \dfrac{Q_{\text{max}}}{I} = \dfrac{720\,\mathrm{C}}{100 \times 10^{-3}\,\mathrm{A}} = 7200\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{h}$.

2 Circuits en régime variable

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Approximation des régimes quasi-stationnaires

L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ou ARQS) consiste à considérer comme négligeable le temps de propagation Δt des ondes électromagnétiques devant la période du signal T : $\Delta t \ll T$.

Si l'on note L la longueur caractéristique d'un circuit électrique, f la fréquence du signal et c sa vitesse de propagation, l'ARQS peut se traduire par : $L \ll \dfrac{c}{f}$.

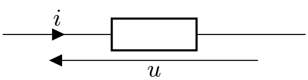
♥ On a $f = \dfrac{1}{T}$, avec T en seconde s et f en hertz Hz.

☞ Pour le réseau EDF français ($c \approx 2 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$), on a $f = 50\,\mathrm{Hz}$ pour les lignes à haute tension donc $\lambda \approx 4000\,\mathrm{km}$: on ressent les effets de retard à partir de $\sim 1000\,\mathrm{km}$, ce qui correspond à la taille du territoire français métropolitain.

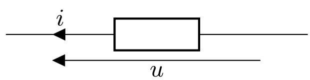
☞ Pour un circuit électrique en salle de TP avec $f = 200\,\mathrm{kHz}$, on a $\lambda \approx 1\,\mathrm{km}$: les effets de retard sont bien négligeable sur un montage de longueur $L \sim 1\,\mathrm{m}$.

Dans l'ARQS, la loi des nœuds et la loi des mailles restent valides au sein d'un circuit électrique.

2 Puissance électrique et énergie électrique



Si les flèches de courant et de tension sont de sens opposés, on est en **convention récepteur**.



Si les flèches de courant et de tension sont dans le même sens, on est en **convention générateur**.

♥ Le réflexe à avoir est donc de choisir la bonne convention quand on a à poser soi-même les tensions et intensités. **De manière générale, on posera les sources d'énergie électrique en convention générateur, et les autres dipôles en convention récepteur**.

Soit un dipôle parcouru par une intensité $i(t)$ et ayant une tension $u(t)$ à ses bornes, ces deux grandeurs étant définies en convention récepteur. La **puissance électrique** instantanée $\mathcal{P}(t)$ (en watt W) reçue par ce dipôle est le produit de l'intensité du courant par la tension :

$$\boxed{\mathcal{P}(t) = u(t) \times i(t)}$$

L'**énergie électrique** $\Delta\mathcal{E}$ **reçue** par le dipôle entre deux instants t_1 et t_2 est alors :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t}$$

— Pour un dipôle passif, on aura $\mathcal{P} > 0$ et donc $\Delta\mathcal{E} > 0$: le dipôle gagne de l'énergie de la part du circuit.

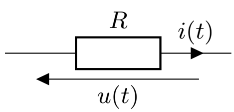
— Pour un dipôle actif, on aura $\mathcal{P} < 0$ et donc $\Delta\mathcal{E} < 0$: le dipôle cède de l'énergie au circuit.

Dans le cas d'un dipôle étudié en régime permanent pendant une durée Δt, on aura :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = \mathcal{P} \times \Delta t}$$

3 Dipôles en régime variable

Résistors



En convention récepteur, la loi d'Ohm s'écrit :

$$\boxed{u(t) = R \times i(t)}$$

Un résistor de résistance R parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ et possédant une tension $u(t)$ à ses bornes perçoit une puissance électrique :

$$\boxed{\mathcal{P}_R = R \times i^2(t) = \frac{u^2(t)}{R}}$$

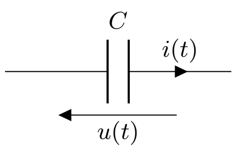
L'énergie emmagasinée est libérée plus tard sous forme de chaleur : c'est l'**effet Joule**.

Condensateurs

Un **condensateur** est un dipôle constitué de deux armatures conductrices et séparées par un isolant. Chaque armature possède une charge $\pm Q$, opposée à celle de l'autre armature.

La charge Q présente sur chacune des armatures est proportionnelle à la tension u aux bornes du condensateur : $\boxed{Q = C \times u}$. C (en farad F) est la **capacité** du condensateur.

♥ En pratique, les capacités varient typiquement entre $1\,\mathrm{nF}$ et $1\,\mu\mathrm{F}$.



En convention récepteur, on a :

$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$

L'**énergie $\mathcal{E}_C$ stockée dans un condensateur** dont la tension à ses bornes est u vaut :

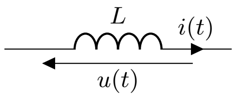
$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2}$$

On peut réécrire cette formule sous la forme : $\boxed{\mathcal{E}_C = \dfrac{Q^2}{2C}}$.

La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

Bobines

Une **bobine** est un dipôle constitué d'un enroulement de fils autour d'un même axe. Le passage d'un courant dans une bobine crée un champ magnétique qui lui confère des propriétés électriques.



