Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 5 : Phénomènes électriques

Cours

Figure 1 – Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), mathématicien, astronome est un physicien allemand. Ses travaux, datant essentiellement du début du dix-neuvième siècle, ont permis de comprendre et quantifier le fonctionnement du champ électrostatique.

Table des matières

1 Aspect macroscopique du champ électrostatique **1**
1.1 Définition du champ électrostatique 1
1.1.1 Charges 1
1.1.2 Champ et force électrostatiques 3
1.2 Topographie du champ électrostatique 4
1.2.1 Lignes de champ 4
1.2.2 Symétries et antisymétries 6

2 Théorème de Gauss **9**
2.1 Invariances 9
2.1.1 Invariances en symétrie centrale 9
2.1.2 Invariances en symétrie axiale 10
2.1.3 Invariances en symétrie plane 11
2.2 Théorème de Gauss 12
2.2.1 Flux d'un champ 12
2.2.2 Énoncé et interprétation 14
2.2.3 Utilité et étapes 14
2.3 Applications du théorème de Gauss 15
2.3.1 Champ créé par une boule chargée uniformément en volume 15
2.3.2 Champ créé par un cylindre infini chargé uniformément en surface 17
2.3.3 Champ créé par une plaque infinie chargée uniformément en volume 19

3 Tension et potentiel **21**
3.1 Circulation du champ électrostatique 21
3.2 Potentiel électrique 23
3.3 Lignes de champ électrostatique et équipotentielles 27

4 Aspect local du champ électrostatique **28**
4.1 Écriture locale du théorème de Gauss 28
4.1.1 Motivation 28
4.1.2 Divergence d'un champ vectoriel 28
4.1.3 Du théorème de Gauss à l'équation de Maxwell-Gauss 30
4.1.4 De l'équation de Maxwell-Gauss au théorème de Gauss 30
4.2 Écriture locale de la conservation de la circulation électrostatique 31
4.2.1 Rotationnel d'un champ vectoriel 31
4.2.2 Équation de Maxwell-Faraday statique 32
4.3 Propriétés d'un conducteur à équilibre électrostatique 33
4.3.1 Définitions et conséquences immédiates 33
4.3.2 Relations de passage 34

5 Condensateurs et capacité électrique **36**
5.1 Étude d'un condensateur plan 36
5.1.1 Définition et premiers résultats 36
5.1.2 Capacité d'un condensateur 37
5.2 Étude d'un condensateur cylindrique 39
5.3 Bilan énergétique d'un condensateur 41
5.3.1 Modélisation 41
5.3.2 Densité volumique d'énergie électrique 43

6 Conduction électrique **44**
6.1 Densités de courant 44
6.2 Conservation de la charge 46
6.2.1 Résultat préliminaire sur le vecteur densité de courant 46
6.2.2 Aspect local 47
6.2.3 Conséquences à l'échelle macroscopique 49
6.3 Loi d'Ohm 50
6.3.1 Modèle de Drude 50
6.3.2 De l'aspect local à l'aspect global 51
6.3.3 Effet Joule 52

Chapitre 1 : Aspect macroscopique du champ électrostatique

Objectifs :

— Définir et utiliser une fonction densité volumique, surfacique ou linéique de charges.

— Définir le champ électrostatique de la force électrostatique ressentie par une charge ponctuelle d'essai placée dans le champ électrostatique d'une autre distribution.

— Énoncer l'expression du champ créé par une charge ponctuelle.

— Définir la notion de ligne de champ électrostatique et prévoir la topographie des lignes de champ associées à une charge ponctuelle, un cylindre infini, un plan infini uniformément chargés et une sphère chargée uniformément.

— Repérer les symétries d'une distribution.

— Énoncer le principe de Curie.

Au concours ATS : N'apparaît pas en tant que tel au concours, mais est utile pour les chapitres suivants.

1.1 Définition du champ électrostatique

1.1.1 Charges

Charge électrique

La **charge électrique** est une grandeur physique portée par certains corps qui caractérise leur capacité à créer ou à être influencées par un champ électromagnétique. L'unité de la charge électrique est, dans le Système International, le coulomb C.
Les charges électriques proviennent de la présence d'électrons, de charge électrique négative $q_e = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, et/ou de protons, de charge électrique positive $q_p = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$. On remarque que $q_p = -q_e$: on note alors $e = |q_p| = |q_e|$ la *charge élémentaire* : la charge électrique d'un corps est nécessairement un multiple entier de e. On dit que la charge électrique est *quantifiée*.

Remarque : La charge électrique Q vis-à-vis d'un champ électromagnétique est analogue à la masse M vis-à-vis d'un champ gravitationnel.

D'un point de vue macroscopique, les répartitions de charges ne sont pas forcément ponctuelles. Elles peuvent être linéaires (fil chargé), surfaciques (plan chargé) ou volumiques (espace chargé) (voir figure 1.1). On définit alors :

- La charge **linéique** λ, telle que la charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$ d'un fil de longueur infinitésimale $\mathrm{d}\ell$ vaille : $\mathrm{d}Q = \lambda\,\mathrm{d}\ell$;
- La charge **surfacique** σ, telle que la charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$ d'un plan de surface infinitésimale $\mathrm{d}S$ vaille : $\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}S$;
- La charge **volumique** ρ, telle que la charge infinitésimale $\mathrm{d}Q$ d'un espace de volume infinitésimal $\mathrm{d}V$ vaille : $\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}V$.

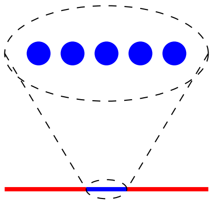


FIGURE 1.1 – De l'aspect microscopique et quantifié à l'aspect mésoscopique et continu pour une densité linéique de charges.

Question 1 : Quelles sont les unités de λ, σ et ρ ?

Question 2 : Calculer la charge totale Q d'un fil de longueur L et de densité linéique de charge λ_0 uniforme.

Question 3 : Calculer la charge totale Q d'une sphère de rayon R et de densité volumique de charge $\rho(r) = \dfrac{A}{r^2}e^{-r/R}$.

1.1.2 Champ et force électrostatiques

Loi de Coulomb

Soit deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées d'une distance d. Les deux charges exercent l'une sur l'autre une force électrostatique attractive ou répulsive telle que :

$$\overrightarrow{F^e_{1\to 2}} = \frac{q_1\ q_2}{4\pi\varepsilon_0\ d^2}.\overrightarrow{e_{1\to 2}}$$

où $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ est la **permittivité diélectrique du vide** et $\overrightarrow{e_{1\to 2}}$ est le vecteur unitaire allant de q_1 vers q_2. C'est la **loi de Coulomb**.

☛ *Remarque :* Cette force a une expression très similaire à celle établie par la loi de gravitation universelle $\overrightarrow{F^g_{1\to 2}} = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{d^2}.\overrightarrow{e_{1\to 2}}$.

Question 4 : Faire un schéma de la situation. Dans quels cas la force électrostatique est-elle attractive ? répulsive ?

Force électrostatique, champ électrostatique

On définit le **champ électrostatique** $\vec{E}$ d'une distribution de charges à partir de la force $\overrightarrow{F_e}$ ressentie par une charge ponctuelle d'essai q dans ce champ :

$$\overrightarrow{F_e} = q.\vec{E}$$

Le champ électrostatique s'exprimer en volt par mètre $\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

☛ *Remarque :* On aperçoit à nouveau une analogie avec le champ de pesanteur, où $\vec{P} = m.\vec{g}$.

Question 5 : Une charge ponctuelle positive ira-t-elle dans le même sens ou dans le sens opposé du champ $\vec{E}$? Et pour une charge négative ?

Question 6 : Exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{E_0}$ d'une charge ponctuelle q_0.

Théorème de superposition

Si deux champs électrostatiques $\overrightarrow{E_1}$ et $\overrightarrow{E_2}$ coexistent en un point M, alors le champ électrostatique total en ce même point M vaut $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$. C'est le **théorème de superposition**.

1.2 Topographie du champ électrostatique

1.2.1 Lignes de champ

On appelle ligne de champ électrostatique le chemin orienté que suivrait une charge électrique ponctuelle et positive sans vitesse initiale dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}$.

Question 7 : Quelle est la trajectoire d'une masse ponctuelle sans vitesse initiale dans un champ de pesanteur extérieur uniforme $\vec{g}$?

Pour une sphère et une charge ponctuelle

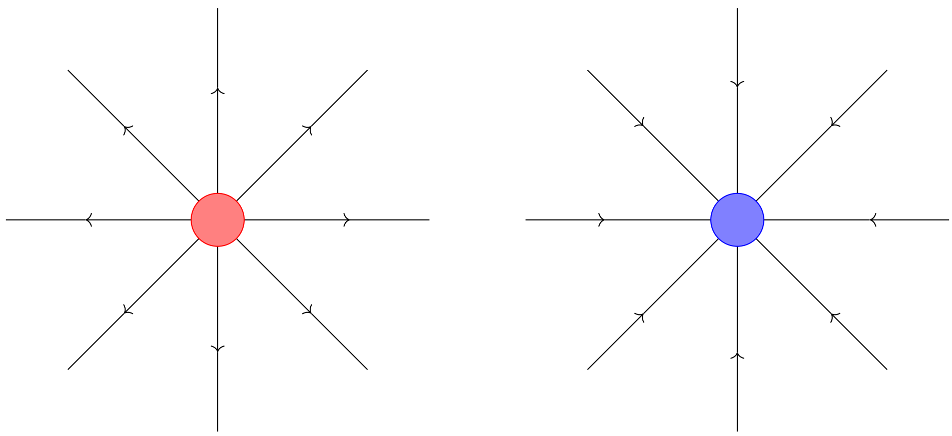


FIGURE 1.2 – Lignes de champ électrostatique pour une sphère de charge Q. Gauche : $Q > 0$; droite : $Q < 0$.

☛ *Remarque :* Les lignes de champ d'une charge ponctuelle sont similaires à celle d'une sphère chargée. Effectivement, une sphère « vue de loin » n'est rien d'autre qu'une charge ponctuelle.

Pour un cylindre infini et un fil infini

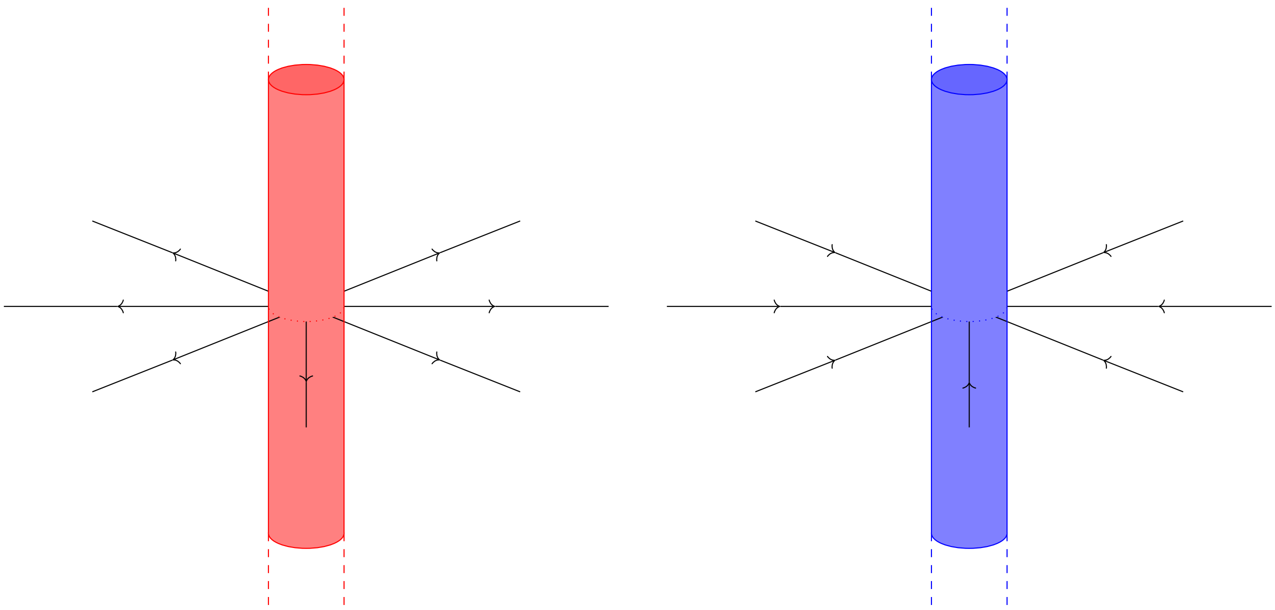


FIGURE 1.3 – Lignes de champ électrostatique pour un cylindre infini de charge Q. Gauche : $Q > 0$; droite : $Q < 0$.

