1 Aspect global du champ électrostatique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Définition du champ électrostatique

Densités de charge électrique

D'un point de vue mésoscopique, les répartitions de charges ne sont pas forcément ponctuelles. Elles peuvent être linéaires (fil chargé), surfaciques (plan chargé) ou volumiques (espace chargé). On définit alors :

- La charge **linéique** λ, telle que la charge infinitésimale dQ d'un fil de longueur infinitésimale dℓ vaille : $\boxed{\mathrm{d}Q = \lambda\ \mathrm{d}\ell}$;
- La charge **surfacique** σ, telle que la charge infinitésimale dQ d'un plan de surface infinitésimale dS vaille : $\boxed{\mathrm{d}Q = \sigma\ \mathrm{d}S}$;
- La charge **volumique** ρ, telle que la charge infinitésimale dQ d'un espace de volume infinitésimal dV vaille : $\boxed{\mathrm{d}Q = \rho\ \mathrm{d}V}$.

Force électrostatique, champ électrostatique

Soit deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées d'une distance d. Les deux charges exercent l'une sur l'autre une force électrostatique selon la **loi de Coulomb** :

$$\boxed{\overrightarrow{F^e_{1\to 2}} = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\varepsilon_0\ d^2}.\overrightarrow{e_{1\to 2}}}$$

où $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$ est la **permittivité diélectrique du vide** et $\overrightarrow{e_{1\to 2}}$ est le vecteur unitaire allant de q_1 vers q_2.

♥ Si q_1 et q_2 sont de même signe, l'interaction électrostatique est répulsive ; si q_1 et q_2 sont de signes opposés, elle est attractive.

On définit alors le **champ électrostatique** $\vec{E_1}$ d'une distribution de charges (1), pas nécessairement ponctuelle, à partir de la force $\overrightarrow{F^e_{1\to 2}}$ ressentie par une charge ponctuelle q_2 dans ce champ :

$$\boxed{\overrightarrow{F^e_{1\to 2}} = q_2.\overrightarrow{E_1}}$$

Le champ électrostatique s'exprime en volt par mètre $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

☛ Soit une charge ponctuelle q_1 située en O et un point M quelconque tel que $\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r}$. Le champ électrostatique créé par q_1 en M est donc : $\overrightarrow{E_1} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.\overrightarrow{u_r}$.

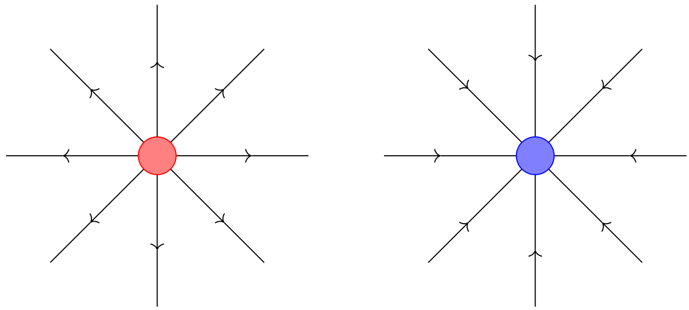
2 Topographie du champ électrostatique

Lignes de champ

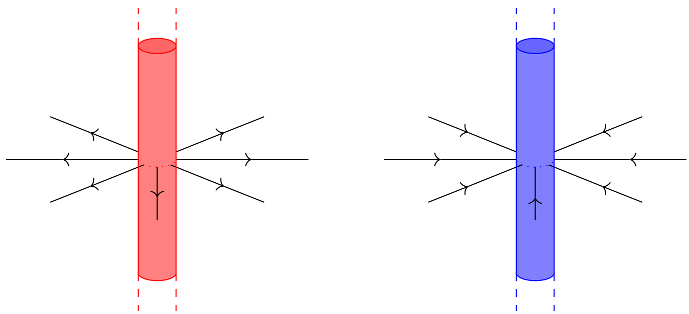
On appelle **ligne de champ** électrostatique le chemin orienté que suivrait une charge électrique ponctuelle et positive sans vitesse initiale dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}$.

En repérant en rouge les charges positives et en bleu les charges négatives, on a donc les allures suivantes pour les lignes de champ électrostatique :

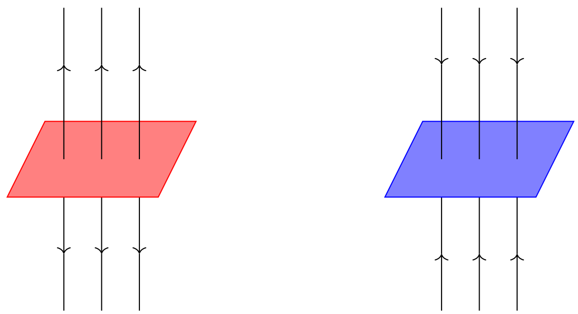
— Pour une boule ou une sphère uniformément chargée :



— Pour un cylindre uniformément chargé :



— Pour un plan uniformément chargé :



Symétries et antisymétries

On dit qu'un plan Π est un plan de **symétrie** des charges si, lorsqu'une charge existe d'un côté de ce plan, alors une charge de même signe et de même valeur existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement à la première charge.