En convention récepteur, on a :

$$\boxed{u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

avec L l'**inductance** (en henry H) de la bobine.

En pratique, les inductances varient typiquement entre $10\,\mathrm{mH}$ et $100\,\mathrm{mH}$.

L'**énergie $\mathcal{E}_L$ stockée dans une bobine** traversée par un courant i est :

$$\boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2}$$

L'intensité du courant parcourant une bobine ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

4 Association de dipôles

Résistors en série, résistors en dérivation

Deux résistors de résistances R_1 et R_2 en série sont équivalents à un résistor de résistance $\boxed{R_{\text{éq}} = R_1 + R_2}$.

En généralisant, n résistors de résistances $R_1, ..., R_n$ en série sont équivalents à un résistor de résistance :

$$\boxed{R_{\text{éq}}^{\text{série}} = R_1 + ... + R_n = \sum_{k=1}^{n} R_k}$$

Deux résistors de résistances R_1 et R_2 en dérivation sont équivalents à un résistor de résistance $R_{\text{éq}}$ tel que $\boxed{\dfrac{1}{R_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$.

En généralisant, n résistors de résistances $R_1, ..., R_n$ en dérivation sont équivalents à un résistor de résistance $R_{\text{éq}}^{\text{dérivation}}$ tel que :

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{éq}}^{\text{dérivation}}} = \frac{1}{R_1} + ... + \frac{1}{R_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$$

Attention, l'erreur typique est d'écrire $R_{\text{éq}}^{\text{dérivation}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. En plus d'être évidemment fausse, cette relation n'est même pas homogène.

Condensateurs en série, condensateurs en dérivation

Deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 en série sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{\text{éq}}$ tel que $\boxed{\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$.

En généralisant, n condensateurs de capacités $C_1, ..., C_n$ en série sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{\text{éq}}^{\text{série}}$ tel que :

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{éq}}^{\text{série}}} = \frac{1}{C_1} + ... + \frac{1}{C_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}}$$

Deux condensateurs de capacités C_1 et C_2 en dérivation sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{\text{éq}} = C_1 + C_2$.

En généralisant, n condensateurs de capacités $C_1, ..., C_n$ en dérivation sont équivalents à un condensateur de capacité :

$$\boxed{C_{\text{éq}}^{\text{dérivation}} = C_1 + ... + C_n = \sum_{k=1}^{n} C_k}$$

Bobines en série, bobines en dérivation

Deux bobines d'inductances L_1 et L_2 en série sont équivalentes à une bobine d'inductance $\boxed{L_{\text{éq}} = L_1 + L_2}$.

En généralisant, n bobines d'inductances $L_1, ..., L_n$ en série sont équivalentes à une bobine d'inductance :

$$\boxed{L_{\text{éq}}^{\text{série}} = L_1 + ... + L_n = \sum_{k=1}^{n} L_k}$$

Deux bobines d'inductances L_1 et L_2 en dérivation sont équivalentes à une bobine d'inductance $L_{\text{éq}}$ telle que $\boxed{\frac{1}{L_{\text{éq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$.

En généralisant, n bobines d'inductances $L_1, ..., L_n$ en dérivation sont équivalentes à une bobine d'inductance $L_{\text{éq}}^{\text{dérivation}}$ telle que :

$$\boxed{\frac{1}{L_{\text{éq}}^{\text{dérivation}}} = \frac{1}{L_1} + ... + \frac{1}{L_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}}$$

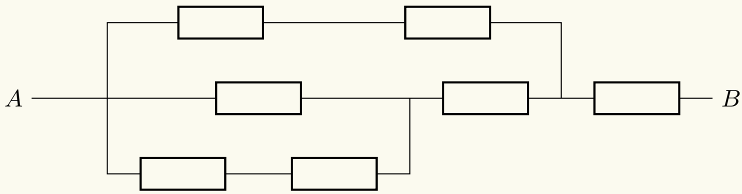
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Calcul d'une résistance équivalente

Énoncé

Le circuit ci-dessous contient des résistors qui ont tous la même résistance R.



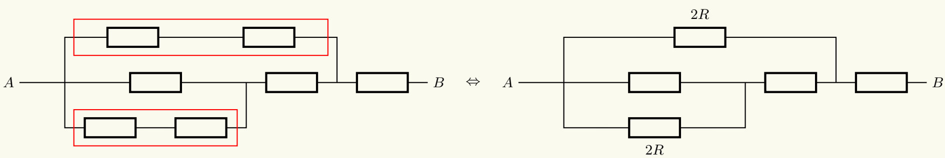
Déterminer la résistance équivalente $R_{\text{éq}}$ entre les points A et B.

Résolution

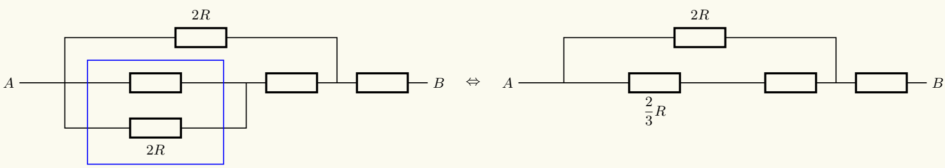
Dans ce corrigé, les associations en série seront indiquées en rouge et les associations en parallèle seront indiquées en bleu.