Remarque : Les lignes de champ d'un fil chargé infini sont similaires à celle d'un cylindre chargé infini. Effectivement, un cylindre infini « vu de loin » n'est rien d'autre qu'un fil infini...

Pour un plan infini uniformément chargé

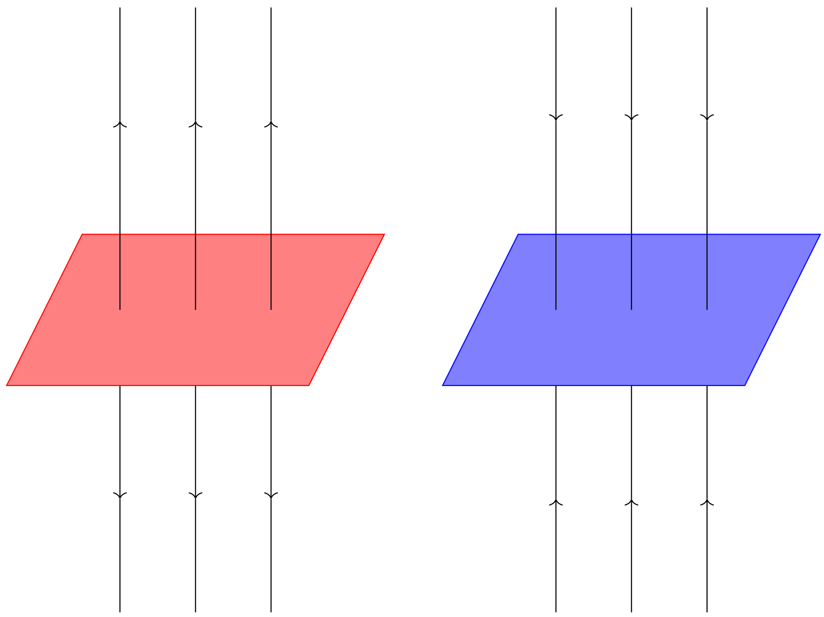


FIGURE 1.4 – Lignes de champ électrostatique pour un plan infini de charge Q. Gauche : $Q > 0$; droite : $Q < 0$.

1.2.2 Symétries et antisymétries

Plans de symétrie et d'antisymétrie des charges

On dit qu'un plan Π est un plan de **symétrie** des charges si, lorsqu'une charge existe d'un côté de ce plan, alors une charge **de même signe et de même valeur** existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement à la première charge.
On dit qu'un plan Π est un plan d'**antisymétrie** des charges si, lorsqu'une charge existe d'un côté de ce plan, alors une charge **de signe opposé et de même valeur absolue** existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement à la première charge.

Question 8 : Lister les plans de symétrie pour une sphère uniformément chargée en volume.

Question 9 : Lister les plans de symétrie pour un cylindre infini uniformément chargé en volume.

Question 10 : Lister les plans de symétrie pour un plan infini uniformément chargé en surface.

Question 11 : Peut-il exister un plan d'antisymétrie pour une unique charge ?

On représente en figure 1.5 les lignes de champ électrostatique lorsque deux charges ponctuelles sont à proximité.

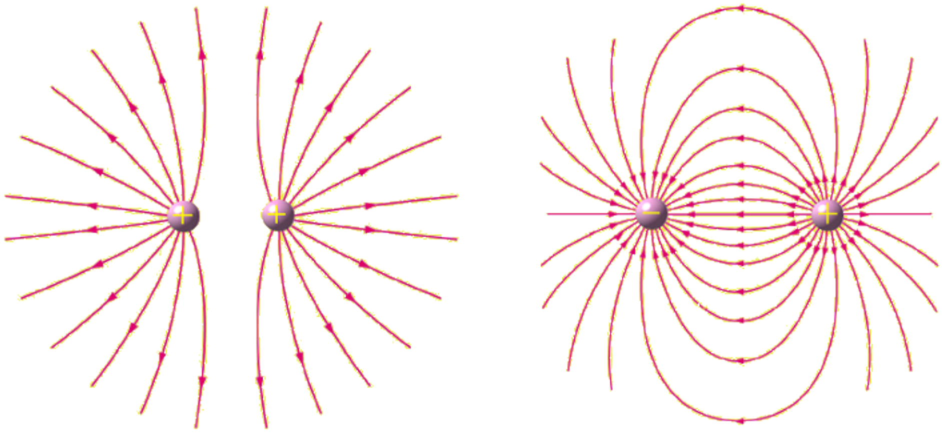


Figure 1.5 – Lignes de champ électrostatique pour un système à deux charges. Gauche : les deux charges sont de même signe et de même valeur ; droite : les deux charges sont de signes opposés et de même valeur absolue. Par http ://commons.wikimedia.org/wiki/User :Chanchocan — Travail personnel, CC BY-SA 3.0, https ://commons.wikimedia.org/w/index.php ?curid=951213

Question 12 : Que peut-on dire du champ électrostatique pour les plans de symétrie ?

Question 13 : Que peut-on dire du champ électrostatique pour les plans d'antisymétrie ?

Principe de Curie

« *Les conséquences sont au moins aussi symétriques que les causes.* »

Ce principe signifie que, si l'on retrouve des (anti-)symétries dans les causes (ici, la répartition des charges électriques), alors on retrouvera des conséquences (ici, la direction du champ électrostatique) qui respectent ces (anti-)symétries.

Direction du champ électrostatique selon la symétrie des charges

Soit un point M appartenant à un plan de symétrie Π_+ des charges. Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ est alors **contenu dans ce plan** : $\overrightarrow{E}(M) \in \Pi_+$.
Soit un point M appartenant à un plan d'antisymétrie Π_- des charges. Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ est alors **orthogonal à ce plan** : $\overrightarrow{E}(M) \perp \Pi_-$.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner les définitions et unités de la densité linéique de charge λ, de la densité surfacique de charge σ et de la densité volumique de charge ρ.
- ☐ Calculer la charge totale d'une boule de rayon a dont la densité volumique de charge est $\rho(r) = \rho_0 \times \left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)$.
- ☐ Rappeler la loi de Coulomb. Dans quel(s) cas la force électrique entre deux corps est-elle attractive ? répulsive ?
- ☐ Tracer les lignes de champ électrique pour une sphère chargée positivement et pour une sphère chargée négativement.
- ☐ Tracer les lignes de champ électrique pour un cylindre infini chargé positivement et pour un cylindre infini chargé négativement.
- ☐ Tracer les lignes de champ électrique pour un plan infini chargé positivement et pour un plan infini chargé négativement.
- ☐ Définir ce qu'est un plan de symétrie des charges. Que peut-on dire du champ électrique en un point de ce plan ?
- ☐ Définir ce qu'est un plan d'antisymétrie des charges. Que peut-on dire du champ électrique en un point de ce plan ?
- ☐ Rappeler l'expression du principe de Curie et expliquer en quoi il s'applique à l'étude du champ électrique.

Chapitre 2 : Théorème de Gauss

Objectifs :

— Repérer les invariances d'une distribution.

— Énoncer le théorème de Gauss.

— Utiliser le théorème de Gauss pour calculer un champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (plan, cylindre, sphère).

Au concours ATS : Aux écrits en 2022, 2021, 2017, 2016. Tombe régulièrement aux oraux.

2.1 Invariances

Soit une répartition de charges continue ou discrète dans l'espace repéré par trois coordonnées. Selon le degré de symétries du problème, on va préférer différents types de coordonnées. Dans l'ordre :

1. Si la répartition présente un centre de symétrie, on utilisera les coordonnées sphériques ;
2. Si la répartition présente un axe de symétrie, on utilisera les coordonnées cylindriques ;
3. Si la répartition présente un plan de symétrie, on utilisera les coordonnées cartésiennes.

2.1.1 Invariances en symétrie centrale

Prenons l'exemple d'une sphère chargée en volume, pas forcément de manière uniforme mais telle que le centre O de la sphère soit un centre de symétrie des répartitions de charges (voir figure 2.1).

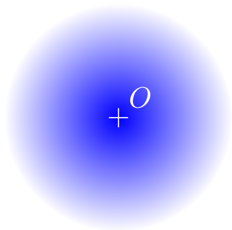


FIGURE 2.1 – Répartition de charges à symétrie centrale.

En coordonnées sphériques, on peut repérer un point M par :

— La distance r entre le point M et le centre O ;

— La colatitude θ du point M ;

— La longitude φ du point M.

La densité volumique de charges s'écrit donc $\rho(r, \theta, \varphi)$; a priori, la norme du champ électrostatique créé s'écrit donc également $E(r, \theta, \varphi)$.

Question 1 : Pour un problème à symétrie centrale, de quelles variables dépend réellement ρ ? Par application du principe de Curie, expliquer alors de quelles variables dépend la norme du champ électrostatique E.

Invariances en symétrie centrale

Si la répartition de charges présente une symétrie centrale $\rho(r)$ (on dit qu'il y a **invariance** selon les coordonnées θ et φ), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de r : $E = E(r)$.

☛ *Remarque :* Le raisonnement est similaire pour une répartition surfacique de charges σ.

2.1.2 Invariances en symétrie axiale

Prenons l'exemple d'un cylindre chargé en volume, pas forcément de manière uniforme mais telle que l'axe de révolution (O, z) du cylindre soit un axe de symétrie des répartitions de charges (voir figure 2.2).

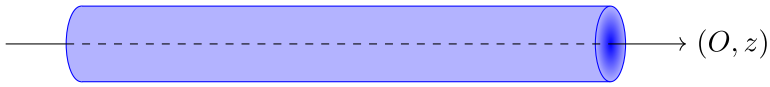


Figure 2.2 – Répartition de charges à symétrie axiale.

En coordonnées cylindriques, on peut repérer un point M par :

— La distance r entre le point M et l'axe (O, z) ;

— L'angle polaire θ du point M ;

— La cote z du point M.

La densité volumique de charges s'écrit donc $\rho(r, \theta, z)$; a priori, la norme du champ électrostatique créé s'écrit donc également $E(r, \theta, z)$.

Question 2 : Pour un problème à symétrie axiale, de quelles variables dépend réellement ρ ? Par application du principe de Curie, expliquer alors de quelles variables dépend la norme du champ électrostatique E.

Question 3 : Si le fil est infini et uniformément chargé selon la direction z, que peut-on alors dire de ρ ? de E ?

