1 Statique des fluides

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Forces volumiques

On considère une particule de fluide de volume δV mésoscopique de masse volumique μ. Au lieu de considérer les forces $\delta\overrightarrow{F}$ s'appliquant sur cette particule, on s'intéresse aux forces volumiques $\overrightarrow{f} = \dfrac{\delta\overrightarrow{F}}{\delta V}$ en $\mathrm{N/m^3}$.

On en déduit l'expression de deux forces classiques :

— Le poids volumique $\boxed{\overrightarrow{f_P} = \mu.\overrightarrow{g}}$;

— La force volumique de pression $\boxed{\overrightarrow{f_p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ p}$.

2 Relation de la statique des fluides

Si l'on applique le PFD à une particule de fluide statique uniquement soumise à son poids et aux forces de pression, on trouve la **relation de la statique des fluides** :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ p = \mu.\overrightarrow{g}}$$

♥ Si l'axe z est orienté vers le haut, alors $\overrightarrow{g} = -g.\overrightarrow{e_z}$ et on a $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g}$.

♥ Si l'axe z est orienté vers le bas, alors $\overrightarrow{g} = g.\overrightarrow{e_z}$ et on a $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \mu g}$.

On a donc *toujours* la pression qui augmente avec la profondeur et qui diminue avec l'altitude au sein d'un même fluide. En particulier, toujours au sein d'un même fluide, deux points de même altitude/de même profondeur auront la même pression.

Pour un fluide incompressible

Un fluide **incompressible** (ou **homogène**) a une masse volumique μ uniforme dans l'espace. Il vient que l'on peut intégrer la relation de la statique des fluides entre deux points A et B :

— Si l'axe z est orienté vers le haut, alors $\boxed{p_A - p_B = -\mu g(z_A - z_B)}$;

— Si l'axe z est orienté vers le bas, alors $\boxed{p_A - p_B = +\mu g(z_A - z_B)}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Démonstration de la relation fondamentale de la statique des fluides

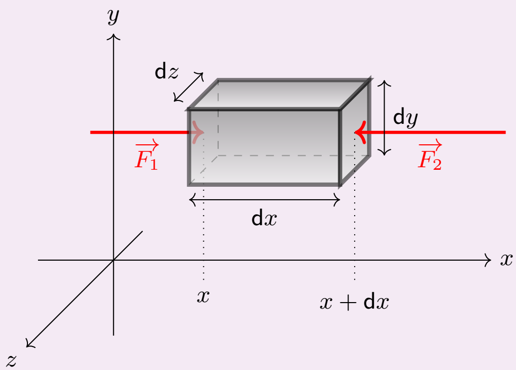
Énoncé

Soit un volume élémentaire de fluide contenu entre les abscisses x et $x + dx$, les ordonnées y et $y + dy$ et les cotes z et $z + dz$. Ce volume baigne dans le fluide environnant et dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On note $p(x, y, z)$ le champ de pression, μ le champ de masse volumique et on se place en régime statique.

1. *Exprimer la force de pression $\delta\overrightarrow{F_1}$ exercée sur la face à l'abscisse x. De même, exprimer la force de pression $\delta\overrightarrow{F_2}$ exercée sur la face à l'abscisse $x + dx$.*
2. *En déduire la force de pression $\delta\overrightarrow{F_x}$ exercée selon la direction x en fonction notamment de $dV = dxdydz$. Par analogie, exprimer les forces de pression $\delta\overrightarrow{F_y}$ (respectivement $\delta\overrightarrow{F_z}$) exercée selon la direction y (respectivement z).*
3. *Montrer alors que l'expression de la force « totale » de pression est $\delta\overrightarrow{F_{\text{pression}}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(p)dV$.*
4. *Exprimer le poids $\delta\vec{P}$ du système. Par application du principe fondamental de la statique, en déduire que la relation fondamentale de la statique des fluides : $\overrightarrow{\text{grad}}\,(p) = \mu.\vec{g}$.*

Résolution

1. On représente le système à l'aide du schéma ci-dessous :



Puisque la face de gauche a une surface dydz et est contenu à l'abscisse x, on en déduit que $\delta\overrightarrow{F_1} = p(x, y, z) \times \mathrm{d}y\mathrm{d}z.\overrightarrow{u_x}$.