On commence par observer deux associations série. On utilise le fait que l'on peut alors sommer les résistances, donnant à chaque fois une résistance $R + R = 2R$.

.



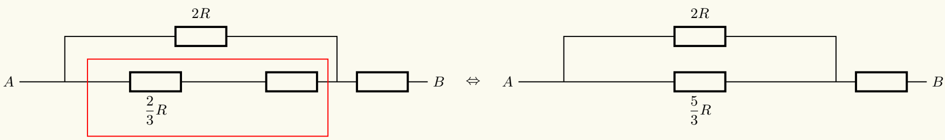
Il y a ensuite une association parallèle, de résistance R' telle que $\dfrac{1}{R'} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2R} = \dfrac{3}{2R}$. On a donc $R' = \dfrac{2}{3}R$.



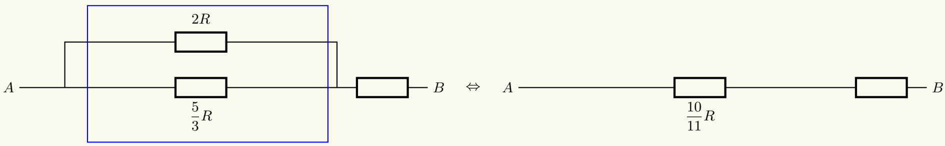
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

L'association série qui apparaît a une résistance $\dfrac{2}{3}R + R = \dfrac{5}{3}R$:



L'association parallèle qui apparaît a une résistance R'' telle que $\dfrac{1}{R''} = \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{\frac{5}{3}R} = \dfrac{1}{2R} + \dfrac{3}{5R} = \dfrac{5}{10R} + \dfrac{6}{10R} = \dfrac{11}{10R}$. On a donc $R'' = \dfrac{10}{11}R$.



Il ne reste alors qu'une association série de deux résistances. On en déduit que $R_{\text{éq}} = \dfrac{10}{11}R + R$, et alors :

$$\boxed{R_{\text{éq}} = \frac{21}{11}R}$$

3 Circuits linéaires du premier ordre

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Conditions initiales

Les conditions initiales d'un circuit électrique correspondent aux valeurs en $t = 0^+$ des différentes grandeurs électriques (intensités, tensions, charges) dudit circuit.

Pour les déterminer, on exploite les continuités de la tension aux bornes d'un condensateur ($u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+)$) et de l'intensité du courant traversant une bobine ($i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+)$) en traçant le circuit équivalent en $t = 0^-$.

On utilise alors le fait que :

— Un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent ; l'intensité le traversant est alors toujours nulle.

— Une bobine est équivalente à un fil en régime permanent ; la tension à ses bornes est alors toujours nulle.

2 Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1

Une équation différentielle d'ordre 1 est mise sous **forme canonique** si elle est écrite sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_\infty}$$

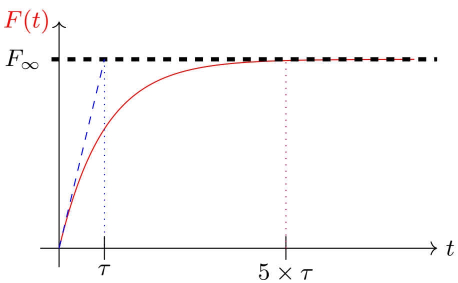
τ est appelée **constante de temps** ou **temps caractéristique**. F_∞ représente la valeur de $F(t)$ lorsque t tend vers l'infini. En d'autres termes, il s'agit de la valeur de $F(t)$ « à l'équilibre ».

Les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau} \times F(t) = \frac{1}{\tau} \times F_\infty$ sont de la forme :

$$\boxed{F(t) = F_\infty + A \times e^{-t/\tau}}$$

où A est une constante que l'on détermine à l'aide des conditions initiales.

3 Régime transitoire et régime permanent



On aperçoit sur le tracé de $F(t)$ que deux phases ont lieu pour l'évolution de la vitesse. Tout d'abord, celle-ci augmente, puis elle stagne jusqu'à une valeur limite.

La première phase est nommée **régime transitoire** ; la deuxième phase est le **régime permanent**.

On estime généralement que le régime permanent est atteint au bout de $5 \times \tau$. τ représente donc un ordre de grandeur nécessaire pour passer du régime transitoire au régime permanent.

Si $F(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et de constante de temps τ, on peut déterminer celle-ci par : $F(t = \tau) - F(t = 0) = 0{,}63 \times (F_\infty - F(t = 0))$.

La pente à l'origine coupe l'axe horizontale correspondant à la vitesse finale à l'instant $t = \tau$. Il s'agit d'une autre méthode courante pour mesurer expérimentalement la valeur de la constante de temps.