Invariances en symétrie axiale

Si la répartition de charges présente une symétrie axiale $\rho(r,z)$ (on dit qu'il y a **invariance** selon θ), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de r et z : $E = E(r,z)$.
Si la répartition de charges présente en plus une uniformité $\rho(r)$ selon l'axe de révolution (invariance selon z), alors le champ électrostatique ne peut dépendre que de r : $E = E(r)$.

☛ *Remarque :* Le raisonnement est similaire pour une répartition surfacique de charges σ ou une répartition linéique de charges λ.

2.1.3 Invariances en symétrie plane

Prenons l'exemple d'un plan infini chargé en volume, pas forcément de manière uniforme mais telle que tout plan orthogonal au plan infini soit un plan de symétrie des répartitions de charges (voir figure 2.3).

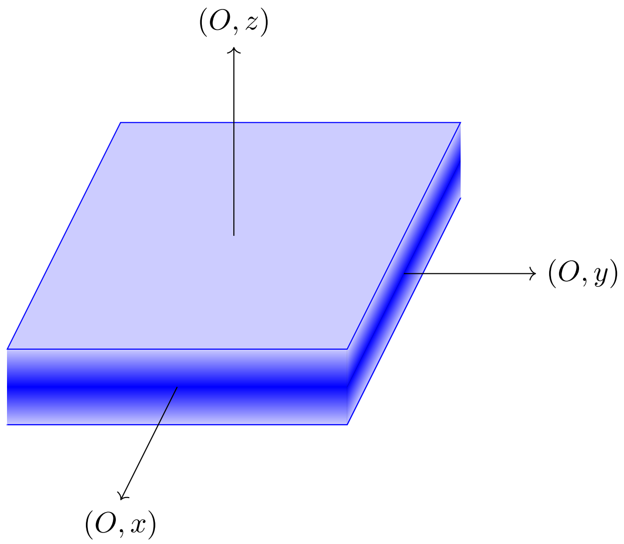


Figure 2.3 – Répartition de charges à symétrie plane.

En coordonnées cartésiennes, on peut repérer un point M par :

— L'abscisse x ;

— L'ordonnée y ;

— La cote z.

La densité surfacique de charges s'écrit donc $\rho(x,y,z)$; a priori, la norme du champ électrostatique créé s'écrit donc également $E(x,y,z)$.

Question 4 : Pour un problème à symétrie plane, de quelle variable dépend réellement ρ ? Par application du principe de Curie, expliquer alors de quelles variables dépend la norme du champ électrostatique E.

Invariances en symétrie plane

Si la répartition de charges est plane et uniforme (**invariances** selon x et y), alors la norme du champ électrostatique ne peut dépendre que de z : $E = E(z)$.

☛ *Remarque :* Le raisonnement est similaire pour une répartition surfacique de charges σ...

2.2 Théorème de Gauss

2.2.1 Flux d'un champ

Considérons un champ électrostatique et uniforme orienté selon un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$: $\overrightarrow{E} = E_0.\overrightarrow{u}$. Supposons que l'on ait à disposition un capteur plan sensible à ce champ électrostatique [1] ; on note S la surface du capteur et $\overrightarrow{n}$ le vecteur orthogonal à celui-ci.

Plusieurs situations sont alors possibles :

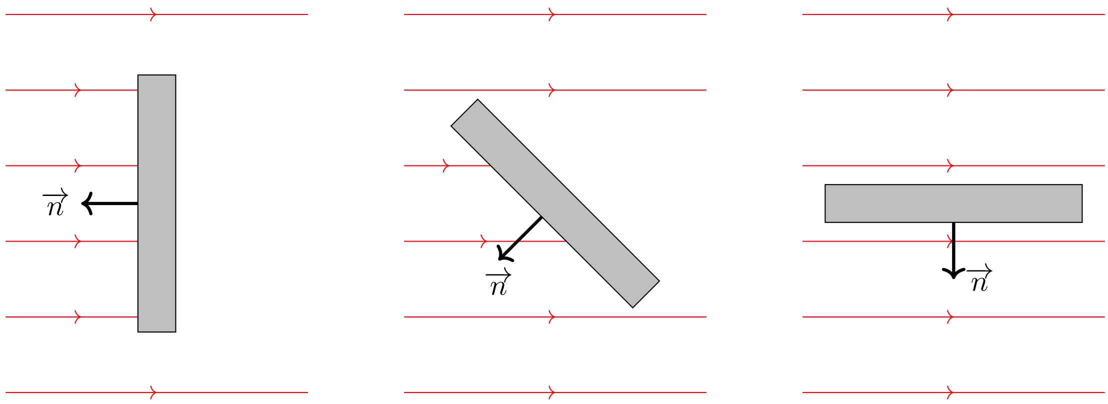


FIGURE 2.4 – Positions possibles du capteur (gris, rectangulaire) vis-à-vis du champ électrostatique lignes de champ en rouge).

Question 5 : Comment orienter le capteur $\overrightarrow{n}$ par rapport au champ de direction $\overrightarrow{u}$ pour capter un maximum de ce champ ? Un minimum de ce champ ?

Flux d'un champ uniforme à travers une surface plane

Le **flux** Φ_E **d'un champ** $\overrightarrow{E}$ <u>uniforme</u> à travers une surface plane S orientée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ vaut :

$$\Phi_E = \overrightarrow{E} \cdot S.\overrightarrow{n}$$

En notant $\overrightarrow{S} \triangleq S.\overrightarrow{n}$ la surface orientée, on peut réécrire cette équation :

$$\Phi_E = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{S}$$

1. C'est ce que l'on appelle un gaussmètre.

☛ *Remarque :* Le signe du flux dépend donc de la façon dont on oriente la surface S *via* le vecteur $\vec{n}$. Il faudra donc retenir, selon les théorèmes, comment ce vecteur normal est défini !

On peut également calculer le flux d'un champ à travers une surface non plane. Effectivement, sous certaines hypothèses mathématiques très raisonnables en physique, on peut considérer qu'une surface macroscopiquement courbe « suffisamment régulière » est mésoscopiquement plane (voir figure 2.5).

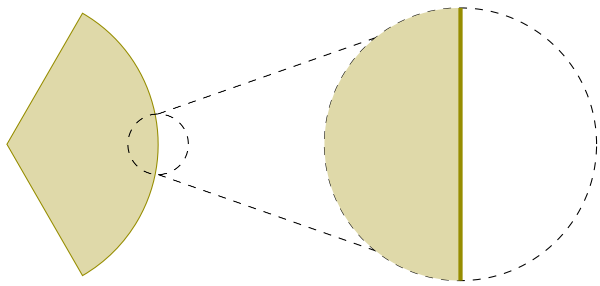


FIGURE 2.5 – Planéité locale de la matière.

Ainsi, on peut découper la surface $\mathcal{S}$ macroscopique totale en surfaces mésoscopiques dS_M plans centrés autour d'un point M parcourant la surface : $S = \iint\limits_{M \in S} \mathrm{d}S(M)$. On associe également à chaque surface infinitésimale un vecteur $\overrightarrow{n(M)}$ localement normal.

Finalement, le flux total du champ électrostatique est la somme (continue, donc avec une intégrale) de chacune des contributions mésoscopiques $\mathrm{d}\Phi_E(M) = \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}S(M).\overrightarrow{n(M)} = \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S(M)}$.

Flux d'un champ à travers une surface quelconque

Le flux Φ_E d'un champ $\vec{E}$ à travers une surface $\mathcal{S}$ quelconque vaut :

$$\Phi_E = \iint\limits_{M \in \mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S(M)}$$

Question 6 : Si $\vec{E}(M)$ est uniforme sur la surface d'intégration et orthogonale à celle-ci en tout point, comment se simplifie l'équation du flux ?

Il peut arriver que la surface d'intégration soit fermée, c'est-à-dire qu'elle ne soit « percée » d'aucun trou. Pour signifier que l'on « retombe sur nos pattes », on note alors l'intégrale avec un cercle :

$$\Phi_E = \oiint\limits_{M \in \mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S(M)}$$

2.2.2 Énoncé et interprétation

Théorème de Gauss

Le **théorème de Gauss** dit que le flux du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ à travers une surface fermée $\mathcal{S}$ orientée vers l'extérieur est proportionnelle à la charge électrique contenue dans cette surface :

$$\oiint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S(M)}^{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

L'interprétation du théorème de Gauss est simple :

- Toute charge Q positive crée un champ électrique fuyant en ligne droite ladite charge. Ainsi, si l'on prend une surface $\mathcal{S}$ fermée englobant cette charge, on pourra compter toutes les lignes de champ électrostatique fuyant Q en calculant son flux à travers la surface $\mathcal{S}$;
- Par ailleurs, la norme du champ électrostatique est d'autant plus importante que la charge Q est grande ;
- Ainsi, le flux du champ électrostatique est proportionnel à la charge électrique intérieure : c'est le théorème de Gauss.

Pour une charge négative, on a $\vec{E}$ qui est orienté vers l'intérieur, donc $\overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S(M)}^{\text{ext}} < 0$, ce qui est cohérent avec le théorème de Gauss.

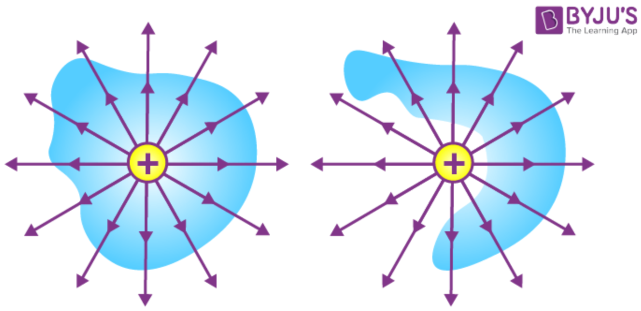


FIGURE 2.6 – Illustration du théorème de Gauss. À gauche, la charge intérieure à la surface de Gauss est positive, tout comme le flux (comptabilisé positivement vers l'extérieur) du champ électrostatique. À droite, la charge intérieure est nulle, tout comme le flux du champ électrostatique (les entrées compensent les sorties). Image extraite de `https://byjus.com/jee/gauss-law/`.

2.2.3 Utilité et étapes

L'utilité principale du théorème de Gauss est de pouvoir exprimer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point M, si suffisamment de symétries permettent de simplifier le problème. Pour cela :

1. On choisit un point M dans l'espace, et on identifie les plans de symétrie et/ou d'antisymétrie passant par ce point : on en déduit **la direction** du champ $\overrightarrow{E}(M)$, ce qui permet d'écrire $\overrightarrow{E}(M) = E(M).\vec{u}$ avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire ;
2. On recense les invariances dues aux répartitions des charges : on en déduit **les variables** effectives de $E(M)$;
3. On choisit une **surface de Gauss** passant par le point M sur laquelle le champ $\overrightarrow{E}$ est uniforme : l'expression du flux du champ électrostatique se simplifie ;
4. On calcule la charge intérieure à la surface de Gauss, généralement via une intégration : $Q_{\text{int}} = \int \lambda\ \mathrm{d}\ell$ ou $Q_{\text{int}} = \iint \sigma\ \mathrm{d}S$ ou $Q_{\text{int}} = \iiint \rho\ \mathrm{d}V$;
5. On applique le théorème de Gauss pour déterminer $E(M)$, puis $\overrightarrow{E}(M)$.

2.3 Applications du théorème de Gauss

2.3.1 Champ créé par une boule chargée uniformément en volume

Soit une boule de rayon R, de densité volumique de charge uniforme ρ_0. On note $Q_0 = \iiint_{\text{boule}} \rho_0 \, \mathrm{d}V$ la charge totale de la sphère.