La force $\delta\overrightarrow{F_2}$ est contenue quant à elle à l'abscisse $x + \mathrm{d}x$ et est orientée vers la gauche, donc $\delta\overrightarrow{F_2} = -p(x + \mathrm{d}x, y, z) \times \mathrm{d}y\mathrm{d}z.\overrightarrow{u_x}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

2. Exprimons $\delta\overrightarrow{F_x}$:

$$\begin{aligned}
\delta\overrightarrow{F_x} &= \delta\overrightarrow{F_1} + \delta\overrightarrow{F_2} \\
&= p(x,y,z) \times \mathrm{d}y\mathrm{d}z.\overrightarrow{u_x} - p(x+\mathrm{d}x,y,z) \times \mathrm{d}y\mathrm{d}z.\overrightarrow{u_x} \\
&= -\left[p(x+\mathrm{d}x,y,z) - p(x,y,z)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\overrightarrow{u_x} \\
&= -\frac{p(x+\mathrm{d}x,y,z) - p(x,y,z)}{\mathrm{d}x} \times \overbrace{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}^{\mathrm{d}V}.\overrightarrow{u_x}
\end{aligned}$$

(on multiplie et on divise par $\mathrm{d}x$ pour faire apparaître une dérivée)

$$= -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}V.\overrightarrow{u_x}$$

Par analogie, on en déduit que $\delta\overrightarrow{F_y} = -\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}V.\overrightarrow{u_y}$ et $\delta\overrightarrow{F_z} = -\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}V.\overrightarrow{u_z}$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
\delta\overrightarrow{F_{\text{pression}}} &= \delta\overrightarrow{F_x} + \delta\overrightarrow{F_y} + \delta\overrightarrow{F_z} \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}V.\overrightarrow{u_x} - \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}V.\overrightarrow{u_y} - \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}V.\overrightarrow{u_z} \\
&= -\left[\frac{\partial p}{\partial x}.\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial p}{\partial y}.\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial p}{\partial z}.\overrightarrow{u_z}\right]\mathrm{d}V \\
&= -\overrightarrow{\text{grad}}\,(p)\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

4. La masse du système est $\delta m = \mu.\mathrm{d}V$. On en déduit l'expression du poids $\delta\vec{P} = \delta m.\vec{g} = \mu\mathrm{d}V.\vec{g}$.
Le volume élémentaire étant à l'équilibre, on en déduit, par application du principe fondamental de la statique, que $\delta\overrightarrow{F_{\text{pression}}} + \delta\vec{P} = \vec{0}$, c'est-à-dire que $-\overrightarrow{\text{grad}}\,(p)\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}V.\vec{g} = \vec{0}$.
En simplifiant par $\mathrm{d}V$, on a finalement :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(p) = \mu.\vec{g}$$

Exercice résolu

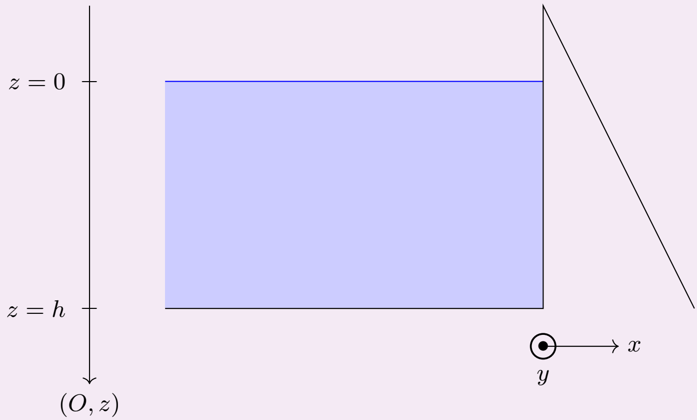
■ À revoir ■ Maîtrisé

Force appliquée sur un barrage

Énoncé

Soit un barrage permettant de contenir l'eau (au repos) d'un réservoir. On prend un axe vertical descendant, dont l'origine correspond à la surface libre de l'eau (voir figure ci-dessous, qui représente le barrage en coupe avec le mur à droite).

On note $p_{atm} = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ *la pression atmosphérique,* z *la profondeur d'un point* M *quelconque du fluide et* $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ *la masse volumique uniforme de l'eau. Le barrage a une largeur* $L = 50\,\mathrm{m}$ *selon la direction* y*, et l'eau va jusqu'à une profondeur* $h = 10\,\mathrm{m}$.