Exercice résolu

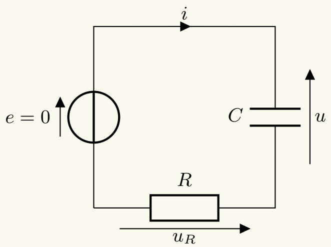
■ À revoir ■ Maîtrisé

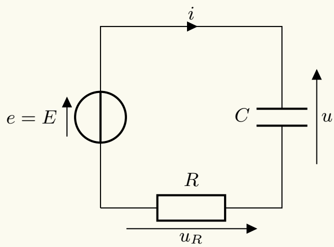
Équations d'un circuit RC série

Énoncé

Soit le circuit RC série ci-dessous.

Le circuit est initialement éteint depuis « très longtemps ». À l'instant $t = 0$, on alimente le circuit par une source de tension : on passe instantanément de $e = 0$ (gauche, $t < 0$) à $e = E$ (droite, $t \geq 0$).

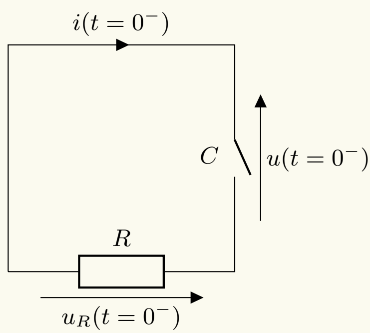




1. Déterminer $u(t = 0^+)$.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. On posera un temps caractéristique τ en fonction des données de l'énoncé. Vers quelle valeur la tension $u(t)$ tend-elle lorsque $t \to \infty$?
3. Résoudre l'équation différentielle.
4. Tracer l'allure de $u(t)$.

Résolution

1. On sait que la tension aux bornes d'un condensateur est continue du temps : $u(t = 0^-) = u(t = 0^+)$. On représente alors ci-contre le circuit équivalent pour $t = 0^-$, en utilisant le fait qu'un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent.



Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

La loi des mailles donne $u(t=0^-)+u_R(t=0^-)=0$ avec $u_R(t=0^-)=R\times i(t=0^-)$ (loi d'Ohm). Cependant, aucun courant ne circule dans le circuit en $t=0^-$ à cause de la présence de l'interrupteur ouvert : on en déduit que $i(t=0^-)=0$, et donc que $u_R(t=0^-)=0$. Nécessairement, $u(t=0^-)=0$.

On a alors : $\boxed{u(t=0^+)=0}$.

2. Appliquons la loi des mailles pour $t\geq 0$: $E-u-u_R=0$, c'est-à-dire : $u+u_R=E$. Or $u_R=R\times i$ (loi d'Ohm), avec ce même courant d'intensité i qui circule dans le condensateur : $i=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

   On en déduit alors que $u+RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=E$. On divise par RC pour avoir la forme canonique : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{RC}u=\dfrac{1}{RC}E}$. Le temps caractéristique est alors $\boxed{\tau=RC}$.

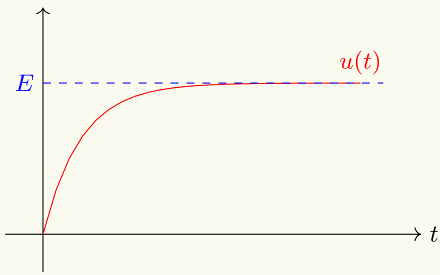
   Le second membre s'identifie comme $\dfrac{1}{\tau}\times U_\infty$: on en déduit que $u(t)$ tend vers $\boxed{U_\infty=E}$.

3. On a $u(t)=E+Ae^{-t/\tau}$ avec A une constante que l'on détermine à l'aide de la condition initiale $u(t=0)=0$.

   On a alors $E+A\underbrace{e^{-0/\tau}}_{=1}=0$, c'est-à-dire $A=-E$. On en déduit que :

$$\boxed{u(t)=E-Ee^{-t/\tau}=E\times\left[1-e^{-t/\tau}\right]}$$

4.



4 Circuits linéaires du deuxième ordre

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Oscillateur harmonique

On dit que l'équation :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty}$$

est celle d'un **oscillateur harmonique**. ω_0 (en $\mathrm{rad\,s^{-1}}$) est appelée **pulsation propre** du système ; F_∞ est la valeur autour de laquelle oscille $F(t)$.

Les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty$ sont de la forme :

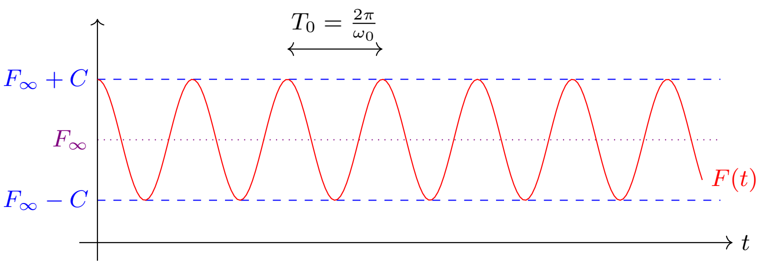
$$\boxed{F(t) = F_\infty + A \times \cos(\omega_0 t) + B \times \sin(\omega_0 t)}$$

où A et B sont deux constantes que l'on détermine à l'aide des conditions initiales.