On dit qu'un plan Π est un plan d'**antisymétrie** des charges si, lorsqu'une charge existe d'un côté de ce plan, alors une charge de signe opposé et de même valeur absolue existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement à la première charge.

Soit un point M appartenant à un plan de symétrie Π_+ des charges. Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ est alors **contenu** dans ce plan : $\boxed{\overrightarrow{E}(M) \in \Pi_+}$.

Soit un point M appartenant à un plan d'antisymétrie Π_- des charges. Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ est alors **orthogonal** à ce plan : $\boxed{\overrightarrow{E}(M) \perp \Pi_-}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Calcul de charge à partir d'une densité

Énoncé

Calculer la charge totale Q portée par un cylindre de hauteur H, de rayon R et de densité volumique $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$.

Résolution

On se place ici en coordonnées cylindriques. On a $Q = \iiint\limits_{\text{cylindre}} \rho \mathrm{d}V$ avec $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$, où $r \in [0, R]$; $\theta \in [0, 2\pi[$; $z \in [0, H]$.

Nécessairement :

$$
\begin{aligned}
Q &= \iiint\limits_{\text{cylindre}} \rho(r)\mathrm{d}V \\
&= \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{z=0}^{z=H} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \times \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z \\
&= \rho_0 \times \int_{r=0}^{r=R} \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) \mathrm{d}r \times \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_{z=0}^{z=H} \mathrm{d}z \\
&= \rho_0 \times \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_{r=0}^{r=R} \times 2\pi \times H \\
&= 2\pi\rho_0 H \times \overbrace{\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right)}^{R^2/4} \\
&= \frac{\pi}{2}\rho_0 H R^2
\end{aligned}
$$

2 Théorème de Gauss

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Invariances

- Si la répartition de charges présente une symétrie centrale $\rho(r)$ (on dit qu'il y a **invariance** selon les coordonnées θ et φ), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de r : $E = E(r)$;
- Si la répartition de charges présente une symétrie axiale $\rho(r, z)$ (on dit qu'il y a **invariance** selon θ), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de r et z : $E = E(r, z)$.
  Si la répartition de charges présente en plus une uniformité $\rho(r)$ selon l'axe de révolution (invariance selon z), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de r : $E = E(r)$.
- Si la répartition de charges est plane et uniforme (**invariances** selon x et y), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de z : $E = E(z)$.

2 Théorème de Gauss

Le **théorème de Gauss** affirme que le flux du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ à travers une surface fermée $\mathcal{S}$ et orientée vers l'extérieur est proportionnelle à la charge électrique contenue dans cette surface :

$$\boxed{\oiint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M^{\text{ext}}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

Utilité et étapes

L'utilité principale du théorème de Gauss est de pouvoir exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point M, si suffisamment de symétries permettent de simplifier le problème. Pour cela :

1. On recense les invariances dues aux répartitions des charges : on en déduit **les variables** de la norme du champ $\overrightarrow{E}$;
2. On choisit un point M dans l'espace, et on identifie les plans de symétrie et/ou d'antisymétrie passant par ce point : on en déduit **la direction** du champ $\overrightarrow{E}(M)$;
3. On choisit une **surface de Gauss** passant par le point M sur laquelle le champ $\overrightarrow{E}$ est uniforme ;
4. On exprime de façon simple le flux du champ électrostatique à travers cette surface de Gauss ;
5. On calcule la charge intérieure à la surface de Gauss, généralement via une intégration : $Q_{\text{int}} = \int \lambda\, \mathrm{d}\ell$ ou $Q_{\text{int}} = \iint \sigma\, \mathrm{d}S$ ou $Q_{\text{int}} = \iiint \rho\, \mathrm{d}V$;
6. On applique le théorème de Gauss pour déterminer $E(M)$, puis $\overrightarrow{E}(M)$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Détermination du champ électrique créé par une boule chargée uniformément en volume

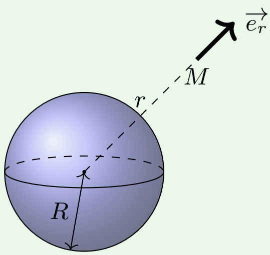
Énoncé

On considère une boule de rayon R, chargée avec une densité volumique de charge uniforme ρ_0. On note M un point quelconque pouvant être situé en dehors ou au sein de la boule, et r sa distance par rapport au centre de la boule.

1. *Montrer que $\vec{E} = E(r).\overrightarrow{e_r}$.*
2. *Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique au point M.*

Résolution

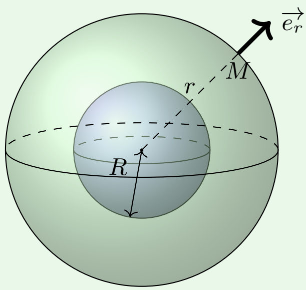
1.



- Tout plan contenant M et le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ est un plan de symétrie de la répartition de charges, donc $\overrightarrow{E}$ appartient simultanément à tous ces plans : $\overrightarrow{E} = E.\overrightarrow{e_r}$.
- La répartition de charges présente des invariances selon θ et φ. Par application du principe de Curie, on a donc $E = E(r)$.
- On déduit des deux points précédents que $\overrightarrow{E} = E(r).\overrightarrow{e_r}$.