1. *Rappeler la relation fondamentale de l'hydrostatique. En déduire que l'on a, dans le contexte de l'énoncé,* $\dfrac{dp}{dz} = \rho g$ *(on justifiera notamment qu'il s'agit d'une dérivée « classique » et pas d'une dérivée partielle).*
2. *Exprimer* $p(z)$ *en fonction des données de l'énoncé.*
3. *À l'aide d'un calcul intégrale, déterminer la force pressante* F *que l'eau exerce sur le mur du barrage. Faire l'application numérique.*

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Résolution

1. La relation fondamentale de l'hydrostatique est $\overrightarrow{\text{grad}}\,(p) = \rho.\vec{g}$, avec ici $\vec{g} = g.\overrightarrow{u_z}$ car l'axe vertical est descendant.
   On en déduit donc que $\begin{pmatrix} \partial p/\partial x \\ \partial p/\partial y \\ \partial p/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix}$.
   Les deux premières projections donnent $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$: on en déduit que p est indépendant de x et de y. Nécessairement, p ne dépend que de z, et alors $\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$.
   La projection de la troisième composante donne alors bien $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho g$.
2. On a $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho g$ avec ρ et g deux grandeurs uniformes (indépendantes de z) d'après les hypothèses de l'énoncé. On en déduit que $p(z) = \int \rho g \mathrm{d}z = \rho g z + A$ avec A une constante que l'on peut déterminer à l'aide des conditions aux limites.
   En effet, $p(z=0) = p_{\text{atm}}$ d'après l'énoncé, et $p(z=0) = A$ en remplaçant z par 0 dans l'expression précédente de $p(z)$. On en déduit que $A = p_{\text{atm}}$, et donc que $p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g z$.
3. La force infinitésimale de pression $\delta\vec{F}$ exercée par l'eau sur une petite portion du mur d'aire $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ est $\delta\vec{F} = p \times \mathrm{d}y\mathrm{d}z.\overrightarrow{u_x}$.
   On a alors $\vec{F} = \displaystyle\iint_{\text{mur du barrage}} p(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\overrightarrow{u_x}$, et donc :

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \iint_{\text{mur du barrage}} (p_{\text{atm}} + \rho g z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\overrightarrow{u_x} \\
&= \int_{y=0}^{y=L} \mathrm{d}y \times \int_{z=0}^{z=h} (p_{\text{atm}} + \rho g z)\,\mathrm{d}z.\overrightarrow{u_x} \\
&= L \times \left(p_{\text{atm}} \times h + \rho g \times \frac{h^2}{2}\right).\overrightarrow{u_x}
\end{aligned}$$

   On a donc $F = Lh \times \left(p_{\text{atm}} + \rho g \dfrac{h}{2}\right) = 7{,}5 \times 10^7\,\mathrm{N}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Modèle de l'atmosphère isotherme

Énoncé

Considérons une atmosphère isotherme de température T dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g.\overrightarrow{e_z}$ supposé uniforme, même à grande altitude. L'atmosphère est modélisée par un gaz parfait de masse molaire M. On note $\mu(z)$ la masse volumique de l'atmosphère compressible et $p(z)$ sa pression ; p_0 représente l'altitude en $z = 0$.

1. *Rappeler la relation fondamentale de l'hydrostatique. En déduire que l'on a, dans le contexte de l'énoncé, $\dfrac{dp}{dz} = -\mu g$ (on justifiera notamment qu'il s'agit d'une dérivée « classique » et pas d'une dérivée partielle).*
2. *À l'aide de la loi des gaz parfaits, déterminer une expression de μ en fonction notamment de p.*
3. *Déterminer l'expression explicite de $p(z)$. Mettre en évidence une longueur caractéristique λ pour l'évolution spatiale de la pression.*

Résolution

1. La relation fondamentale de l'hydrostatique est $\overrightarrow{\text{grad}}\,(p) = \mu.\vec{g}$, avec ici $\vec{g} = -g.\overrightarrow{u_z}$ car l'axe vertical est ascendant.

   On en déduit donc que $\begin{pmatrix} \partial p/\partial x \\ \partial p/\partial y \\ \partial p/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu g \end{pmatrix}$.

   Les deux premières projections donnent $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0$: on en déduit que p est indépendant de x et de y. Nécessairement, p ne dépend que de z, et alors $\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$.

   La projection de la troisième composante donne alors bien $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g$.
2. La loi des gaz parfaits sur un volume mésoscopique δV donne : $p \times \delta V = \delta n \times R \times T$. Or $\delta n = \dfrac{\delta m}{M}$, donc on a finalement : $p \times \delta V \times M = \delta m \times R \times T$. Or $\mu = \dfrac{\delta m}{\delta V}$, donc $M \times p = \mu \times R \times T$ et alors $\boxed{\mu = \dfrac{M}{RT} \times p}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

3. En utilisant $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g$ et $\mu = \frac{M}{RT}p$, on détermine que $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{Mg}{RT} \times p$, et donc : $\boxed{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \frac{1}{\lambda}p = 0}$ avec $\lambda = \frac{RT}{Mg}$.
   Il vient alors que $p(z) = Ae^{-z/\lambda}$. Pour déterminer l'expression de A, on utilise la condition aux limites : $p(z=0) = p_0$, donc $Ae^{-0/\lambda} = p_0$. On en déduit que $A = p_0$, et donc que $\boxed{p(z) = p_0 e^{-z/\lambda}}$.