♥ On peut mettre $F(t)$ sous la forme : $F(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$, où $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

La fréquence f_0 d'un oscillateur harmonique est liée à sa pulsation ω_0 par la formule $\omega_0 = 2\pi f_0$.

On peut également lier la pulsation ω_0 à la période T_0 par la formule $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.



2 Oscillateur amorti

On dit que l'équation :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \times F(t) + \omega_0^2 \times F(t) = \omega_0^2 \times F_\infty}$$

est celle d'un **oscillateur amorti**. ω_0 (en $\mathrm{rad\,s^{-1}}$) est appelée **pulsation propre** du système ; Q (sans unité) est le facteur de qualité ; F_∞ est la valeur vers laquelle tend $F(t)$ lorsque $t \to \infty$.

Pour déterminer les solutions de cette équation, on pose l'**équation caractéristique** :

$$\boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0}$$

Cette équation se traite différemment selon la valeur de Q.

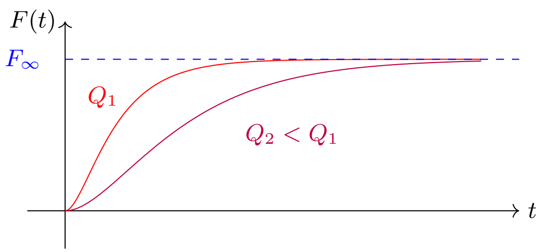
Régime apériodique

Si $Q < 1/2$, le discriminant Δ de l'équation caractéristique est positif : on se situe dans le régime **apériodique**. Les deux solutions r_1 et r_2 sont donc réelles et négatives.

On pose alors $\tau_1 = -\dfrac{1}{r_1}$ et $\tau_2 = -\dfrac{1}{r_2}$, ce qui permet d'écrire :

$$F(t) = \underbrace{F_\infty}_{\text{régime permanent}} + \underbrace{Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}}_{\text{régime transitoire}}$$

avec A et B deux constantes que l'on détermine à l'aide des conditions initiales.



♥ τ_1 et τ_2 représentent deux constantes de temps du système. Le régime permanent est alors atteint lorsque l'on a atteint $5 \times \max(\tau_1, \tau_2)$.

Régime pseudo-périodique

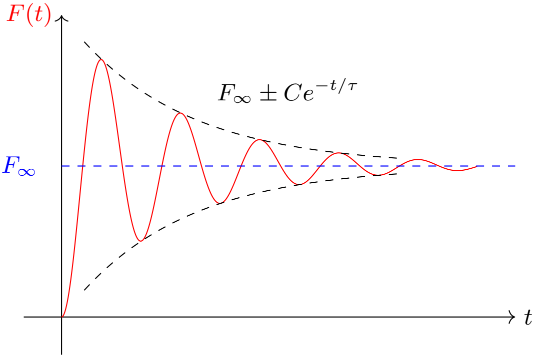
Si $Q > 1/2$, le discriminant Δ de l'équation caractéristique est négatif : on se situe dans le régime **pseudo-périodique**. Les deux solutions r_1 et r_2 sont donc complexes et conjuguées.

On pose alors τ et Ω tels que $r_{1,2} = -\dfrac{1}{\tau} \pm j\Omega$, ce qui permet d'écrire :

$$F(t) = \underbrace{F_\infty}_{\text{régime permanent}} + \underbrace{\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}}$$

avec A et B deux constantes que l'on détermine à l'aide des conditions initiales.

♥ On peut également écrire $F(t) = F_\infty + C\cos(\Omega t + \varphi)e^{-t/\tau}$, où $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.



♥ $\Omega = \omega_0 \times \overbrace{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}^{\leq 1}$ n'est pas égal à ω_0, sauf quand Q tend vers l'infini. Un système oscillera donc d'autant plus lentement qu'il est amorti.

Régime apériodique critique

Si $Q = 1/2$, on se situe dans le cas **apériodique critique**. Ce cas est uniquement théorique, car Q n'est jamais exactement égal à $1/2$.

Il s'agit du régime apériodique pour lequel on atteint le régime permanent le plus rapidement.