2.

- On cherche une surface sur laquelle E est uniforme. Or $E = E(r)$, donc E ne dépend que de r. Ainsi, $E(r)$ uniforme $\Leftrightarrow$ $r =$ cste. Une telle surface est une sphère de rayon r et passant donc par M : on choisit de ce fait comme surface de Gauss une sphère de rayon r.



Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

- Le flux du champ électrostatique est :

$$\begin{aligned}\oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \overrightarrow{E}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} E(r).\overrightarrow{e_r}\cdot \mathrm{d}S.\overrightarrow{e_r}\\ &= E(r)\times \oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \mathrm{d}S \text{ car } E(r) \text{ est uniforme sur } \mathcal{S}_{\text{Gauss}}\\ &= E(r)\times 4\pi r^2\end{aligned}$$

- On calcule la charge Q_{int} intérieure à la surface de Gauss selon les cas :
  — Si $r > R$, alors la charge intérieure est répartie dans le volume $\mathcal{V}_1$ délimité par la sphère de rayon R. On a donc : $Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}_1} \rho_0 \mathrm{d}V = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$ car ρ_0 est uniforme dans le volume d'intégration $\mathcal{V}_1$;
  — Si $r < R$, alors la charge intérieure est répartie dans le volume $\mathcal{V}_2$ délimité par la sphère de rayon r. On a donc : $Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}_2} \rho_0 \mathrm{d}V = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi r^3$ car ρ_0 est uniforme dans le volume d'intégration $\mathcal{V}_2$.
- On applique le théorème de Gauss : $\oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \overrightarrow{E}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

  — Si $r > R$, alors $E(r)\times 4\pi r^2 = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{E} = \frac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2}.\overrightarrow{e_r}$.
  — Si $r < R$, alors $E(r)\times 4\pi r^2 = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi r^3$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}.\overrightarrow{e_r}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

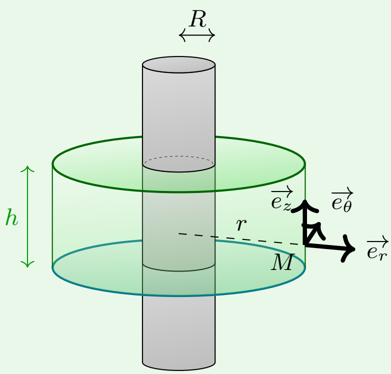
Détermination du champ électrique créé par un cylindre infini chargé uniformément en volume

Énoncé

Soit un cylindre infini de rayon R et de densité volumique de charge uniforme ρ_0. On note M un point quelconque pouvant être situé en dehors ou au sein du cylindre, et r sa distance par rapport à l'axe de révolution du cylindre.

Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique au point M.

Résolution



- Les plans $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ et $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ sont des plans de symétrie de la répartition de charges, donc $\overrightarrow{E}$ y appartient simultanément : $\overrightarrow{E} = E.\overrightarrow{e_r}$.
- La répartition de charges présente des invariances selon θ (car axe de révolution) et z (car cylindre infini et uniformément chargé le long de l'axe). Par application du principe de Curie, on a donc $E = E(r)$.
- On déduit des deux points précédents que $\overrightarrow{E} = E(r).\overrightarrow{e_r}$.

- On cherche une surface sur laquelle E est uniforme. Or $E = E(r)$, donc E ne dépend que de r. Ainsi, $E(r)$ uniforme $\Leftrightarrow r =$ cste. Une telle surface est un cylindre de rayon r et passant donc par M : on choisit de ce fait comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h arbitraire auquel on rattache deux disques (le haut et le bas du cylindre) de rayon r.
- Le flux du champ électrostatique est :

$$\oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{\substack{\text{paroi}\\\text{latérale}}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{\text{haut}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{\text{bas}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Or, pour les surfaces du haut et du bas, on a $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ selon $\pm\overrightarrow{e_z}$, donc $\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$ puisque $\overrightarrow{E}$ est selon $\overrightarrow{e_r}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

On a donc :

$$
\begin{aligned}
\oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \iint_{\substack{\text{paroi}\\ \text{latérale}}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} \\
&= \iint_{\substack{\text{paroi}\\ \text{latérale}}} E(r).\overrightarrow{e_r} \cdot \mathrm{d}S.\overrightarrow{e_r} \\
&= E(r) \times \iint_{\substack{\text{paroi}\\ \text{latérale}}} \mathrm{d}S \text{ car } E(r) \text{ est uniforme sur la paroi latérale} \\
&= E(r) \times 2\pi r h
\end{aligned}
$$