2 Cinématique des fluides

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Grandeurs lagrangiennes et eulériennes

Pour décrire un écoulement fluide, on peut essayer de décomposer le fluide en méso-éléments, que l'on appelle « particules fluides » : c'est un point P de position $\overrightarrow{OP}(t) = (x_P(t), y_P(t), z_P(t))$, de volume $\delta V_P(t)$, de température $T_P(t)$, de vitesse $\overrightarrow{v_P}(t)$, etc.

On dit alors qu'il s'agit d'une **description lagrangienne** de l'écoulement.

Un autre point de vue est de fixer un point de coordonnées (x, y, z) indépendantes du temps, et de visualiser l'évolution de certains paramètres locaux : la température $T(x, y, z, t)$, la vitesse $\overrightarrow{v}(x, y, z, t)$, la masse volumique $\mu(x, y, z, t)$, etc.

On dit alors qu'il s'agit d'une **description eulérienne** de l'écoulement.

En mécanique des fluides, on utilise systématiquement la description eulérienne.

♥ En particulier, la position ne peut être qu'une grandeur lagrangienne : la position eulérienne de l'écoulement n'existe pas.

2 Écoulement stationnaire, écoulement uniforme

Un écoulement est **stationnaire** si toutes les grandeurs eulériennes le décrivant sont indépendantes du temps.

☛ En particulier : $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$ pour un écoulement stationnaire.

♥ Ne pas confondre un écoulement stationnaire ($\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$) et un fluide statique ($\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$) ! Un fluide statique est un cas particulier de fluide stationnaire.

Un écoulement est **uniforme** si toutes les grandeurs eulériennes le décrivant sont indépendantes de l'espace.

3 Écoulement irrotationnel, écoulement tourbillonnaire

On dit qu'un écoulement est **irrotationnel** si $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Il est donc **tourbillonnaire** (ou **rotationnel**) si $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

Il vient alors que le champ de vitesses $\overrightarrow{v}$ d'un écoulement irrotationnel peut s'écrire sous la forme : $\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi}$. On dit que $\overrightarrow{v}$ découle/dérive du **potentiel scalaire** ϕ.

4 Écoulement homogène, écoulement incompressible

Un écoulement est **homogène** si sa masse volumique μ est uniforme, c'est-à-dire si elle est identique en tout point de l'écoulement.

Un écoulement est **incompressible** si sa masse volumique μ est uniforme et constante, c'est-à-dire si elle est identique en tout point et à tout instant de l'écoulement.

♥ Un écoulement stationnaire et homogène est incompressible.

5 Écoulement à flux conservatif, écoulement à flux non-conservatif

On dit qu'un écoulement est **à flux conservatif** si div $\overrightarrow{v} = 0$. Il est donc à flux non-conservatif si div $\overrightarrow{v} \neq 0$.

Il vient alors que le champ de vitesses $\overrightarrow{v}$ d'un écoulement à flux conservatif peut s'écrire sous la forme : $\boxed{\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A}}$. On dit que $\overrightarrow{v}$ découle/dérive du **potentiel vecteur** $\overrightarrow{A}$.

6 Point d'arrêt

Soit un point A présent au sein d'un écoulement. On dit que A est un **point d'arrêt** si l'écoulement y bifurque dans plusieurs directions.

Il vient alors que la vitesse en un point d'arrêt est nul.