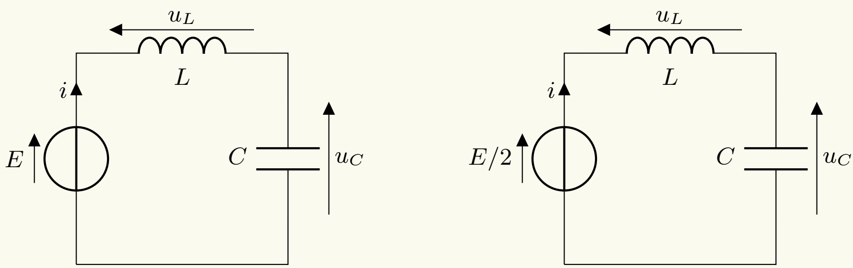
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Équations d'un circuit LC

Énoncé

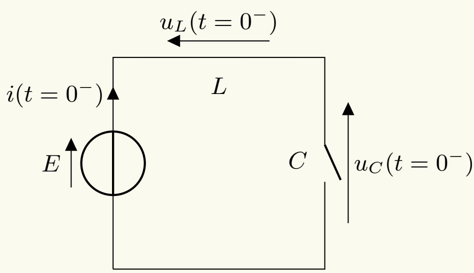
Soit un circuit LC série, alimenté depuis longtemps par une source de tension continue E (ci-dessous à gauche). À $t = 0$, on divise par deux l'amplitude de la source de tension (ci-dessous à droite).



1. Déterminer $u_C(t = 0^+)$, $i(t = 0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.
2. Déterminer l'équation différentielle portant sur u_C. La mettre sous forme canonique.
3. Résoudre cette équation différentielle à l'aide des conditions initiales.

Corrigé

1. On sait que la tension aux bornes d'un condensateur est continue du temps : $u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+)$. Par ailleurs, l'intensité du courant traversant une bobine est également continue : $i(t = 0^-) = i(t = 0^+)$.
   On représente alors ci-contre le circuit équivalent pour $t = 0^-$, en utilisant le fait qu'un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent, et qu'une bobine est équivalente à un fil en régime permanent.



Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

La loi des mailles donne que $E = u_C(t=0^-) + u_L(t=0^-)$ avec $u_L(t=0^-) = 0$ (la tension aux bornes d'un fil est nulle). On en déduit que $u_C(t=0^-) = E$, et donc par continuité que $\boxed{u_C(t=0^+) = E}$.

Par ailleurs, on a $i(t=0^-) = 0$ car le courant ne peut traverser un interrupteur ouvert, et donc par continuité $\boxed{i(t=0^+) = 0}$. Or $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ puisque ce courant passe par le condensateur, donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = 0}$.

2. On applique la loi des mailles pour $t \geq 0$: $E/2 = u_L + u_C$. Or $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, donc $E/2 = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$. Enfin, $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, donc on a $E/2 = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C$ puisque C est une constante. On peut réécrire cette équation en divisant par LC :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{2LC}}$$

On identifie à la forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_\infty$, ce qui donne $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $\omega_0^2 u_\infty = \dfrac{E}{2LC}$. Nécessairement, on a $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{u_\infty = \dfrac{E}{2}}$.

3. L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique. Les solutions sont donc de la forme $u_C(t) = \dfrac{E}{2} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

Or $u_C(t=0) = E$, donc $\dfrac{E}{2} + A\overbrace{\cos(\omega_0 \times 0)}^{=1} + B\overbrace{\sin(\omega_0 \times 0)}^{=0} = E$, et alors $\boxed{A = \dfrac{E}{2}}$.

On sait de plus que $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$. Or $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[0 + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right] = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$. Ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = B\omega_0$, et on en déduit que $B\omega_0 = 0$, d'où $\boxed{B = 0}$.

Finalement, la solution de l'équation différentielle est :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{2} \times [1 + \cos(\omega_0 t)]}$$

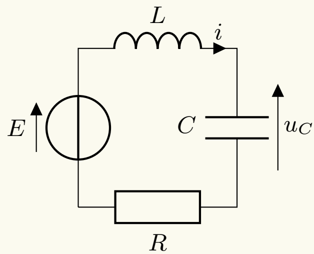
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Circuit RLC en régime apériodique

Énoncé

Soit un circuit RLC série initialement éteint depuis longtemps, puis soumis à une tension continue E à partir de $t = 0$ (voir ci-dessous pour $t \geq 0$).



On a $R = 2\,\mathrm{k}\Omega$, $L = 1\,\mathrm{mH}$ et $C = 25\,\mathrm{nF}$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$. La mettre sous forme canonique.
2. Déterminer les valeurs de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q du circuit. Dans quel régime se trouve-t-il ?
3. Donner alors la forme des solutions, puis déterminer la valeur du temps caractéristique Δt d'amortissement du système. On donne : $\sqrt{384} \approx 19{,}6$.
4. On rajoute une bobine d'inductance L' en série des autres composants. Pour quelle valeur de L' est-on en régime apériodique critique ?

Corrigé

1. On applique la loi des mailles : $E = u_L + u_C + u_R$ avec u_L et u_R les tensions respectivement aux bornes de la bobine et de la résistance, prises en convention récepteur.