- On calcule la charge Q_{int} intérieure à la surface de Gauss selon les cas :
  - Si $r > R$, alors la charge intérieure est répartie dans le volume $\mathcal{V}_1$ délimité par le cylindre de rayon R et de hauteur h. On a donc $Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}_1} \rho_0 \mathrm{d}V = \rho_0 \times \pi R^2 h$ car ρ_0 est uniforme dans le volume d'intégration $\mathcal{V}_1$;
  - Si $r < R$, alors la charge intérieure est répartie dans le volume $\mathcal{V}_2$ délimité par le cylindre de rayon r et de hauteur h. On a donc $Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}_2} \rho_0 \mathrm{d}V = \rho_0 \times \pi r^2 h$ car ρ_0 est uniforme dans le volume d'intégration $\mathcal{V}_2$.
- On applique le théorème de Gauss : $\oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.
  - Si $r > R$, alors $E(r) \times 2\cancel{\pi} r \cancel{h} = \dfrac{\rho_0 \cancel{\pi} R^2 \cancel{h}}{\varepsilon_0}$, et donc $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}.\overrightarrow{e_r}$.
  - Si $r < R$, alors $E(r) \times 2\cancel{\pi}\cancel{r}\cancel{h} = \dfrac{\rho_0 \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cancel{h}}{\varepsilon_0}$, et donc $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}.\overrightarrow{e_r}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Détermination du champ électrique créé par un plan infini chargé uniformément en surface

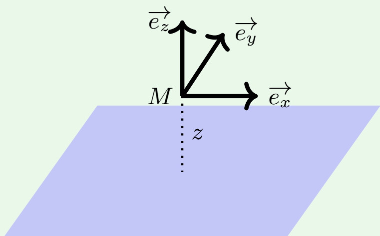
Énoncé

On considère un plan infini dans les directions x et y. On note M un point quelconque situé au-dessus du plan, et z sa distance par rapport à ce plan.

1. *Montrer que $\vec{E} = E(z).\overrightarrow{e_z}$.*
2. *Justifier que $E(-z) = -E(z)$.*
3. *Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique au point M.*
4. *Quelle est l'expression du champ électrique sous le plan ?*

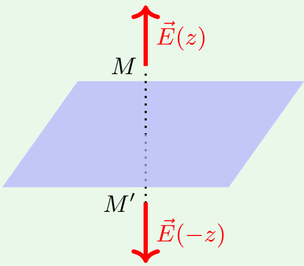
Résolution

1.



- Les plans $(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ et $(M, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ sont des plans de symétrie de la répartition de charges, donc $\vec{E}$ y appartient simultanément : $\vec{E} = E.\overrightarrow{e_z}$.
- La répartition de charges présente des invariances selon x et y car le plan est infini et uniformément chargé dans ces deux directions. Par application du principe de Curie, on a donc $E = E(z)$.
- On déduit des deux points précédents que $\vec{E} = E(z).\overrightarrow{e_z}$.

2.



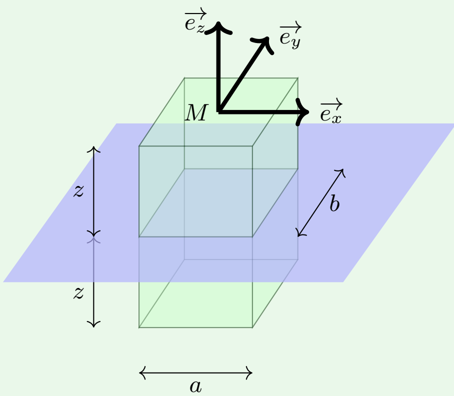
Prenons un point M' symétrique du point M par rapport au plan infini. On observe que les champs électriques sont de même norme mais de sens opposés : $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$, c'est-à-dire $E(-z).\overrightarrow{e_z} = -E(z).\overrightarrow{e_z}$.

En projetant selon $\overrightarrow{e_z}$, on a donc $E(-z) = -E(z)$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

3. • On cherche une surface sur laquelle E est uniforme. Or $E = E(z)$, donc E ne dépend que de z. Ainsi, $E(z)$ uniforme $\Leftrightarrow z =$ cste. On choisit alors comme surface de Gauss un pavé possédant deux faces parallèles au plan, de hauteur $2z$ et de dimensions transverses a selon x et b selon y. Ce choix est fait car on connaît un lien entre le champ électrique en z (au-dessus du pavé) et celui en $-z$ (en dessous du pavé).



• Le flux du champ électrostatique est :

$$\oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{\text{haut}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{\text{bas}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{\text{gauche}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$
$$+ \iint_{\text{droite}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{\text{avant}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{\text{arrière}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Or, pour les faces gauche et droite, on a $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ selon $\pm\overrightarrow{e_x}$, donc $\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$ puisque $\overrightarrow{E}$ est selon $\overrightarrow{e_z}$. De même pour les faces avant et arrière, où $d\overrightarrow{S}$ est selon $\pm\overrightarrow{e_y}$.

On a donc :

$$\oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{\text{haut}} E(z).\overrightarrow{e_z} \cdot \mathrm{d}S.\overrightarrow{e_z} + \iint_{\text{bas}} E(-z).\overrightarrow{e_z} \cdot \mathrm{d}S.(-\overrightarrow{e_z})$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Or, on a déterminé à la question précédente que $E(-z) = -E(z)$. On en déduit que les signes de la deuxième intégrale se « compensent» , et donc que :

$$\begin{aligned}
\oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} &= \iint_{\text{haut}} E(z)\mathrm{d}S + \iint_{\text{bas}} E(z)\mathrm{d}S \\
&= E(z) \times ab + E(z) \times ab \\
&\text{car } E(z) \text{ est uniforme sur les faces haute et basse} \\
&= 2E(z)ab
\end{aligned}$$

- On calcule la charge intérieure Q_{int} à la surface de Gauss. Ici, la charge est contenu dans la surface S_1 délimitée par le rectangle de côtés a et b, donc $Q_{\text{int}} = \iint_{\mathcal{S}_1} \sigma_0 \mathrm{d}S = \sigma_0 \times ab$ car σ_0 est uniforme.
- On applique le théorème de Gauss : $\oiint_{\mathcal{S}_{\text{Gauss}}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$.