On fixe un point M quelconque dans l'espace à l'extérieur de la sphère.

Question 7 : Faire un schéma du problème. Quels plans passant par M sont de symétrie par rapport aux charges ? En déduire la direction du champ électrostatique en M.

Question 8 : Quelles invariances observe-t-on ? En déduire les variables de la norme du champ électrostatique E.

☛ *Remarque :* Ici, $\overrightarrow{E} = E(r).\overrightarrow{u_r}$. À l'oral, on dira que $\overrightarrow{E}$ **dépend de** r, et que $\overrightarrow{E}$ **est dirigé selon** $\overrightarrow{u_r}$.

Question 9 : Quelle surface de Gauss va-t-on choisir ici ? Justifier.

Question 10 : Exprimer l'aire de la surface de Gauss et simplifier l'expression du flux électrostatique.

Question 11 : Que vaut Q_{int} ? En déduire l'expression de E puis de $\overrightarrow{E}$.

On prend à présent un point M dans la boule : $0 \leq r \leq R$.

Question 12 : Faire un nouveau schéma.

Question 13 : L'expression du flux électrostatique est-elle modifiée ? Quelle est la différence avec le problème précédent ?

Question 14 : Calculer la charge intérieure à la surface de Gauss. On indiquera clairement l'objet sur lequel on intègre. En déduire, par application du théorème de Gauss, l'expression du champ électrostatique.

2.3.2 Champ créé par un cylindre infini chargé uniformément en surface

Soit un cylindre infini de rayon R et de densité surfacique de charge uniforme $\sigma(r = R) = \sigma_0$.
On fixe un point M quelconque dans l'espace, à l'intérieur ou à l'extérieur du fil.

Question 15 : Faire un schéma du problème. Quels plans passant par M sont de symétrie par rapport aux charges ? En déduire la direction du champ électrostatique en M.

Question 16 : Quelles invariances observe-t-on ? En déduire les variables de la norme du champ électrostatique E.

Question 17 : Quelle surface de Gauss va-t-on choisir ici ? Simplifier l'expression du flux électrostatique en divisant la surface en trois secteurs.

Question 18 : Si $r > R$, que vaut Q_{int} ? En déduire l'expression de E puis de $\overrightarrow{E}$.

Question 19 : Même question si $r < R$.

2.3.3 Champ créé par une plaque infinie chargée uniformément en volume

Soit une plaque d'épaisseur e selon la direction (O, z), et de surface infinie dans les deux autres directions. La plaque est centrée sur l'axe (O, z) : on a donc $\rho(-e/2 \leq z \leq e/2) = \rho_0$ et $\rho = 0$ sinon.

On fixe un point M quelconque dans l'espace à l'extérieur de la plaque.

Question 20 : Faire un schéma du problème. Quels plans passant par M sont de symétrie par rapport aux charges ? En déduire la direction du champ électrostatique en M.

Question 21 : Quelles invariances observe-t-on ? En déduire les variables de la norme du champ électrostatique E.

Question 22 : Que peut-on dire de $\overrightarrow{E}(z)$ et $\overrightarrow{E}(-z)$? En déduire un lien entre $E(z)$ et $E(-z)$, où $E(z) = \overrightarrow{E}(z) \cdot \overrightarrow{e_z}$.

Question 23 : Montrer qu'un cylindre de hauteur $2z$ est une surface de Gauss convenable. Simplifier l'expression du flux électrostatique en divisant la surface en trois secteurs.

Question 24 : Que vaut Q_{int} ? En déduire l'expression de E puis de $\overrightarrow{E}$.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner l'expression du théorème de Gauss en explicitant chacune des grandeurs ainsi que leurs unités respectives.
- ☐ Déterminer en tout point de l'espace l'expression du champ électrostatique créé par une boule de rayon a et de densité volumique de charge ρ_0 uniforme.
- ☐ Déterminer en tout point de l'espace l'expression du champ électrostatique créé par un cylindre infini de rayon a et de densité surfacique de charge σ_0 uniforme.
- ☐ Déterminer en tout point de l'espace l'expression du champ électrostatique créé par un plan infini de densité surfacique de charge σ_0 uniforme.

Chapitre 3 : Tension et potentiel

Objectifs :

- Justifier les propriétés des lignes de champ électrostatique.
- Calculer le potentiel associé à un champ électrique.
- Définir et exprimer la tension électrique entre deux points.
- Énoncer et justifier la loi des mailles ainsi que la loi d'additivité des tensions.

Au concours ATS : Aux écrits en 2022, 2016. Tombe régulièrement aux oraux.

3.1 Circulation du champ électrostatique

Circulation d'un champ vectoriel

Soit $\mathcal{C}_{X \to Y}$ un contour quelconque (c'est-à-dire un chemin d'un point X à un point Y). On appelle **circulation d'un champ vectoriel** $\overrightarrow{A}$ la grandeur :

$$C_{XY}\left(\overrightarrow{A}\right) = \int_{\mathcal{C}_{X \to Y}} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$$

où $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ représente le vecteur déplacement élémentaire entre deux points infiniment proches du contour $\mathcal{C}_{X \to Y}$ (donc toujours tangent à ce contour).
Dans le cas où $\mathcal{C}_{X \to Y}$ est un contour fermé (on reboucle sur le point de départ, donc $Y = X$) et orienté [a], on note alors :

$$C = \oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$$

a. Il faut décider en amont si l'on parcourt le contour dans le sens horaire ou anti-horaire, puisque rien d'autre ne peut l'indiquer !

Exemple : Le travail $W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ d'une force $\vec{F}$ correspond à la circulation de cette force le long du chemin allant de A à B.

Tension électrique

On appelle **tension électrique** U_{AB} entre deux points A et B la circulation du champ électrostatique entre ces deux points :

$$U_{AB} = \int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$$

La tension s'exprime en volt V.

Question 1 : Soient trois points de l'espace A, B et C. Montrer que $U_{AB} + U_{BC} = U_{AC}$.

Prenons l'exemple d'une charge ponctuelle. On représente dans la figure 3.1 deux contours fermés $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et on rappelle que $\overrightarrow{E} = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$ avec Q_0 la charge totale de la sphère. On note R_1 le rayon du chemin $\alpha \rightarrow \beta$ et R_2 celui du chemin $\gamma \rightarrow \delta$.

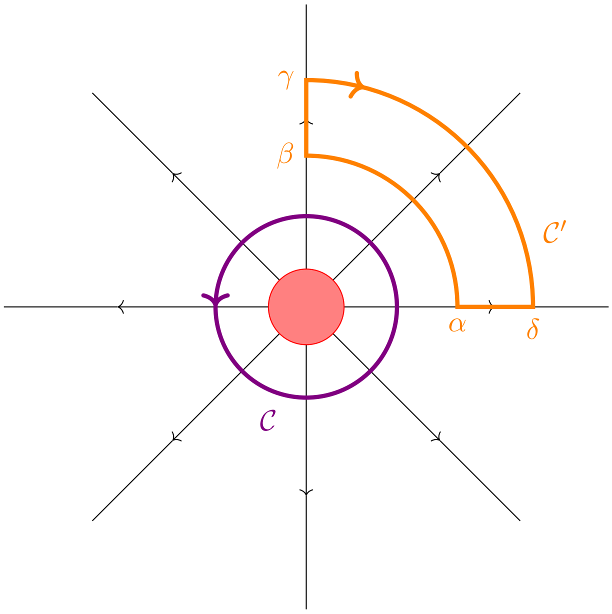


FIGURE 3.1 – Lignes de champ électrostatique pour une sphère de charge $Q_0 > 0$, et deux contours fermés $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Question 2 : Que vaut $\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ pour le contour $\mathcal{C}$? En déduire la valeur de la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long de ce contour.

Question 3 : Décomposer le contour fermé $\mathcal{C}'$ en quatre contours ouverts. En déduire la valeur de la circulation de $\overrightarrow{E}$ le long de ce contour.

Conservation de la circulation du champ électrostatique

Le long d'un contour <u>fermé</u> $\mathcal{C}$, la circulation du champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ est conservée :

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = 0$$

☛ *Remarque :* Cette propriété est loin d'être triviale : par exemple, le travail des frottements sur un contour fermé n'est jamais nul, car boucler sur soi-même ne « compense » pas la perte énergétique.

Question 4 : Soit un circuit fermé $ABCDA$. Montrer que $U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0$.

Additivité des tensions et loi des mailles

Pour trois points quelconques A, B et C d'un circuit électrique, la **loi d'additivité des tensions** donne que $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$.
On peut alors en déduire que, dans une maille quelconque $(ABC...YZA)$, la somme des tensions est nulle :

$$U_{AB} + U_{BC} + ... + U_{YZ} + U_{ZA} = 0$$

C'est la **loi des mailles**.

☛ *Remarque :* Nous verrons plus tard que la loi des mailles n'est pas valable en régime non-stationnaire (ou en tous cas, qu'elle doit être modifiée pour prendre en compte des phénomènes d'induction).

3.2 Potentiel électrique

Les calculs précédents ont montré que l'on peut écrire, de manière générale, la circulation du champ électrostatique sur un contour ouvert par une différence : $\displaystyle\int_A^B \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = F(B) - F(A)$ avec F une fonction *a priori* inconnue mais dépendant de la répartition de charges [1].

Prenons deux points A et B très proches l'un de l'autre : A a pour coordonnées (x, y, z) et B a pour coordonnées $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$. On a donc $\overrightarrow{AB} = \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$.

Le but de cette partie est notamment de voir si l'on peut exprimer le champ électrostatique $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ (et non pas sa circulation) en fonction de cette fonction F. On notera que les composantes E_x, E_y et E_z du champ électrostatique dépendent toutes *a priori* de x, y et z.

1. En particulier, si l'on appelle A le point de départ et d'arrivée d'un contour fermé $\mathcal{C}$, on a : $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = F(A) - F(A) = 0$.

Question 5 : Exprimer le vecteur $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. En déduire que $\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z$.

On rappelle par ailleurs que la dérivée d'une fonction $f(u)$ est approchable par le taux d'accroissement $f'(u) \approx \dfrac{f(u+\mathrm{d}u) - f(u)}{\mathrm{d}u}$ lorsque $\mathrm{d}u$ est infinitésimal. Nécessairement, on a $f(u+\mathrm{d}u) - f(u) \approx \mathrm{d}u \times f'(u)$.

Question 6 : Montrer, indépendamment de l'expression précédente de $\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$, que $F(B) - F(A) = \dfrac{\partial F}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial F}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \dfrac{\partial F}{\partial z}\,\mathrm{d}z$.

Question 7 : Déduire des réponses précédentes que l'on peut écrire $\overrightarrow{E}$ en fonction des dérivées partielles de F.

Gradient d'un champ scalaire

Le **gradient** $\overrightarrow{\text{grad}}\ F$ d'un champ scalaire $F(x, y, z)$ vaut :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ F \triangleq \frac{\partial F}{\partial x}.\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial F}{\partial y}.\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial F}{\partial z}.\overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On utilise parfois la « notation nabla [a] » :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ F = \overrightarrow{\nabla} F \quad \text{où} \quad \overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

a. Le symbole ∇ se prononce « nabla »

☛ *Remarque :* Le gradient est un opérateur linéaire ($\overrightarrow{\text{grad}}\ (F + \lambda.G) = \overrightarrow{\text{grad}}\ (F) + \lambda.\overrightarrow{\text{grad}}\ (G)$ avec F et G deux champ scalaires et λ une constante) et qui commute notamment avec la dérivation temporelle ($\overrightarrow{\text{grad}}\ \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{grad}}\ (F)$).