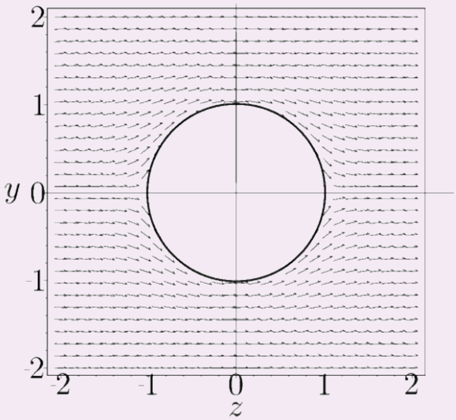
Exercice résolu

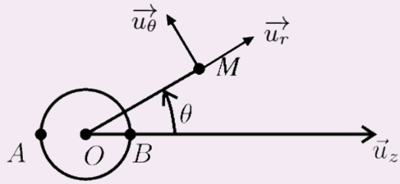
■ À revoir ■ Maîtrisé

Étude d'un écoulement

Énoncé

On considère un écoulement stationnaire et uniforme $\overrightarrow{v_0} = v_0.\overrightarrow{u_z}$. Dans cet écoulement, on place une sphère de centre O et de rayon R. On considère que l'écoulement est stationnaire, à flux conservatif et irrotationnel. Le nouveau champ des vitesses $\overrightarrow{v}(r,\theta)$ ainsi obtenu est représenté sur la figure ci-dessous.





On donne l'expression du gradient et de la divergence en coordonnées sphériques :

- $\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \dfrac{\partial f}{\partial r}.\overrightarrow{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}.\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}.\overrightarrow{u_\varphi}$;
- $\text{div}\ \overrightarrow{J} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2 J_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial(\sin(\theta) J_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi}$.

1. *Expliquer pourquoi l'on peut affirmer l'existence d'une fonction ϕ telle que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}\ \phi$.*
2. *On admet que ϕ peut s'écrire sous la forme $\phi = \alpha r\cos(\theta) + \dfrac{\beta\cos(\theta)}{r^2} + \gamma$, où α, β et γ sont des constantes. Exprimer $\overrightarrow{v}$ dans la base sphérique.*
3. *Que devient l'expression de $\overrightarrow{v}$ lorsque l'on est « suffisamment loin » de la sphère ? Montrer alors que l'on a $\alpha = v_0$.*
4. *Que peut-on dire de la vitesse du fluide au point $(r = R, \theta = \pi)$? Justifier.*
5. *En déduire alors l'expression de β, puis celle de $\overrightarrow{v}$.*
6. *Vérifier que l'écoulement est à flux conservatif.*

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Résolution

1. L'écoulement est irrotationnel, donc le champ des vitesses $\vec{v}$ peut s'écrire comme le gradient d'un potentiel scalaire ϕ.
2. On a :
$$\frac{\partial f}{\partial r} = \alpha\cos(\theta) - \frac{2\beta}{r^3}\cos(\theta)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\alpha r\sin(\theta) - \frac{\beta\sin(\theta)}{r^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$$
On en déduit, par l'expression du gradient donnée par l'énoncé, que :
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha\cos(\theta) - \frac{2\beta}{r^3}\cos(\theta) \\ -\alpha\sin(\theta) - \frac{\beta}{r^3}\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$
3. Suffisamment loin de la sphère, l'écoulement n'est pas perturbé par celle-ci. On a donc $\vec{v} \approx \vec{v_0} = v_0.\vec{u_z}$ si $r \to \infty$.
Or $\vec{v}(r \to \infty) = \begin{pmatrix} \alpha\cos(\theta) \\ -\alpha\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha.\vec{u_z}$.
Par identification des deux expressions de $\vec{v}$, on en déduit que $\alpha = v_0$.
4. En $(r = R, \theta = \pi)$, on se situe au point A. Il s'agit d'un point d'arrêt, car l'écoulement y bifurque dans plusieurs directions. On en déduit que $\vec{v}(r = R, \theta = \pi) = \vec{0}$.
5. On a :
$$\vec{v}(r = R, \theta = \pi) = \begin{pmatrix} \alpha \times (-1) - \frac{2\beta}{R^3} \times (-1) \\ -\alpha \times 0 - \frac{\beta}{R^3} \times 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\beta}{R^3} - \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Ce vecteur devant être nul, d'après la question précédente, on en déduit que $\frac{2\beta}{R^3} - \alpha = 0$, et donc que $\beta = \frac{v_0 R^3}{2}$ puisque $\alpha = v_0$.
Il vient donc que $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_0\cos(\theta) - v_0\frac{R^3}{r^3}\cos(\theta) \\ -v_0\sin(\theta) - \frac{v_0}{2}\frac{R^3}{r^3}\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