  On a alors $2E(z)\cancel{ab} = \dfrac{\sigma_0 \times \cancel{ab}}{\varepsilon_0}$, et donc : $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}.\overrightarrow{e_z}$.

4. On sait que $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$, donc le champ électrique sous le plan aura pour expression : $\vec{E} = -\dfrac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}.\overrightarrow{e_z}$.

3 Tension et potentiel

■ À revoir ■ Maîtrisé

On appelle **tension électrique** U_{AB} entre deux points A et B la circulation du champ électrostatique entre ces deux points :

$$\boxed{U_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}}$$

La tension s'exprime en volt V.

Expérimentalement, on observe que la circulation du champ électrostatique le long d'un contour fermé quelconque est toujours nulle : $\oint \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = 0$. Le théorème du gradient implique alors que l'on peut écrire le champ électrostatique sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ V}$$

avec V le **potentiel électrostatique**, exprimé en volt V.

On en déduit alors que l'on peut écrire $\boxed{U_{AB} = V(A) - V(B)}$: la tension électrique ne dépend que des points de départ et d'arrivée, indépendamment du chemin parcouru. De cette écriture découle la **loi d'additivité des tensions** :

$$\boxed{U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}}$$

ainsi que **la loi des mailles** :

$$\boxed{U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = 0}$$

On appelle **équipotentielle** un contour sur lequel le potentiel V est constant. En tout point de ce contour, le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ y est orthogonal.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Calcul du potentiel à partir du champ

Énoncé

Une sphère de rayon R contenant une charge q répartie uniformément dans son volume créé par un champ :

$$\overrightarrow{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}.\overrightarrow{e_r} & \text{si } r < R \\ \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}.\overrightarrow{e_r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Calculer le potentiel V associé, en le prenant nul à l'infini. On admet que le potentiel est continu (puisque dérivable), et on utilisera le gradient en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \dfrac{\partial f}{\partial r}.\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}.\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}.\overrightarrow{e_\varphi}$.

Résolution

- Pour $r < R$, on a donc $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}.\overrightarrow{e_r} = -\dfrac{\partial V}{\partial r}.\overrightarrow{e_r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}.\overrightarrow{e_\theta} - \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}.\overrightarrow{e_\varphi}$.
  Nécessairement, $\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ (V ne dépend ni de θ ni de φ) et $\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}$.
  On en déduit que $V(r) = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{2R^3} + A$, avec A une constante.
- Pour $r > R$, il vient que $\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}$, et alors $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} + B$, avec B une constante.
- Le potentiel doit être nul en l'infini, donc $B = 0$. Par ailleurs, le potentiel est continu : il faut que pour $r = R$, les expressions du potentiel soient égales. On en déduit que $\underbrace{-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{2R^3} + A}_{V \text{ pour } r=R^-} = \underbrace{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R}}_{V \text{ pour } r=R^+}$, c'est-à-dire que $A = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3}{2R} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3R^2}{2R^3}$.
- Il vient donc l'expression générale pour V :

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(3R^2 - r^2)}{2R^3} & \text{si } r < R \\ \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

4 Aspect local du champ électrostatique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Écriture locale du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss $\oiint \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ peut se réécrire, de manière locale, comme l'**équation de Maxwell-Gauss** :

$$\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

où ρ représente la densité volumique de charge.

♥ Géométriquement, cette équation représente le fait que le champ électrostatique fuit les charges positives et qu'il converge vers les charges négatives.
♥ Physiquement, cette équation traduit localement le théorème de Gauss. On peut d'ailleurs redémontrer le théorème de Gauss à partir de l'équation de Maxwell-Gauss et du théorème de Green-Ostrogradski.

2 Écriture locale de la conservation de la circulation électrostatique

La conservation de la circulation électrostatique $\oint \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = 0$ peut se réécrire, de manière locale, comme l'**équation de Maxwell-Faraday de la statique** :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}}$$

♥ Géométriquement, cette équation représente le fait que le champ électrostatique ne « tourbillonne » pas : il fuit les charges positives et converge vers les charges négatives de manière aussi directe que possible.
♥ Physiquement, cette équation traduit localement l'existence du potentiel V. En effet, si $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$, alors il existe un champ V tel que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, V$.

3 Propriétés d'un conducteur à l'équilibre électrostatique

Un milieu est dit **conducteur** si les charges en son sein peuvent se déplacer librement.
Un tel milieu est **à l'équilibre électrostatique** si lesdites charges sont immobiles.