☛ *Remarque :* Interprétons physiquement ce qu'est le gradient d'un champ F. Si F croît localement selon la direction (O, x), alors $\frac{\partial F}{\partial x} > 0$, et $\frac{\partial F}{\partial x}.\overrightarrow{e_x}$ est dans le même sens que $\overrightarrow{e_x}$. En étendant ce raisonnement aux autres coordonnées, on comprend que $\overrightarrow{\text{grad}}\ F$ correspond localement à un vecteur étant orienté des faibles valeurs de F vers les grandes valeurs de F.

Potentiel électrique

On définit le **potentiel électrique** V à partir du champ électrique $\overrightarrow{E}$:

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$$

Le potentiel électrique s'exprime en volt V.

☛ *Remarque :* Le potentiel choisi pour définir $\overrightarrow{E}$ est donc $-V$. Ce n'est qu'une convention pour rester en accord avec ce qui avait été décrit historiquement, et qui permet notamment de donner un lien simple entre potentiel électrostatique et énergie électrostatique. En particulier, on retiendra que $\overrightarrow{E}$ est orienté des hautes valeurs de potentiel V vers les basses valeurs de potentiel, à cause de ce signe $-$.

Généralisation du théorème fondamental de l'analyse

Soit un chemin quelconque (ouvert ou fermé) de point de départ A et de point d'arrivée B. La circulation du gradient d'un champ scalaire et sa différentielle sont liés par la relation :

$$\int_A^B \overrightarrow{\text{grad}}\ F \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = F(B) - F(A)$$

En particulier, le chemin suivi pour aller de A à B n'est pas important : seuls les états final et initial comptent.
Ce théorème est une généralisation tridimensionnelle du théorème fondamental de l'analyse $\displaystyle\int_a^b F'(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Question 8 : Exprimer alors la tension U_{AB} en fonction de $V(A)$ et $V(B)$. Justifier que l'on mentionne parfois la tension électrique comme « différence de potentiels ».

☛ *Remarque :* Nous verrons plus tard dans l'année que ce n'est pas toujours le cas : la tension électrique issue de phénomènes d'induction ne peut pas s'écrire comme une différence de potentiels.

3.3 Lignes de champ électrostatique et équipotentielles

Équipotentielle

On appelle **équipotentielle** un contour sur lequel le potentiel V est constant.

La tension électrique entre deux points quelconques A et B d'une équipotentielle est nécessairement nulle : $U_{AB} = 0$, car $V(A) = V(B)$.

Puisque cette relation est valable pour tous points A et B de l'équipotentielle, on en déduit que le produit scalaire $\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ est toujours nul sur une équipotentielle.

Orthogonalité des équipotentielles aux lignes de champ

Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ est toujours orthogonal aux équipotentielles et inversement.

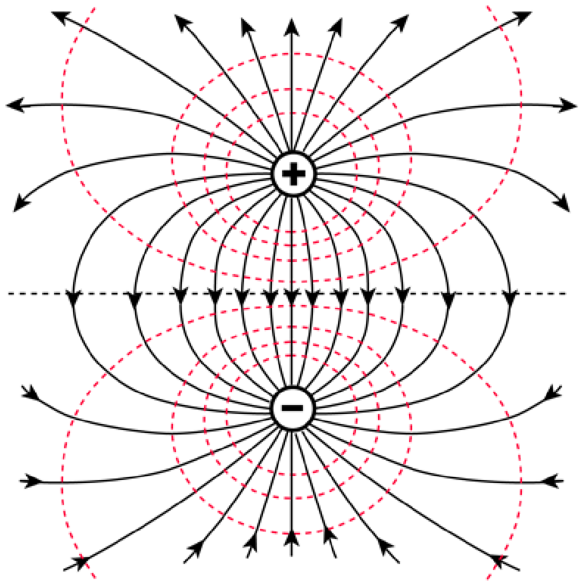


FIGURE 3.2 – Lignes de champ (traits pleins et fléchés) et équipotentielles (traitillés) du champ électrostatique créé par une paire de charges opposées. Schéma issu de : http ://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner la définition de la tension électrique U_{AB} entre deux points A et B. Après avoir rappelé en quoi consiste la conservation de la circulation du champ électrostatique, en déduire la loi d'additivité des tensions et la loi des mailles.
- ☐ Donner l'expression du gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ F$ d'un champ scalaire $F(x, y, z)$. Quelle est l'interprétation géométrique de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ F$?
- ☐ Donner le lien entre le potentiel électrique V et le champ électrique $\overrightarrow{E}$. Justifier qu'une tension peut être vue comme une différence de potentiels.
- ☐ Qu'est-ce qu'une équipotentielle ? À l'aide d'un schéma, expliciter le lien géométrique entre les lignes de champ électrique et ses équipotentielles.

Chapitre 4 : Aspect local du champ électrostatique

Objectifs :

— Relier le théorème de Gauss à l'équation de Maxwell-Gauss.

— Énoncer l'équation de Maxwell-Faraday de la statique et justifier l'existence du potentiel électrostatique.

— Énoncer les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique.

— Énoncer le théorème de Coulomb et les relations de passage du champ électrostatique.

Au concours ATS : Les équations de Maxwell et le théorème de Coulomb sont exploités plus tard dans l'année, lors de l'étude des ondes électromagnétiques.

4.1 Écriture locale du théorème de Gauss

4.1.1 Motivation

Le théorème de Gauss $\oiint_{M\in\mathcal{S}} \overrightarrow{E}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S(M)} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ représente une vision globale et macroscopique du champ électrostatique. Pour des problèmes à résoudre à l'aspect mésoscopique, voire microscopique, ce théorème pose vite souci car on perd des symétries ou invariances disponibles à l'échelle macroscopique.

L'objectif de cette partie va être de décrire le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ à l'échelle locale en partant des observations que nous avons pu faire jusqu'à présent.

4.1.2 Divergence d'un champ vectoriel

Prenons l'exemple le plus simple possible de la vision mésoscopique du champ électrostatique. On considère un élément de volume infinitésimal $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$ (figure 4.1).

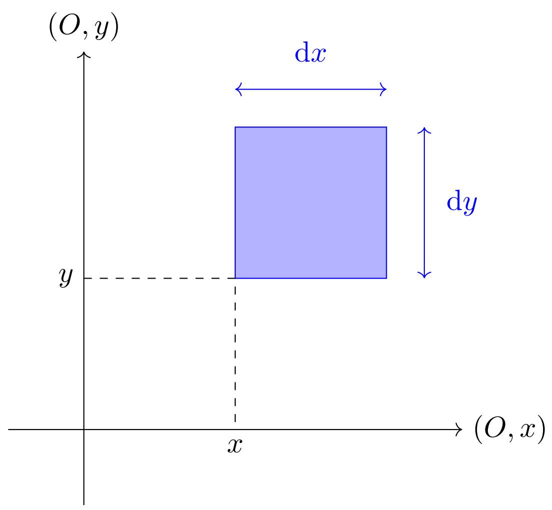


FIGURE 4.1 – Charge mésoscopique.

La charge volumique mésoscopique au point M vaut $\rho(M) = \rho(x,y,z)$. On écrit le champ électrostatique sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_x(x,y,z).\overrightarrow{e_x} + E_y(x,y,z).\overrightarrow{e_y} + E_z(x,y,z).\overrightarrow{e_z}$$

Question 1 : Montrer que la somme des deux flux mésoscopiques selon l'axe (O, x) vaut approximativement $\mathrm{d}\Phi_x \approx \dfrac{\partial E}{\partial x} \times \mathrm{d}V$.

Question 2 : Que valent alors $\mathrm{d}\Phi_y$ et $\mathrm{d}\Phi_z$? En déduire l'expression de $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\Phi_x + \mathrm{d}\Phi_y + \mathrm{d}\Phi_z$, flux total du champ électrostatique à travers la surface mésoscopique.

Divergence d'un champ vectoriel

La divergence div $\overrightarrow{E}$ d'un champ vectoriel $\overrightarrow{E} = E_x.\overrightarrow{e_x} + E_y.\overrightarrow{e_y} + E_z.\overrightarrow{e_z}$ vaut :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} \triangleq \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

En « écriture nabla », on a donc :

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E}$$

☛ *Remarque :* La divergence est un opérateur linéaire (div $\left(\overrightarrow{E_1} + \lambda.\overrightarrow{E_2}\right)$ = div $\overrightarrow{E_1} + \lambda \times$ div $\overrightarrow{E_2}$) et qui commute notamment avec la dérivation temporelle.

La divergence d'un champ vectoriel est un scalaire dépendant du point M de l'espace où on le calcule. Il est négatif si le champ « rentre davantage que ce qu'il ne sort » d'un volume localisé autour du point M considéré, et positif si le champ « sort davantage que ce qu'il ne rentre ».

4.1.3 Du théorème de Gauss à l'équation de Maxwell-Gauss

Question 3 : Exprimer δQ_{int} en fonction de ρ et de $\mathrm{d}V$. Appliquer enfin le théorème de Gauss.

Équation de Maxwell-Gauss

La divergence du champ électrostatique est localement proportionnelle à la densité de charge volumique :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cette équation représente physiquement le fait que le champ $\vec{E}$ fuit les charges positives (si $\rho > 0$, alors la divergence du champ est positive). Au contraire, si $\rho < 0$, la divergence du champ est négative : le champ $\vec{E}$ est attiré par les charges négatives. C'est ce que l'on avait déjà vu en traçant les lignes du champ électrostatique du chapitre 1 !

4.1.4 De l'équation de Maxwell-Gauss au théorème de Gauss

Théorème de Green-Ostrogradski

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée et orientée vers l'extérieur, et $\mathcal{V}$ le volume contenu dans $\mathcal{S}$. Le théorème de Green-Ostrogradski relie le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers $\mathcal{S}$ et sa divergence :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S^{\text{ext}}} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{A} \; \mathrm{d}V$$

Question 4 : Démontrer le théorème de Gauss à partir de l'équation de Maxwell-Gauss.

4.2 Écriture locale de la conservation de la circulation électrostatique

4.2.1 Rotationnel d'un champ vectoriel

Après expertise minutieuse, on peut réaliser que le fait que le champ électrostatique soit à circulation conservative est relié à son caractère « non tourbillonnesque ». En effet, si le champ $\overrightarrow{E}$ tournait autour des charges au lieu de les fuir, l'intégrale le long du contour n'aurait *a priori* pas de raison d'être égale à zéro.

Reprenons la figure 4.1.

Question 5 : Exprimer dC, circulation infinitésimale le long du contour délimité par l'aire mésoscopique dxdy, en faisant le calcul dans le sens positif (c'est-à-dire anti-horaire).

Question 6 : Montrer que l'on a alors d$C \approx$ dxd$y \times \left(\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y}\right)$.

Question 7 : Quels résultats analogues aurait-on selon les autres faces d'aire dxdz et dydz ?

Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E}$ d'un champ vectoriel $\overrightarrow{E} = E_x.\overrightarrow{e_x} + E_y.\overrightarrow{e_y} + E_z.\overrightarrow{e_z}$ vaut :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} \triangleq \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

En « écriture nabla », on a donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}$$

☛ *Remarque :* Le rotationnel est un opérateur linéaire et qui commute notamment avec la dérivation temporelle.