   Or $u_R = R \times i = R \times C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}$ donc l'équation différentielle devient $E = LC\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C$. En divisant par LC, on a alors :

   $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}}$$

   En identifiant à la forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_\infty$, on a alors $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$, $\boxed{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$ et $\boxed{u_\infty = E}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

2. Calculons la pulsation propre :

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1\times 10^{-3}\,\mathrm{H}\times 25\times 10^{-9}\,\mathrm{F}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{25\times 10^{-12}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{25}}\times\sqrt{10^{12}}\\ &= \frac{1}{5}\times 10^{6}\\ &= 0{,}2\times 10^{6}\\ &= 2\times 10^{5}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\end{aligned}$$

Calculons le facteur de qualité :

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\\ &= \frac{1}{2\times 10^{3}}\times\sqrt{\frac{1\times 10^{-3}}{25\times 10^{-9}}}\\ &= \frac{1}{2\times 10^{3}}\times\sqrt{\frac{1}{25\times 10^{-6}}}\\ &= \frac{1}{2\times 10^{3}}\times\frac{1}{5\times 10^{-3}}\\ &= \frac{1}{10} = 0{,}1\end{aligned}$$

Le facteur de qualité Q est inférieur à $1/2$: on est donc en **régime apériodique**.

3. En régime apériodique, les solutions sont de la forme : $\boxed{u_C(t) = E + Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}}$.
   On détermine τ_1 et τ_2 en cherchant les solutions de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$.
   Le discriminant de cette équation est :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{\omega_0}{Q}\right) - 4\omega_0^2\\ &= \left(\frac{2\times 10^{5}}{0{,}1}\right)^2 - 4\times\left(2\times 10^{5}\right)^2\\ &= 4\times 10^{12} - 4\times 4\times 10^{10}\\ &= 400\times 10^{8} - 16\times 10^{10}\\ &= 384\times 10^{10}\ \mathrm{SI}\end{aligned}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Les solutions de l'équation caractéristique sont alors :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-\dfrac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} \\ &= \frac{-\dfrac{2 \times 10^5}{0{,}1} + \sqrt{384 \times 10^{10}}}{2} \\ &= \frac{-20 \times 10^5 + 19{,}6 \times 10^5}{2} \\ &= \frac{-0{,}4 \times 10^5}{2} \\ &= -2 \times 10^4 \,\mathrm{SI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{-\dfrac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2} \\ &= \frac{-\dfrac{2 \times 10^5}{0{,}1} - \sqrt{384 \times 10^{10}}}{2} \\ &= \frac{-20 \times 10^5 - 19{,}6 \times 10^5}{2} \\ &= \frac{-39{,}6 \times 10^5}{2} \\ &= -1{,}98 \times 10^6 \,\mathrm{SI} \end{aligned}$$

On en déduit alors les valeurs des deux constantes de temps :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{1}{r_1} \\ &= -\frac{1}{-2 \times 10^4} \\ &= 0{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} \\ &= 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= -\frac{1}{r_2} \\ &= -\frac{1}{-1{,}98 \times 10^6} \\ &\approx 0{,}5 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} \\ &= 5 \times 10^{-7}\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

La constante de temps la plus élevée est donc τ_1, ce qui signifie qu'elle correspond à la durée la plus longue (entre τ_1 et τ_2) pour atteindre le régime permanent. Nécessairement, on a $\boxed{\Delta t = 5\tau_1 = 25 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}}$.

4. Si l'on rajoute une bobine en série, l'inductance totale vaut $L_{\text{tot}} = L + L'$. On atteint le régime apériodique critique si $Q = \dfrac{1}{2}$, donc si $\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L_{\text{tot}}}{C}} = \dfrac{1}{2}$.

Nécessairement, on a $L_{\text{tot}} = \dfrac{R^2}{4}C = \dfrac{(2 \times 10^3)^2}{4} \times 25 \times 10^{-9} = 25 \times 10^{-3}\,\mathrm{H}$, et donc $\boxed{L' = L_{\text{tot}} - L = 25\,\mathrm{mH} - 1\,\mathrm{mH} = 24\,\mathrm{mH}}$.

Exercice résolu

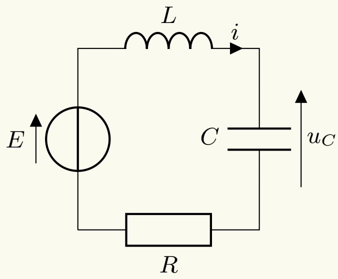
■ À revoir ■ Maîtrisé

Circuit RLC en régime pseudo-périodique

Énoncé

Soit un circuit RLC série initialement éteint depuis longtemps, puis soumis à une tension continue E à partir de $t = 0$ (voir ci-contre pour $t \geq 0$).

On a $R = 200\,\Omega$, $L = 20\,\mathrm{mH}$ et $C = 20\,\mathrm{nF}$. On admet par ailleurs que u_C vérifie l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_\infty$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ et $u_\infty = E$.

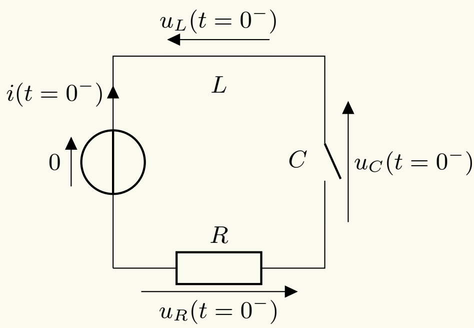


1. Déterminer $u_C(t = 0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t = 0^+)$.
2. Calculer les valeurs de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q du circuit. Dans quel régime se trouve-t-il ?
3. Déterminer les expressions du temps caractéristique τ d'amortissement du système et du temps caractéristique d'oscillation T.
4. En utilisant les conditions initiales, donner la solution de l'équation différentielle en fonction de E, t, T et τ.