Puisque les charges sont immobiles, les forces électrostatiques se compensent en tout point. On en déduit que **le champ électrostatique au sein du conducteur est nul** : $\boxed{\overrightarrow{E}_{\text{int}} = \overrightarrow{0}}$.

Par l'équation de Maxwell-Gauss, il vient que $\boxed{\rho_{\text{int}} = 0}$ au sein du conducteur. S'il n'y a aucune charge en volume, alors **les charges doivent se répartir à la surface de celui-ci**.

Par l'équation de Maxwell-Faraday, il vient que $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ V_{\text{int}} = 0}$ au sein du conducteur. Le potentiel électrostatique est donc uniforme dans le conducteur, ce qui signifie que **la tension entre deux points quelconques du milieu est nulle**.

4 Relations de passage pour le champ électrostatique

Soient deux milieux (1) et (2) séparés par une interface de densité surfacique de charges σ.
$\overrightarrow{E_1}$ représente le champ électrostatique dans le milieu (1) juste avant l'interface, et $\overrightarrow{E_2}$ le champ électrostatique dans le milieu (2) juste après l'interface.
Les **relations de passage** pour le champ électrostatique à travers l'interface sont les suivantes :

- Les composantes tangentielles du champ électrostatique sont conservées :

$$E_{t,2} - E_{t,1} = 0$$

- La composante normale du champ électrostatique n'est pas conservée :

$$E_{n,2} - E_{n,1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

On peut les résumer vectoriellement *via* le **théorème de Coulomb** :

$$\boxed{\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\overrightarrow{n_{1\to 2}}}$$

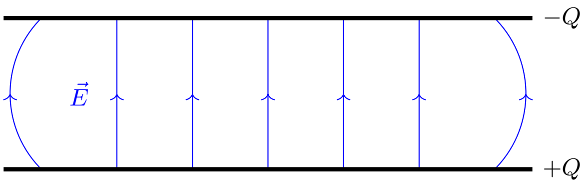
où $\overrightarrow{n_{1\to 2}}$ est le vecteur normal à l'interface, orienté du milieu (1) vers le milieu (2).

5 Condensateurs et capacité électrique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Le condensateur plan

Un **condensateur plan** est un composant électronique constitué de deux plaques parallèles l'une à l'autre, séparées par du vide. Les deux plaques ont des charges opposées $+Q$ et $-Q$, et sont en influence totale : les lignes de champ électrique de la première plaque atteignent toutes la deuxième plaque, et inversement.



La différence de potentiel (ou tension) U entre les deux armatures d'un condensateur est proportionnelle à leur charge :

$$\boxed{Q = C \times U}$$

où C est la **capacité** du condensateur, qui s'exprime en farad F.

Pour un condensateur plan, la capacité peut s'écrire :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

où S est la surface de chaque armature et e la distance entre celles-ci.

2 Le condensateur cylindrique

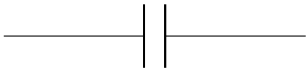
Un **condensateur cylindrique** est constitué de deux cylindres concentriques de même axe de révolution ; le cylindre intérieur, de rayon R_1, porte une charge totale $+Q$, et le cylindre extérieur, de rayon $R_2 > R_1$, porte une charge totale $-Q$.

La **capacité linéique** Γ (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$) d'un condensateur cylindrique ne dépend que du rapport entre les rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 des deux armatures :

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}}$$

3 Aspect énergétique d'un condensateur

Un condensateur est un dipôle constitué de deux armatures conductrices et séparées par un isolant. Son symbole, en électrocinétique, est le suivant :



L'intensité i parcourant un condensateur est proportionnelle à la dérivée temporelle de la tension u à ses bornes. En convention récepteur (u et i en sens opposés), on a donc :

$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$

En pratique, les capacités varient typiquement entre $1\,\mathrm{nF}$ et $1\,\mathrm{\mu F}$.

L'**énergie $\mathcal{E}_C$ stockée dans un condensateur** dont la tension à ses bornes est u vaut :

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2}$$

On peut réécrire cette formule sous la forme : $\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{Q^2}{2C}}$.

On en déduit que la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

Densité volumique d'énergie électrique

Soit un champ électrique $\vec{E}$ régnant dans l'espace. On associe à ce champ électrique une **densité volumique u_e d'énergie électrique** (en $\mathrm{J/m^3}$) :

$$\boxed{u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

L'énergie électrique totale contenue dans l'espace est donc $\mathcal{E}_e = \iiint u_e \,\mathrm{d}V$.

Exercice résolu

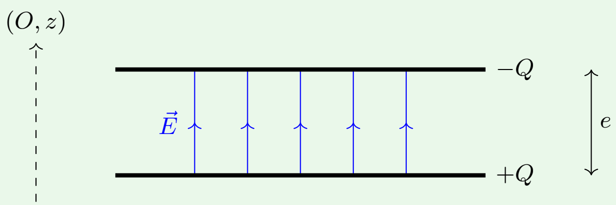
■ À revoir ■ Maîtrisé

Expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide

Énoncé

Démontrer que la capacité d'un condensateur plan est $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$ *avec* S *la section de chaque armature et* e *l'espacement entre les deux armatures.*

On supposera les deux armatures très rapprochées afin de négliger les effets de bord, et on admettra que le champ électrostatique créé en un point M *de l'espace par un plan infini de charge surfacique* σ *vaut* $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\overrightarrow{n}$ *où* $\overrightarrow{n}$ *est le vecteur normal au plan dirigé vers* M.