Le rotationnel d'un champ vectoriel est un vecteur dépendant du point M de l'espace où on le calcule. Sa direction indique l'axe autour duquel le champ tourne localement (donc en M), alors que son sens indique si cette rotation est dans le sens horaire ou anti-horaire à l'aide de la règle du tire-bouchon (à faire avec la main droite !). Si le rotationnel est localement nul, alors le champ ne tourne localement pas (il va « tout droit »).

4.2.2 Équation de Maxwell-Faraday statique

On peut démontrer que le rotationnel du gradient d'un champ scalaire F est nul : $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ F = \vec{0}$. La réciproque est également vraie, mais beaucoup plus dure à démontrer : si le rotationnel d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ est nul, alors il existe un potentiel scalaire F tel que $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\ F$.

Équation de Maxwell-Faraday statique

Le rotationnel du champ électrostatique est nul en régime stationnaire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} = \vec{0}$$

Cette équation représente physiquement le fait que le champ $\overrightarrow{E}$ ne « tourne pas » autour des charges, mais s'en éloigne ou s'en rapproche en ligne droite. Elle assure également l'existence d'un potentiel électrostatique V, qui n'était jusqu'à maintenant qu'intuité par nos observations expérimentales.

☛ *Remarque :* Nous verrons plus tard dans l'année que cette équation n'est valable qu'en régime stationnaire, c'est-à-dire totalement indépendant du temps t. Pour un régime dépendant du temps, le second membre changera...

4.3 Propriétés d'un conducteur à équilibre électrostatique

4.3.1 Définitions et conséquences immédiates

Conducteur à l'équilibre électrostatique

Un milieu est dit conducteur si les charges en son sein peuvent se déplacer librement.
Un tel milieu est à l'équilibre électrostatique si lesdites charges sont immobiles.

Notons $\overrightarrow{E_{\text{int}}}$ le champ électrostatique à l'intérieur du milieu conducteur ; celui-ci est dû à la présence des charges le constituant.

Question 8 : Soit une charge ponctuelle q. Si elle est immobile, que vaut la résultante des forces électrostatiques ? Et donc le champ électrostatique ?

Champ électrostatique dans un conducteur à l'équilibre électrostatique

Le champ électrostatique $\overrightarrow{E_{\text{int}}}$ au sein d'un conducteur à l'équilibre électrostatique est nul :

$$\overrightarrow{E_{\text{int}}} = \vec{0}$$

Question 9 : Montrer alors que la tension entre deux points quelconques du conducteur est nulle. Est-ce en accord avec les observations expérimentales ?

Question 10 : D'après l'équation de Maxwell-Gauss, que vaut alors la densité volumique de charge ρ_{int} à l'intérieur du conducteur ? En quoi est-ce *a priori* contradictoire pour un milieu conducteur ?

On trouve une densité volumique de charge nulle dans un milieu conducteur : cela ne signifie cependant pas qu'il n'est pas constitué de charges ! En effet, nous oublions là un élément important : les charges peuvent être de densité volumique, mais également de densité surfacique.

Répartition des charges dans un conducteur à l'équilibre électrostatique

Dans un conducteur à l'équilibre électrostatique, les charges se répartissent à sa surface selon une densité σ. Si le conducteur a une charge Q_0 et une aire extérieure totale S, on a alors $\sigma = \dfrac{Q_0}{S}$.

4.3.2 Relations de passage

Prenons l'exemple d'un cylindre de rayon R et de longueur $L \gg R$. On suppose que les charges ne sont réparties que sur sa surface selon une densité σ.

On a démontré, dans le chapitre précédent, que $\overrightarrow{E_{\text{int}}} = \vec{0}$ (ce qui est bien cohérent avec la partie précédente) et que $\overrightarrow{E_{\text{ext}}} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_r}$.

Question 11 : Qu'arrive-t-il à la composante normale (par rapport à l'interface) de $\overrightarrow{E}$?

Question 12 : Qu'arrive-t-il à la composante tangentielle (par rapport à l'interface) de $\overrightarrow{E}$?

Relations de passage et théorème de Coulomb

Soient deux milieux (1) et (2) séparés par une interface de densité surfacique de charges σ.
$\overrightarrow{E_1}$ représente le champ électrostatique dans le milieu (1) juste avant l'interface, et $\overrightarrow{E_2}$ le champ électrostatique dans le milieu (2) juste après l'interface.
Les **relations de passage** pour le champ électrostatique à travers l'interface sont les suivantes :

— Les composantes tangentielles du champ électrostatique sont conservées :

$$E_{t,2} - E_{t,1} = 0$$

— La composante normale du champ électrostatique n'est pas conservée :

$$E_{n,2} - E_{n,1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

On peut les résumer vectoriellement *via* le **théorème de Coulomb** :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\overrightarrow{n_{1\to 2}}$$

où $\overrightarrow{n_{1\to 2}}$ est le vecteur normal à l'interface, orienté du milieu (1) vers le milieu (2) (voir figure 4.2).

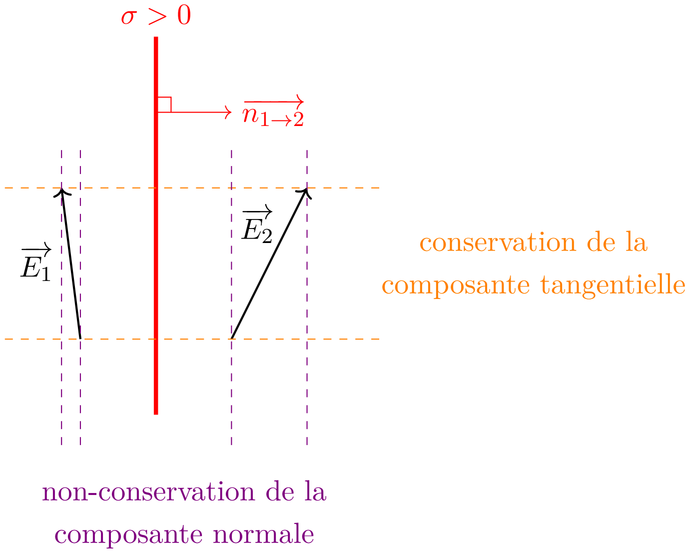


FIGURE 4.2 – Illustration des relations de passage pour le champ électrostatique.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner l'expression de la divergence div $\overrightarrow{A}$ d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(x, y, z)$. Quelle est l'interprétation géométrique de div $\overrightarrow{A}$?
- ☐ Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. Quelle est son interprétation physique ? À l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, en déduire le théorème de Gauss.
- ☐ Donner l'expression du rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A}$ d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(x, y, z)$. Quelle est l'interprétation géométrique de $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A}$?
- ☐ Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday de la statique en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. Quelle est son interprétation physique ?
- ☐ Qu'est-ce qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique ? Citer et démontrer ses propriétés (valeur interne du champ électrostatique, valeur de la tension entre deux points quelconque du conducteur, localisation des charges).
- ☐ Énoncer le théorème de Coulomb ; représenter schématiquement ce théorème.

Chapitre 5 : Condensateurs et capacité électrique

Objectifs :

— Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide en négligeant les effets de bords.

— Établir l'expression de la capacité linéique d'un condensateur cylindrique dans le vide en négligeant les effets de bords.

— Définir la notion de densité volumique d'énergie électrique à l'aide de l'exemple du condensateur plan.

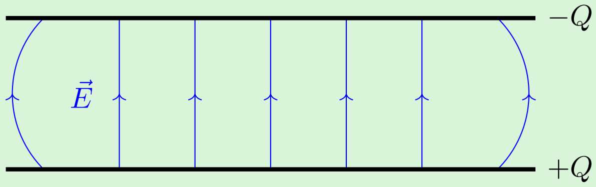
Au concours ATS : Aux écrits en 2016, 2017, 2020. Tombe parfois aux oraux.

5.1 Étude d'un condensateur plan

5.1.1 Définition et premiers résultats

Condensateur plan

Un condensateur plan est un composant électronique constitué de deux plaques parallèles l'une à l'autre, séparées par du vide. Les deux plaques ont des charges opposées $+Q$ et $-Q$, et sont en influence totale : les lignes de champ électrique de la première plaque atteignent toutes la deuxième plaque, et inversement.



Afin de simplifier l'étude, on supposera les plaques très rapprochées : si l'on note e l'épaisseur entre les deux plaques, et S leur surface, on a donc $e^2 \ll S$. Cette hypothèse permet notamment de négliger les effets de bords, où le champ électrique, par manque de symétrie, n'est pas rectiligne.

On notera z la direction ascendante.

Question 1 : Donner les dépendances de $\vec{E}$ en espace, ainsi que sa direction. Justifier.

Question 2 : À l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss, déterminer la valeur de div $\vec{E}$ entre les deux plaques. En déduire que le champ électrique y est uniforme : $\vec{E} = E_0.\overrightarrow{e_z}$.

5.1.2 Capacité d'un condensateur

Considérons uniquement, pour l'instant, la plaque de charge $+Q$. On note $\sigma = \dfrac{Q}{S}$ la charge surfacique de cette armature.

Question 3 : Soit $\overrightarrow{E_2}$ le champ juste au-dessus de la plaque, et $\overrightarrow{E_1}$ celui juste en dessous de celle-ci. Par symétrie, que peut-on dire de $\overrightarrow{E_1}$?

Question 4 : En déduire, par application du théorème de Coulomb, une expression de $\overrightarrow{E_2}$. Quelle est alors l'expression du champ $\overrightarrow{E_+}$ créé par l'armature positive dans l'isolant ?

Question 5 : Par analogie, que vaut $\overrightarrow{E_-}$, champ électrique créé par l'armature négative dans l'isolant ? En déduire le champ électrique total $\overrightarrow{E}$ y régnant, notamment en fonction de Q et S.

Question 6 : Exprimer la tension U entre les deux armatures du condensateur en fonction du champ électrique $\overrightarrow{E}$, puis en fonction de Q, S, ε_0 et e.

Capacité d'un condensateur

La différence de potentiel (ou tension) U entre les deux armatures d'un condensateur est proportionnelle à leur charge :

$$Q = C \times U$$

où C est la **capacité** du condensateur, qui s'exprime en farad F.

Question 7 : Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan.

Capacité d'un condensateur plan

Pour un condensateur plan, la capacité peut s'écrire :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

où S est la surface de chaque armature et e la distance entre celles-ci.

5.2 Étude d'un condensateur cylindrique

Considérons à présent un condensateur cylindrique constitué de deux cylindres coaxiaux de même axe de révolution (O, x) ; le cylindre intérieur, de rayon R_1, porte une charge totale $+Q$, et le cylindre extérieur, de rayon $R_2 > R_1$, porte une charge totale $-Q$. Le condensateur est « infini de longueur L », c'est-à-dire telle que $L^2 \gg \pi R_2^2$.

Question 8 : Faire un schéma en perspective cavalière puis en coupe.

Question 9 : Expliquer pourquoi le champ électrique est nul à l'intérieur du cylindre intérieur ainsi qu'à l'extérieur du cylindre extérieur.

Question 10 : Montrer que $\vec{E} = E(r).\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées cylindriques.

Question 11 : Déterminer le champ électrique entre les deux cylindres coaxiaux.

Question 12 : En déduire la tension U entre les deux armatures.

Question 13 : Donner alors une expression de la capacité C du condensateur, puis de sa capacité par unité de longueur $\Gamma \triangleq \dfrac{C}{L}$.