Corrigé

1. On sait que la tension aux bornes d'un condensateur est continue du temps : $u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+)$. Par ailleurs, l'intensité du courant traversant une bobine est également continue : $i(t = 0^-) = i(t = 0^+)$.

   On représente alors ci-contre le circuit équivalent pour $t = 0^-$, en utilisant le fait qu'un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent, et qu'une bobine est équivalente à un fil en régime permanent.



Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

On a $i(t=0^-)=0$ car le courant ne peut traverser un interrupteur ouvert, et donc par continuité $i(t=0^+)=0$. Or $i=C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ puisque ce courant passe par le condensateur, donc $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0^+)=0}$.

Par ailleurs, la loi des mailles donne que $0=u_C(t=0^-)+u_L(t=0^-)+u_R(t=0^-)$ avec $u_L(t=0^-)=0$ (la tension aux bornes d'un fil est nulle) et par la loi d'Ohm $u_R(t=0^-)=R\times i(t=0^-)=0$ (pas de courant à cet instant). On en déduit que $u_C(t=0^-)=0$, et donc par continuité que $\boxed{u_C(t=0^+)=0}$.

2. Calculons la pulsation propre :

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{20\times10^{-3}\,\mathrm{H}\times 20\times10^{-9}\,\mathrm{F}}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{20^2\times10^{-12}}}\\ &= \frac{1}{20}\times\sqrt{10^{12}}\\ &= \frac{1}{2}\times10^5 = 5\times10^4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\end{aligned}$$

Calculons le facteur de qualité :

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\\ &= \frac{1}{200}\times\sqrt{\frac{20\times10^{-3}}{20\times10^{-9}}}\\ &= \frac{1}{200}\times\sqrt{10^6}\\ &= \frac{1}{200}\times1000\\ &= 5\end{aligned}$$

Le facteur de qualité Q est supérieur à $1/2$: on est donc en **régime pseudo-périodique**.

3. En régime pseudo-périodique, les solutions sont de la forme :

$$\boxed{u_C(t)=E+\left[A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)\right]e^{-t/\tau}}$$

On détermine Ω et τ en cherchant les solutions de l'équation caractéristique $r^2+\dfrac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta=\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2-4\omega_0^2=\omega_0^2\times\left(\dfrac{1}{Q^2}-4\right)$. Puisque l'on est en régime pseudo-périodique, ce discriminant est négatif, et les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont complexes et conjuguées :

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

$$\begin{aligned}
r_{1,2} &= \frac{-\dfrac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \\
&= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2}\sqrt{\omega_0^2\left(4 - \frac{1}{Q^2}\right)} \\
&= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}
\end{aligned}$$

On écrit alors ces solutions sous la forme $r_{1,2} = -\dfrac{1}{\tau} + j\Omega$, ce qui donne par identification : $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$.

On en déduit que le **temps caractéristique d'amortissement** est $\boxed{\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}}$, et que le **temps caractéristique d'oscillation** est $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}}$.

4. On a $u_C(t) = E + [A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]\,e^{-t/\tau}$, ainsi que les deux conditions initiales $u_C(t=0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$.

   Or $u_C(t=0) = E + \left[A\underbrace{\cos(\Omega\times 0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(\Omega\times 0)}_{=0}\right]\underbrace{e^{-0/\tau}}_{=1} = E + A$, donc $0 = E + A$ et alors $\boxed{A = -E}$.

   De plus :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E + [A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]\,e^{-t/\tau}\right) \\
&= 0 + [-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)]e^{-t/\tau} + [A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] \times \left(-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\right) \\
&= \left[\left(B\Omega - \frac{A}{\tau}\right)\cos(\Omega t) + \left(-A\Omega - \frac{B}{\tau}\right)\sin(\Omega t)\right]e^{-t/\tau}
\end{aligned}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Et alors :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) &= \left[\left(B\Omega - \frac{A}{\tau}\right)\overbrace{\cos(\Omega\times 0)}^{=1} + \left(-A\Omega - \frac{B}{\tau}\right)\overbrace{\sin(\Omega\times 0)}^{=0}\right]\overbrace{e^{-0/\tau}}^{=1} \\ &= B\Omega - \frac{A}{\tau}\end{aligned}$$

On en déduit que $B\Omega - \dfrac{A}{\tau} = 0$, et donc que $\boxed{B = \dfrac{A}{\Omega\tau} = -\dfrac{E}{\Omega\tau}}$ puisque $A = -E$.

En définitive, la solution est alors :

$$\boxed{u_C(t) = E \times \left[1 - \cos(\Omega t) - \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right] e^{-t/\tau}}$$