6. Un écoulement est à flux conservatif si la divergence du champ des vitesses est nul. Calculons les dérivées partielles en question :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(v_0\cos(\theta)r^2 - v_0\frac{R^3}{r}\cos(\theta)\right)\\ &= 2v_0\cos(\theta)r + v_0\frac{R^3}{r^2}\cos(\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\sin(\theta)v_\theta)}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-v_0\sin^2(\theta) - \frac{v_0}{2}\frac{R^3}{r^3}\sin^2(\theta)\right)\\ &= -2v_0\sin(\theta)\cos(\theta) - v_0\frac{R^3}{r^3}\sin(\theta)\cos(\theta)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\text{div }\vec{v} &= \frac{1}{r^2}\times\left(2v_0\cos(\theta)r + v_0\frac{R^3}{r^2}\cos(\theta)\right)\\ &\quad+\frac{1}{r\sin(\theta)}\times\left(-2v_0\sin(\theta)\cos(\theta) - v_0\frac{R^3}{r^3}\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\\ &\quad+\frac{1}{r\sin(\theta)}\times 0\\ &= \frac{2v_0\cos(\theta)}{r} + v_0\frac{R^3}{r^4}\cos(\theta)\\ &\quad-\frac{2v_0\cos(\theta)}{r} - \frac{v_0R^3\cos(\theta)}{r^4}\\ &= 0\end{aligned}$$

L'écoulement est donc bien à flux conservatif.

3 Débit massique, débit volumique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Débit massique

Soit un déplacement de particules fluides dans l'espace. On note respectivement $\mu(M,t)$ et $\vec{v}(M,t)$ la masse volumique et la vitesse eulériennes de l'écoulement.

On définit alors le **vecteur densité volumique de masse** (ou **vecteur densité de flux de masse**) $\vec{J}$ comme :

$$\boxed{\vec{J} = \mu.\vec{v}}$$

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté $\vec{v}$ et la masse volumique μ. Le débit massique de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égal au flux du vecteur densité de masse à travers cette surface :

$$\boxed{\mathcal{D}_m = \iint_{M\in\mathcal{S}} \vec{J}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}}$$

Le débit massique s'exprime en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

♥ Si la masse volumique est uniforme sur la section (donc si l'écoulement est incompressible), on a $\mathcal{D}_m = \mu \times \mathcal{D}_v$.

On peut montrer que le débit massique de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égale à la masse débitée par unité de temps :

$$\boxed{\mathcal{D}_m = \frac{\Delta M}{\Delta t}}$$

2 Conservation de la masse

Soit un fluide en écoulement dans un système Σ, dont on note la masse au cours du temps $\mathcal{M}(t)$. **La masse se conservant**, on a :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{D}_{m,e} - \mathcal{D}_{m,s}}$$

où $\mathcal{D}_{m,e}$ et $\mathcal{D}_{m,s}$ sont les débits massiques respectivement entrant et sortant du système.

En appliquant cette relation à un élément mésoscopique, on en déduit l'**équation locale de conservation de la masse** :

$$\boxed{\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{J} = 0}$$

Pour un écoulement stationnaire, l'équation locale de conservation de la masse devient alors :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{J} = 0}$$

On en déduit que le débit massique se conserve en régime stationnaire : $\boxed{\mathcal{D}_m^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_m^{\text{sortant}}}$.

3 Débit volumique

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté $\vec{v}$. Le **débit volumique** de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égal au flux de la vitesse à travers cette surface :

$$\boxed{\mathcal{D}_v = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{v}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}}$$

Le débit volumique s'exprime en $\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

- On choisit généralement l'orientation de $\mathcal{S}$ telle que le débit volumique soit positif.
- Si la vitesse est uniforme sur la section, on a $\boxed{\mathcal{D}_v = v \times S}$.

On peut montrer que le débit volumique de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égal au volume débité par unité de temps :

$$\boxed{\mathcal{D}_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}}$$

Si l'écoulement est stationnaire et homogène, c'est-à-dire incompressible, on a μ indépendant du temps et de l'espace. Il vient que $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ et que $\mathrm{div}\,(\mu \vec{v}) = \mu \times \mathrm{div}\,\vec{v}$. En régime stationnaire, la divergence du champ des vitesses d'un écoulement homogène est donc nul :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v} = 0}$$

On en déduit qu'un écoulement incompressible est nécessairement à flux conservatif. Nécessairement, on en déduit que le débit volumique se conserve en régime stationnaire et pour un écoulement homogène : $\boxed{\mathcal{D}_v^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_v^{\text{sortant}}}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

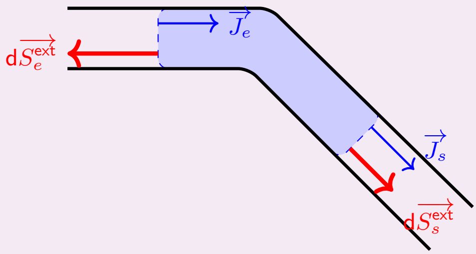
Établissement de l'équation locale de conservation de la masse en régime stationnaire

Énoncé

Établir l'équation locale de conservation de la masse en régime stationnaire.