Capacité linéique d'un condensateur cylindrique

La capacité linéique Γ d'un condensateur cylindrique ne dépend que du rapport entre les rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 des deux armatures :

$$\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$$

5.3 Bilan énergétique d'un condensateur

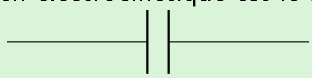
5.3.1 Modélisation

Considérons que le condensateur soit relié à une alimentation, de telle manière que les charges $\pm q$ sur chacune de ses armatures dépendent du temps. On admet que les calculs menés précédemment restent valables en régime variable.

Question 14 : Si l'on augmente la tension aux bornes du condensateur de $\mathrm{d}u$, quelle va être la variation de charge $\mathrm{d}q$? Diviser l'équation obtenue par $\mathrm{d}t$, durée pendant laquelle la variation a lieu. En déduire une relation courant-tension pour le condensateur.

Modélisation d'un condensateur en électrocinétique

Le symbole d'un condensateur en électrocinétique est le suivant :



L'intensité i parcourant un condensateur est proportionnelle à la dérivée temporelle de la tension u à ses bornes. En convention récepteur, on a donc :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Remarque : En pratique, les capacités varient typiquement entre $1\,\mathrm{nF}$ et $1\,\mathrm{mF}$.

Considérons un circuit constitué d'un générateur de tension E constante, d'un condensateur de capacité C et d'un résistor de résistance R (voir figure 5.1).

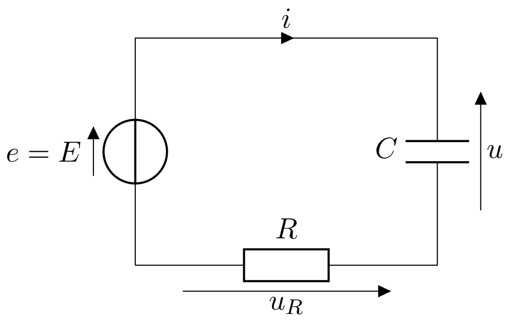


Figure 5.1 – Circuit RC.

Question 15 : Déterminer l'équation électrique portant sur u à l'aide de la loi des mailles.

Question 16 : Multiplier cette équation par i. Montrer que la puissance du générateur est convertie en effet Joule et en puissance capacitive, dont l'énergie associée est $\frac{1}{2}Cu^2$.

Énergie emmagasinée par un condensateur

L'énergie $\mathcal{E}_C$ stockée dans un condensateur dont la tension à ses bornes est u vaut :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2$$

On peut réécrire cette formule sous la forme : $\mathcal{E}_C = \dfrac{Q^2}{2C}$.
On en déduit que la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

5.3.2 Densité volumique d'énergie électrique

Question 17 : Pour un condensateur plan, montrer que $\mathcal{E}_C$ peut s'écrire $\mathcal{E}_C = V \times u_e$ avec V le volume intérieur au condensateur.

Densité volumique d'énergie électrique

Soit un champ électrique $\vec{E}$ régnant dans l'espace. On associe à ce champ électrique une densité volumique u_e d'énergie électrique (en $\mathrm{J/m^3}$) :

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

L'énergie électrique totale contenue dans l'espace est donc $\mathcal{E}_e = \iiint u_e \mathrm{d}V$.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Qu'est-ce qu'un condensateur plan ? Établir l'expression du champ électrique en son sein en négligeant les effets de bord. Après avoir rappelé la définition de la capacité d'un condensateur, en déduire son expression pour le condensateur plan. Quelle est son unité ?
- ☐ Soit un condensateur cylindrique de rayon interne a, de rayon externe $b > a$ et de longueur $L \gg b$. Établir l'expression du champ électrique en son sein, puis la capacité du condensateur cylindrique. En déduire sa capacité linéique.
- ☐ Donner le symbole d'un condensateur en électrocinétique, ainsi que le lien entre l'intensité i le parcourant et la tension u à ses bornes. Quels sont les ordres de grandeur des capacités de condensateurs utilisés en travaux pratiques ?
- ☐ Donner l'expression de l'énergie emmagasinée par un condensateur. En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électrique en prenant l'exemple du condensateur plan.

Chapitre 6 : Conduction électrique

Objectifs :

— Définir le vecteur densité de courant.

— Établir l'équation de conservation de la charge à une dimension en régime variable. Énoncer sa généralisation à trois dimensions puis expliquer que le vecteur densité de courant est à flux conservatif en régime stationnaire.

— Énoncer la loi d'Ohm locale.

— Expliquer l'effet Joule et définir la résistance électrique dans un conducteur.

Au concours ATS : Aux écrits en 2022, 2019. Tombe parfois aux oraux.

6.1 Densités de courant

Densité volumique de courant

Soit un déplacement de particules chargées dans l'espace. On note leur densité volumique n^* (nombre de particules par unité de volume, en m^{-3}), $\vec{v}$ leur vitesse d'ensemble et q la charge d'une particule.
On définit alors le vecteur densité (volumique) de courant $\vec{j}$ comme :

$$\vec{j} = n^* q.\vec{v}$$

Remarque : La densité volumique n^* et la vitesse d'ensemble $\vec{v}$ sont des grandeurs mésoscopiques dépendant de l'espace. On abordera d'ailleurs la notion de « vitesse d'ensemble » dans les chapitres de mécanique des fluides.

Le sens physique de $\vec{j}$ est finalement assez simple. L'étudiant attentif remarquera que $n^* \times q$, qui s'exprime en $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}$, ne représente rien d'autre que la densité volumique de charges ρ. Ainsi, à chaque élément de volume dV, on associe la charge totale ρdV, qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$. $||\vec{j}||$ représente donc localement l'amplitude du « courant de charges », alors que son sens représente dans quel sens s'écoulent lesdites charges.

Question 1 : Montrer que le vecteur densité de courant s'exprime en ampère par mètre carré $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-2}$.

Intensité du courant

Soit une densité volumique de courant $\vec{j}$ passant à travers une surface orientée $\mathcal{S}$. On définit l'intensité i du courant électrique comme le flux de $\vec{j}$ à travers cette surface :

$$i = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$$

En particulier, si la densité de courant est uniforme sur la surface d'intégration, alors :

$$i = j \times S$$

L'unité de l'intensité d'un courant est, dans le système international, l'ampère A.

☛ *Remarque :* Le courant électrique représente par définition le mouvement des charges positives. Seulement, dans la plupart des circuits électriques, les charges se déplaçant, c'est-à-dire les électrons, sont négatives. Ainsi, lorsqu'on représente un courant allant de la gauche vers la droite, cela signifie en réalité que les électrons vont de la droite vers la gauche...

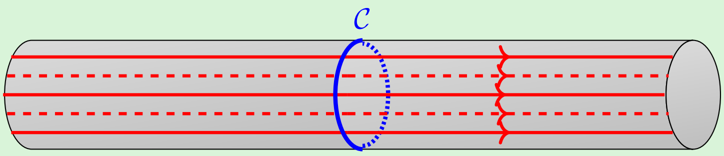
Il arrive que les courants ne se propagent, à l'échelle macroscopique, ni de façon volumique (où on utiliserait $\vec{j}$), ni de façon linéique (où on utiliserait i). En effet, nous montrerons plus tard dans l'année que les courants ne peuvent se propager qu'à la surface des conducteurs parfaits, et non pas en profondeur.

Densité surfacique de courant

Si des courants surfaciques $\overrightarrow{j_s}$ se propagent sur une surface $\mathcal{S}$ (ouverte ou fermée), l'intensité du courant i vaut alors :

$$i = \int_{\mathcal{C}} j_s \, \mathrm{d}\ell$$

où $\mathcal{C}$ représente un contour sur lequel $\mathcal{S}$ s'appuie.



La densité surfacique de courant s'exprime alors, dans le système international, en ampère par mètre $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

6.2 Conservation de la charge

6.2.1 Résultat préliminaire sur le vecteur densité de courant

Soit un barreau de section S dans lequel s'écoulent des particules de la gauche vers la droite. On suppose que les particules ont tous la même vitesse v, et qu'ils sont présents à une densité n^* (exprimée en particules/m^3).

On considère une portion quelconque de longueur L de ce barreau (voir figure 6.1) ; la question est de savoir quel est le nombre de particules entrant dans cette portion pendant une durée Δt.

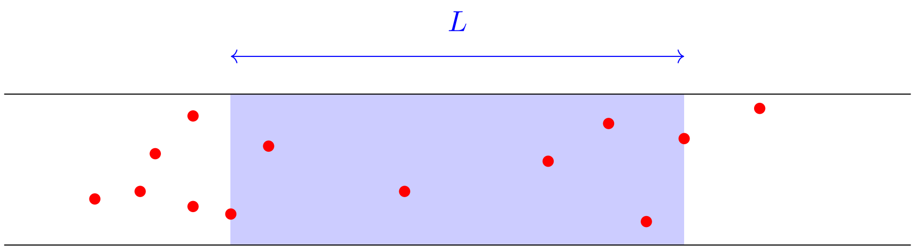


FIGURE 6.1 – Courant de particules dans un barreau vu de profil.

Question 2 : À quelle distance a de la frontière d'entrée les particules entrantes doivent-elles se situer au maximum afin de pouvoir intégrer le système pendant la durée Δt ?

Question 3 : Exprimer le volume V contenant les particules pouvant effectivement rentrer, puis le nombre N_e de particules entrantes.

Question 4 : On considère à présent que ces particules sont en fait des porteurs de charge q. Quelle est alors la charge totale Q_e entrant dans le système pendant Δt ?

Question 5 : Rappeler la définition du vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$. En déduire un lien entre la charge entrante et le flux de $\vec{j}$.

Lien entre charge et courant

Soit une surface ouverte $\mathcal{S}$ à travers laquelle passe un courant de charges $\vec{j}$. Le flux de $\vec{j}$ à travers cette surface ouverte correspond au nombre de charges $\mathrm{d}q$ la traversant pendant une durée $\mathrm{d}t$:

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

☛ *Remarque :* Cette relation, bien connue depuis un certain temps par bon nombre d'entre vous, n'est en fait qu'une conséquence de la définition de $\vec{j}$ et non pas la définition de l'intensité i. Cependant, on pourrait partir de cette équation et tout redémontrer à l'envers, comme cela a été fait historiquement. L'œuf et la poule...

6.2.2 Aspect local

Soit un conducteur cylindrique de section S et d'axe de révolution (O,x).

On considère comme système d'étude une tranche de ce conducteur de longueur infinitésimale $\mathrm{d}x$. On note $\rho(x,t)$ la charge volumique (en $\mathrm{C/m^3}$), $\vec{v}(x,t) = v(x,t).\overrightarrow{e_x}$ la vitesse des porteurs de charge et $\vec{j}(x,t) = j(x,t).\overrightarrow{e_x}$ la densité volumique de courant électrique.