Résolution

Chaque armature possède une charge surfacique $\pm\sigma = \pm\dfrac{Q}{S}$. Ainsi, si l'on s'intéresse à un point quelconque au sein du condensateur :

- Le champ créé par l'armature de charge $+Q$ vaut $\overrightarrow{E_+} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}.\overrightarrow{u_z} = \dfrac{Q}{2S\varepsilon_0}.\overrightarrow{u_z}$;
- Le champ créé par l'armature de charge $-Q$ vaut $\overrightarrow{E_-} = \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}.\left(-\overrightarrow{u_z}\right) = \dfrac{Q}{2S\varepsilon_0}.\overrightarrow{u_z}$.

Le champ électrostatique total est donc $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_+} + \overrightarrow{E_-} = 2 \times \dfrac{Q}{2S\varepsilon_0}.\overrightarrow{u_z} = \dfrac{Q}{S\varepsilon_0}.\overrightarrow{u_z}$.

La tension entre les deux plaques est alors :

$$\begin{aligned} U &= \int_{\text{armature } +}^{\text{armature } -} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \\ &= \int_0^e \frac{Q}{S\varepsilon_0}.\overrightarrow{u_z} \cdot \mathrm{d}z.\overrightarrow{u_z} \\ &= \frac{Q}{S\varepsilon_0} \times e \end{aligned}$$

Or on sait que $Q = C \times U$, donc $C = \dfrac{Q}{U}$ et alors $\boxed{C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Expression de la capacité linéique d'un condensateur cylindrique dans le vide

Énoncé

Démontrer que la capacité linéique d'un condensateur cylindrique infini est $\Gamma = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$ *avec* R_1 *le rayon intérieur et* R_2 *le rayon extérieur des cylindres composant le condensateur.*

On admettra que le champ électrostatique créé en un point M *de l'espace par un cylindre infini de rayon* R *et de charge surfacique* σ *vaut* $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{0}$ *à l'intérieur de ce cylindre et* $\overrightarrow{E}(M) = \sigma \dfrac{R}{\varepsilon_0 r}.\overrightarrow{u_r}$ *à l'extérieur de ce cylindre.*

Résolution

Notons $+Q$ la charge totale de l'armature intérieure et $-Q$ celle de l'armature extérieure. On suppose que la longueur L du condensateur est très grande devant $R_2 - R_1$, ce qui permet de négliger les effets de bord en $-L/2$ et $L/2$.

L'armature interne possède une charge surfacique $\sigma_1 = \dfrac{+Q}{2\pi R_1 L}$ et l'armature externe possède une charge surfacique $\sigma_2 = \dfrac{-Q}{2\pi R_2 L}$.

Soit un point M quelconque entre les deux armatures. On a $\overrightarrow{E_1}(M) = \sigma_1 \dfrac{R_1}{r}.\overrightarrow{u_r} = \dfrac{Q}{2\pi R_1 L} \times \dfrac{R_1}{\varepsilon_0 r}.\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{E_2}(M) = \overrightarrow{0}$. Le champ électrostatique total est donc $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}.\overrightarrow{u_r}$.

La tension entre les deux plaques est alors :

$$\begin{aligned}
U &= \int_{\text{armature } 1}^{\text{armature } 2} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \\
&= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}.\overrightarrow{u_r} \cdot \mathrm{d}r.\overrightarrow{u_r} \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \times \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \times (\ln(R_2) - \ln(R_1)) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \times \ln(R_2/R_1)
\end{aligned}$$

Or on sait que $Q = C \times U$, donc $C = \dfrac{Q}{U}$ et alors $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$.

La capacité linéique $\Gamma = \dfrac{C}{L}$ vaut alors $\boxed{\Gamma = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}}$.

6 Conduction électrique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Densités de courant

Courant volumique

Soit un déplacement de particules chargées dans l'espace. On note leur densité volumique n^* (nombre de particules par unité de volume, en m^{-3}), $\vec{v}$ leur vitesse d'ensemble et q la charge d'une particule.

On définit alors le vecteur **densité volumique de courant** $\vec{j}$ comme :

$$\boxed{\vec{j} = n^* q.\vec{v}}$$

La densité volumique de courant s'exprime en A/m^2.

Intensité du courant

Soit une densité volumique de courant $\vec{j}$ passant à travers une surface orientée $\mathcal{S}$. On définit l'**intensité du courant** i comme le flux de $\vec{j}$ à travers cette surface :

$$\boxed{i = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}}$$

Son unité est l'ampère A.

♥ En particulier, si la densité de courant est uniforme sur la surface d'intégration, alors : $i = \vec{j} \cdot \vec{S}$.

Courant surfacique

Si des **courants surfaciques** de densité $\overrightarrow{j_s}$ se propagent sur une surface $\mathcal{S}$ (ouverte ou fermée), l'intensité du courant i vaut alors :

$$\boxed{i = \int_{\mathcal{C}} j_s \, \mathrm{d}\ell}$$

où $\mathcal{C}$ représente un contour sur lequel $\mathcal{S}$ s'appuie.