Résolution

Soit un système Σ délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$; on note $\mathcal{V}$ le volume intérieur.



En régime permanent, Σ possède une masse constante. En notant $\delta M_e = \mathcal{D}_m^{\text{entrant}} \times \mathrm{d}t$ la masse entrant pendant $\mathrm{d}t$ et $\delta M_s = \mathcal{D}_m^{\text{sortant}} \times \mathrm{d}t$ la masse sortant pendant $\mathrm{d}t$, on a donc $\delta M_e = \delta M_s$, c'est-à-dire : $\mathcal{D}_m^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_m^{\text{sortant}}$.

En revenant à la définition de $\mathcal{D}_m$, on a alors $\iint\limits_{\mathcal{S}_e} \overrightarrow{J_e} \cdot \left(-\mathrm{d}\overrightarrow{S_e^{\text{ext}}}\right) = \iint\limits_{\mathcal{S}_s} \overrightarrow{J_s} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_s^{\text{ext}}}$, c'est-à-dire : $\iint\limits_{\mathcal{S}_e} \overrightarrow{J_e} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_e^{\text{ext}}} + \iint\limits_{\mathcal{S}_s} \overrightarrow{J_s} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_s^{\text{ext}}} = 0.$

Par ailleurs, il n'y a pas de flux selon la paroi latérale : $\iint\limits_{\mathcal{S}_{\text{lat}}} \overrightarrow{J_{\text{lat}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_{\text{lat}}^{\text{ext}}} = 0$. En sommant cette équation à la dernière, il vient donc, puisque $\mathcal{S}_e + \mathcal{S}_s + \mathcal{S}_{\text{lat}} = \mathcal{S}$:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \overrightarrow{J} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S^{\text{ext}}} = 0$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on en déduit donc que :

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} \text{div } \overrightarrow{J} \; \mathrm{d}V = 0$$

pour n'importe quel volume $\mathcal{V}$. Il vient nécessairement que l'on a :

$$\boxed{\text{div } \overrightarrow{J} = 0}$$

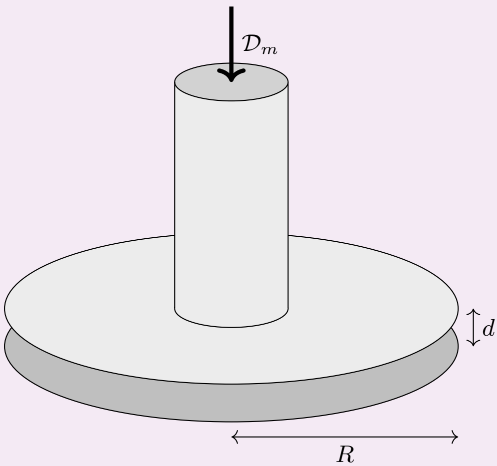
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Utilisation de la conservation du débit

Énoncé

Soit l'écoulement stationnaire produit par une pompe, imposant un débit d'eau (fluide incompressible) $\mathcal{D}_m = 200\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{min}^{-1}$ *dans une canalisation cylindrique débouchant sur un espace circulaire contenu entre deux disques parallèles de rayon* $R = 10\,\mathrm{cm}$ *séparés de* $d = 1\,\mathrm{cm}$.



Calculer la vitesse avec laquelle l'eau est éjectée en périphérie de la fontaine.

Résolution

Par conservation du débit (écoulement stationnaire d'eau, fluide incompressible), on a $\mathcal{D}_v^{\text{entrée}} = \mathcal{D}_v^{\text{sortie}}$. On peut écrire $\mathcal{D}_v^{\text{entrée}} = \dfrac{\mathcal{D}_m}{\mu_{\text{eau}}}$ et $\mathcal{D}_v^{\text{sortie}} = v_{\text{sortie}} \times 2\pi R d$, donc $v_{\text{sortie}} = \dfrac{\mathcal{D}_m}{2\pi \mu_{\text{eau}} R d} = 0{,}53\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

4 Théorème de Bernoulli et applications

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Énoncé du théorème de Bernoulli

Soit un fluide parfait, incompressible et soumis uniquement à son poids et aux forces de pression. On s'intéresse à son écoulement considéré comme stationnaire. Le **théorème de Bernoulli** indique que la **charge** $X = p + \mu g z + \frac{1}{2}\mu v^2$ se conserve sur une ligne de courant. En d'autres termes, si A et B sont sur une même ligne de courant, alors :

$$\boxed{p_A + \mu\ g\ z_A + \frac{1}{2}\mu\ v_A^2 = p_B + \mu\ g\ z_B + \frac{1}{2}\mu\ v_B^2}$$