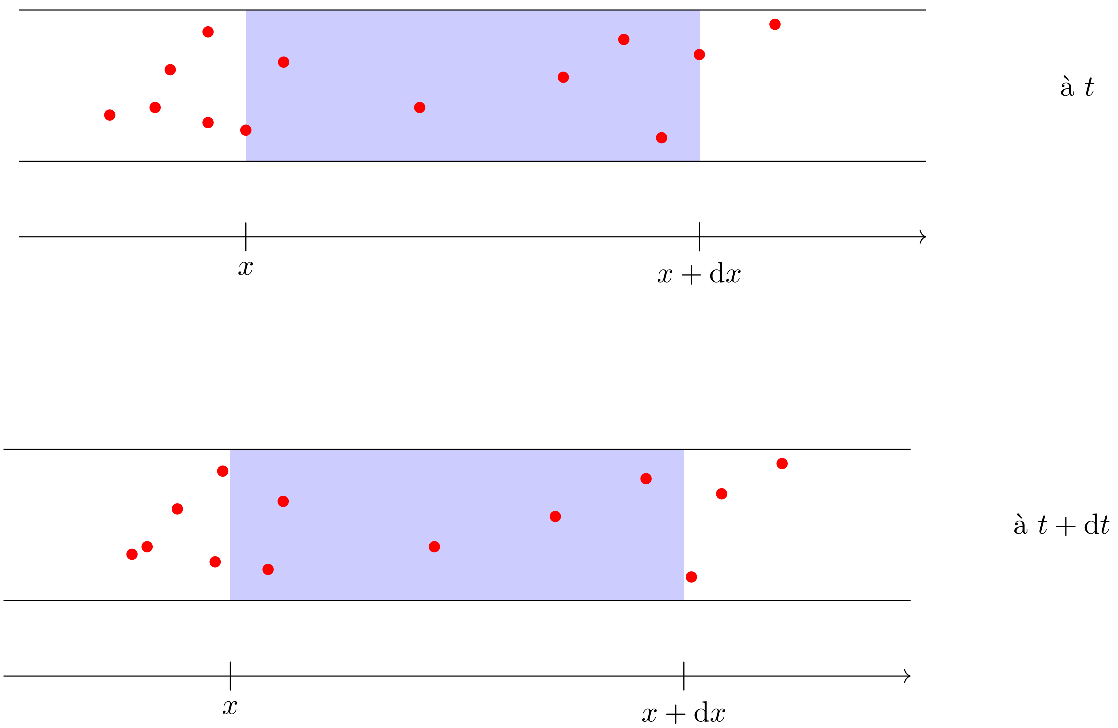


FIGURE 6.2 – Bilan de charge entre x et $x + \mathrm{d}x$.

Question 6 : Exprimer la charge δq_e entrant dans le système pendant une durée dt. Exprimer de même la charge δq_s sortant du système pendant cette même durée.

Question 7 : Est-il possible de créer ou de supprimer des charges électriques ? En déduire une relation entre δq_e, δq_s et la variation temporelle $q(t + \mathrm{d}t) - q(t)$ de charges dans le système pendant la durée dt.

Question 8 : La charge totale $q(t)$ du système peut s'écrire $\rho(x, t) \times S\mathrm{d}x$, puisque le volume du système est égal à $S\mathrm{d}x$. En déduire une équation aux dérivées partielles portant sur ρ et j.

Équation locale de conservation de la charge

On peut généraliser le résultat précédent en trois dimensions pour exprimer la conservation (c'est-à-dire la non-perte et le non-gain) de la charge électrique dans un système :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j} = 0$$

Remarque : Cette équation retranscrit la « non-disparition » de la charge électrique. En effet, elle peut se mettre sous la forme $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}\left(\vec{j}\right)$: la variation temporelle positive (respectivement : négative) de la densité volumique de charge ρ correspond à une sortie (respectivement : une entrée) de charges (*via* le vecteur $\vec{j}$) dans le système étudié.

6.2.3 Conséquences à l'échelle macroscopique

Soit un système Σ macroscopique dans ce conducteur (on considère « juste » une longueur L non infinitésimale). Intégrons l'équation de conservation de la charge à une dimension dans le volume intérieur à Σ :

$$\iiint_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial t}\text{d}V = -\iiint_\Sigma \text{div}\,\vec{j}\,\text{d}V$$

D'une part, on peut intervertir l'intégrale et la dérivée partielle dans le terme de gauche car l'espace et le temps ne sont pas dépendants l'un de l'autre : $\iiint_\Sigma \frac{\partial \rho}{\partial t}\text{d}V = \frac{\text{d}}{\text{d}t}\iiint_\Sigma \rho\,\text{d}V = \frac{\text{d}Q_{\text{int}}}{\text{d}t}$, où Q_{int} est la charge totale intérieure au système Σ.

D'autre part, on peut utiliser le théorème de Green-Ostrogradski pour justifier que le terme de droite peut se réécrire en terme de flux : $-\iiint_\Sigma \text{div}\,\vec{j}\,\text{d}V = -\oiint_\Sigma \vec{j}\cdot\text{d}\vec{S}$, où $\text{d}\vec{S}$ est orienté vers l'extérieur. Or, puisque $\vec{j} = j(x,t).\vec{e_x}$, il vient que ce flux peut s'écrire $-(j_sS - j_eS)$, avec j_e et j_s les courants volumiques en entrée et en sortie. Par définition, le terme de droite est donc égal à $-(I_s - I_e) = I_e - I_s$, avec I_e et I_s les intensités entrant et sortant du conducteur.

En mélangeant ces deux points de vue, il vient alors que la différence d'intensité d'un bout à l'autre d'un conducteur est égal à la dérivée temporelle de la charge intérieure à ce conducteur :

$$I_e - I_s = \frac{\text{d}Q_{\text{int}}}{\text{d}t}$$

Cette équation est l'**équation intégrale de conservation de la charge**.

Question 9 : En régime stationnaire, que peut-on dire de I_e et I_s ? Cela est-il cohérent avec l'équation de conservation de la charge ?

Conservation de la charge en régime stationnaire

En régime stationnaire, les dépendances en temps sont annulées. Il vient alors que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire que $\text{div}\,\vec{j} = 0$: le vecteur densité de courant est à flux conservatif.
Du point de vue macroscopique, cela signifie qu'au sein d'un même conducteur, l'intensité entrante totale doit être égale à l'intensité sortante totale : c'est la **loi des nœuds**.

6.3 Loi d'Ohm

6.3.1 Modèle de Drude

Considérons un conducteur dont les électrons peuvent se déplacer en son sein quasi-librement. Par souci de simplification, on supposera que ce conducteur est cylindrique de section S, et qu'un champ électrique $\vec{E}$ met en mouvement les porteurs de charges.

De temps à autres, les électrons vont se heurter à des noyaux qui modifient leurs trajectoires et leurs vitesses. On modélise cette interaction par une force de frottements $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau}.\vec{v}$, où $\vec{v}$ représente la vitesse d'un électron et $\tau \approx 1 \times 10^{-14}\,\mathrm{s}$ est la durée caractéristique entre deux collision d'un électron sur le réseau du conducteur.

On notera n^* la densité volumique d'électrons et $-e < 0$ la charge d'un électron.

Question 10 : Considérons un électron de masse m_e. Faire le bilan des forces s'appliquant sur ce système, et appliquer le PFD pour déterminer une équation différentielle portant sur $\vec{v}$.

Question 11 : Résoudre cette équation différentielle à l'aide d'un vecteur constant arbitraire $\vec{A}$ que l'on ne cherchera pas à expliciter. Au vu de la valeur numérique de τ, que peut-on dire de $\vec{v}$?

Question 12 : Rappeler la définition du vecteur densité de courant $\vec{j}$, puis l'exprimer explicitement à l'aide des résultats précédents.

Loi d'Ohm locale

Le vecteur densité de courant $\vec{j}$ parcourant un conducteur est proportionnel au champ électrique $\vec{E}$ en son sein :

$$\vec{j} = \gamma.\vec{E}$$

γ est la conductivité électrique du milieu, qui est toujours positive et s'exprime en $\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ (ou siemens par mètre $\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$). $\vec{j}$ et $\vec{E}$ ont donc même direction et même sens.

☛ *Remarque :* On peut citer quelques valeurs de conductivités électrique : $\gamma_{\text{cuivre}} = 6\times10^{7}\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$; $\gamma_{\text{fer}} = 1\times10^{7}\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$; $\gamma_{\text{eau distillée}} = 1\times10^{-5}\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

6.3.2 De l'aspect local à l'aspect global

Considérons un conducteur filiforme de section S et de longueur ℓ ; on suppose que la loi d'Ohm locale s'y applique. Par souci de simplification, le conducteur sera considéré rectiligne, selon un axe (O,x) ; on a donc $\vec{j} = j.\vec{e_x}$ et $\vec{E} = E.\vec{e_x}$ (voir figure 6.3).

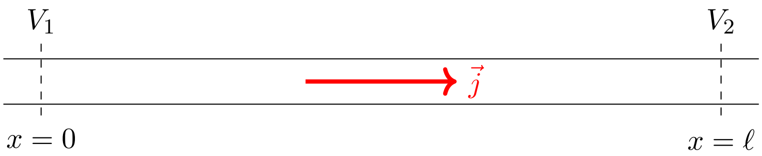


Figure 6.3 – Conducteur filiforme parcouru par un courant.

Question 13 : Montrer que la tension électrique entre les points $x = 0$ et $x = \ell$ s'écrit $U = E\times\ell$.

Question 14 : Exprimer l'intensité i parcourant le conducteur en fonction de j. Montrer, à partir de la loi d'Ohm locale, que l'intensité et la tension U sont proportionnelles.

Loi d'Ohm intégrale

Soit un conducteur de longueur ℓ, de section S et de conductivité électrique γ possédant une tension U à ses bornes. L'intensité i du courant électrique s'écoulant entre ces deux bornes est proportionnelle à U :

$$U = R \times i$$

où $R \triangleq \dfrac{\ell}{\gamma S}$ est la résistance électrique du conducteur.

Question 15 : Calculer la résistance électrique d'un fil de cuivre de diamètre $d = 0{,}45\,\mathrm{mm}$ et de longueur $L = 1\,\mathrm{m}$.

6.3.3 Effet Joule

Considérons des électrons de charge $-e$ et de vitesse $\vec{v}$, plongés dans un champ électrique $\vec{E}$. On note la densité particulaire n^*.

Question 16 : Exprimer la puissance $\mathcal{P}$ qu'exerce le champ électrique sur un électron en fonction des données de l'énoncé.

Question 17 : En déduire la puissance par unité de volume p qu'exerce le champ électrique sur les électrons. Montrer que l'on peut écrire $p = \vec{j} \cdot \vec{E}$.

Puissance cédée à la matière

Des porteurs de charge en mouvement dans un champ électrique cèdent une puissance volumique p_J (en $\mathrm{W/m^3}$) proportionnelle au vecteur densité de courant et au champ électrique :

$$p_J = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Cette puissance (négative) se transfère à la matière environnante, généralement sous forme de chaleur : c'est ce que l'on appelle **l'effet Joule**.

Question 18 : Montrer que l'on peut écrire $p_J = -\gamma \vec{E}^2$ et $p_J = -\dfrac{\vec{j}^2}{\gamma}$.

Question 19 : On rappelle que $i = j \times S$ et $U = E \times \ell$ avec S la section du conducteur et ℓ sa longueur. Montrer que l'on retrouve une puissance perdue par effet Joule sous la forme $P_J = -Ri^2$ pour un conducteur macroscopique.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Rappeler la définition de la densité volumique de courant. On explicitera chacun des termes ainsi que leurs unités. Que représente physiquement la densité volumique de courant ?
- ☐ Quelle est la définition de l'intensité du courant ? Quel lien peut-on établir par ailleurs entre l'intensité du courant et le débit de charges électriques ?
- ☐ Établir l'équation locale de conservation de la charge unidimensionnelle.
- ☐ Énoncer la loi d'Ohm locale, en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. Donner l'ordre de grandeur de conductivité électrique dans un métal.
- ☐ À partir de la loi d'Ohm locale, démontrer la loi d'Ohm intégrale $U = R \times i$. Donner l'expression de R en fonction de la conductivité électrique, de la section du conducteur (supposée uniforme) et de sa longueur.
- ☐ Donner l'expression de la puissance volumique cédée par des porteurs de charge à la matière environnante. Sous quelle forme l'énergie est-elle échangée ? Commenter le signe.