La densité surfacique de courant s'exprime alors, dans le système international, en ampère par mètre $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

2 Conservation de la charge

La charge électrique totale d'un système se conserve. Cette propriété peut s'écrire, à l'échelle locale et mésoscopique, comme l'équation locale de conservation de la charge :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j} = 0}$$

L'écriture intégrale de cette équation est :

$$\boxed{I_e - I_s = \frac{\text{d}Q_{\text{int}}}{\text{d}t}}$$

où I_e représente l'intensité du courant entrant et I_s celle du courant sortant.

En régime stationnaire, les dépendances en temps sont annulées. Il vient alors que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que div $\vec{j} = 0$: le vecteur densité de courant est à flux conservatif.

Du point de vue macroscopique, cela signifie qu'au sein d'un même conducteur, l'intensité entrante totale doit être égale à l'intensité sortante totale : c'est la **loi des nœuds** :

$$\boxed{\sum I_{\text{entrantes}} = \sum I_{\text{sortantes}}}$$

3 Loi d'Ohm

Localement, le vecteur densité de courant $\vec{j}$ parcourant un conducteur est proportionnel au champ électrique $\vec{E}$ en son sein. Cette propriété est appelée **loi d'Ohm locale**, qui peut s'écrire mathématiquement :

$$\boxed{\vec{j} = \gamma.\vec{E}}$$

γ est la conductivité électrique du milieu, qui est toujours positive et s'exprime en $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. $\vec{j}$ et $\vec{E}$ ont donc même direction et même sens.

$\gamma_{\text{cuivre}} = 6 \times 10^7\,\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$; $\gamma_{\text{fer}} = 1 \times 10^7\,\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$; $\gamma_{\text{eau distillée}} = 1 \times 10^{-5}\,\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

On peut réécrire cette loi d'un point de vue intégral. Soit un conducteur de longueur ℓ, de section S et de conductivité électrique γ possédant une tension U à ses bornes. Selon la **loi d'Ohm intégrale**, l'intensité i du courant électrique s'écoulant entre ces deux bornes est proportionnelle à U :

$$\boxed{U = R \times i}$$

où $\boxed{R \triangleq \frac{\ell}{\gamma S}}$ est la **résistance électrique** du conducteur.

Effet Joule

Des porteurs de charge en mouvement dans un champ électrique cèdent une puissance volumique p_J (en $\mathrm{W/m^3}$) proportionnelle au vecteur densité de courant et au champ électrique :

$$\boxed{p_J = -\vec{j} \cdot \vec{E}}$$

Cette puissance se transfère à la matière environnante, généralement sous forme de chaleur : c'est ce que l'on appelle **l'effet Joule**.

Le fait que p_J soit négatif reflète justement le fait que la puissance est cédée des porteurs de charge (le système étudié) vers la matière (le milieu extérieur).

D'un point de vue intégral, on a $\boxed{\mathcal{P}_J = -Ri^2 = -\dfrac{U^2}{R}}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Établissement de l'équation locale unidimensionnelle de la conservation de la charge

Énoncé

Soit un barreau cylindrique de section S. On étudie une tranche dx de ce barreau.
On note $\rho(x,t)$ la densité volumique de charge en x et à l'instant t ; $\vec{j}(x,t) = j(x,t).\vec{u_x}$ la densité volumique de courant en x et à l'instant t.

En effectuant un bilan de charge sur la tranche entre t et $t+dt$, établir l'équation locale de conservation de la charge : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$.

Résolution

Notons $\delta Q(t)$ la charge totale de la tranche dx à l'instant t.
Puisque la charge ne peut pas se créer et/ou disparaître, on a $\delta Q(t+\mathrm{d}t) - \delta Q(t) = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}}$.

- Le volume de la tranche étant $\delta V = S\mathrm{d}x$, on en déduit que $\delta Q(t) = \rho(x,t) \times \delta V = \rho(x,t) \times S\mathrm{d}x$.
  Nécessairement,
  $$\begin{aligned}\delta Q(t+\mathrm{d}t) - \delta Q(t) &= \rho(x,t+\mathrm{d}t) \times S\mathrm{d}x - \rho(x,t) \times S\mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}t \times S\mathrm{d}x\end{aligned}$$
- On a $\delta Q_{\text{entrant}} = I_{\text{entrant}} \times \mathrm{d}t = j(x,t)S \times \mathrm{d}t$ et $\delta Q_{\text{sortant}} = I_{\text{sortant}} \times \mathrm{d}t = j(x+\mathrm{d}x,t)S \times \mathrm{d}t$.
  Nécessairement,
  $$\begin{aligned}\delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} &= (j(x,t) - j(x+\mathrm{d}x,t))\, S\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\partial j}{\partial x}\mathrm{d}x \times S\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En égalisant les deux expressions, on en déduit que :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\cancel{\mathrm{d}t \times S\mathrm{d}x} = -\frac{\partial j}{\partial x}\cancel{\mathrm{d}x \times S\mathrm{d}t}$$

D'où la relation demandée :

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0}$$