2 Théorème de Bernoulli généralisé

Soit un fluide incompressible et soumis à son poids et aux forces de pression. On s'intéresse à son écoulement considéré comme stationnaire. Le fluide reçoit une puissance utile $\mathcal{P}_u$ de la part de l'extérieur. Si A et B sont sur une même ligne de courant, avec A en amont et B en aval, alors :

$$\boxed{p_B + \mu\ g\ z_B + \frac{1}{2}\mu\ v_B^2 = p_A + \mu\ g\ z_A + \frac{1}{2}\mu\ v_A^2 + \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{D}_v}}$$

♥ Dans le cas d'une pompe, on a $\mathcal{P}_{\text{méca}} > 0$.

♥ Dans le cas d'une perte de charge singulière (changement de forme ou d'orientation de l'écoulement) ou d'une perte de charge régulière (effets de viscosité du fluide), on a $\mathcal{P}_{\text{méca}} < 0$.

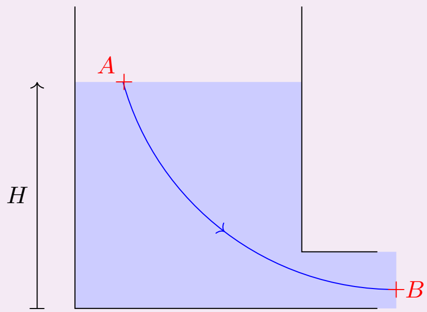
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Vidange de Torricelli

Énoncé

Soit une cuve cylindrique de section S remplie d'un fluide de masse volumique μ. Un tuyau de section $s \ll S$ permet de faire la vidange de la cuve. On note H la hauteur d'eau, A un point de la surface libre et B un point du tuyau en contact avec l'extérieur, tels que A et B font partie d'une même ligne de courant.



Déterminer la vitesse de l'écoulement en B.

Résolution

L'eau étant un fluide incompressible, on a conservation du débit : $Sv_A = sv_B$, d'où $\dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{s}{S}$. Or $s \ll S$, donc $\dfrac{s}{S} \ll 1$, $v_B \ll v_A$.

Il vient nécessairement que l'on peut considérer que $H \approx$ cste.

Par ailleurs, on a $p_A = p_{\text{atm}}$ et $p_B \approx p_{\text{atm}}$ car la section en B est suffisamment faible pour considérer que l'on est quasiment à l'air libre.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre A et B, on a donc $p_{\text{atm}} + \dfrac{1}{2}\mu v_A^2 + \mu g H = p_{\text{atm}} + \dfrac{1}{2}\mu v_B^2 + \mu g \times 0$, donc $\dfrac{1}{2}\cancel{\mu}(v_B^2 - v_A^2) = \cancel{\mu} g H$. Or $v_A \ll v_B$, donc on peut écrire que $v_B^2 - v_A^2 \approx v_B^2$: $\dfrac{1}{2}v_B^2 \approx gH$.

Il vient alors que $\boxed{v_B \approx \sqrt{2gH}}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Dimensionnement d'une pompe

Énoncé

Supposons que l'on veuille dimensionner une pompe pour qu'elle élève de l'eau d'une hauteur $H = 10\,\mathrm{m}$ *à un débit volumique* $\mathcal{D}_v = 20\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. *Le conduit de transport a une section constante. Déterminer la puissance* $\mathcal{P}_{\text{alim}}$ *à apporter à la pompe pour qu'elle fonctionne en respectant ce cahier des charges, sachant qu'elle possède un rendement* $\eta = 55\,\%$.

Résolution

Notons B un point juste après la pompe et A un point juste avant la pompe.

On souhaite que la pompe élève l'eau en gardant un débit volumique constant. Puisque la section de la conduite est constante, on a donc $v_A = v_B$.

De plus, l'écoulement n'a lieu que si la pression en amont de la pompe est supérieure à celle en aval. On se place dans le cas limite où la pompe suffit tout juste à élever l'eau sans variation de pression sensible entre A et B : $p_B \approx p_A$.

Il vient donc que $\mu g H = \mu g \times 0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{D}_v}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{\text{méca}} = \mu g H \mathcal{D}_v = 1 \times 10^3 \times 10 \times 10 \times 3{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^3/s} = 33\,\mathrm{W}$.

La puissance d'alimentation doit alors être $\mathcal{P}_{\text{alim}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\eta} = 60\,\mathrm{W}$.