

SCIENCES PHYSIQUES

ATS – LYCÉE LOUIS ARMAND

---

## Thème 3 : Réponse d'un système mécanique

### Cours

---

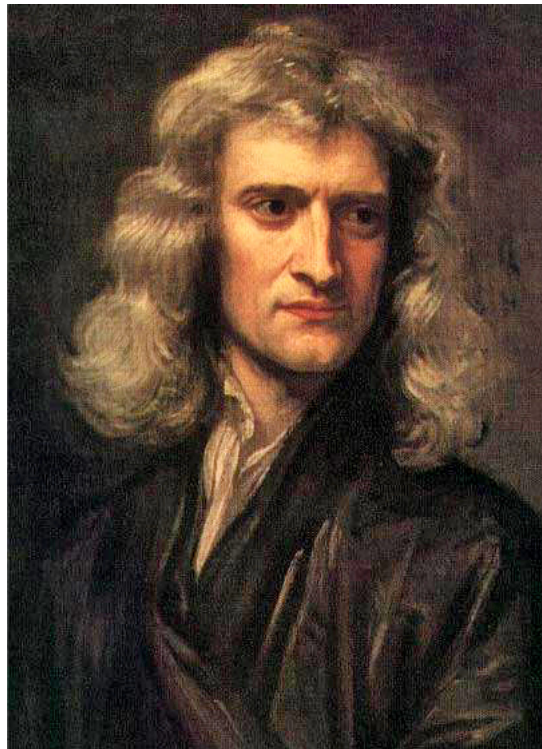


FIGURE 1 – Isaac Newton (1643 – 1727) est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Gottfried Wilhelm Leibniz, du calcul infinitésimal.


# Table des matières

<b>1</b>	<b>Dynamique du point matériel</b>	<b>1</b>
1.1	Rappels et compléments sur les coordonnées cartésiennes . . . . .	1
1.2	Actions, interactions et forces . . . . .	4
1.2.1	Les interactions fondamentales . . . . .	4
1.2.2	Des interactions aux forces . . . . .	4
1.2.3	Exemples de forces . . . . .	5
1.3	Principe fondamental de la dynamique (PFD) . . . . .	7
1.3.1	Énoncé . . . . .	7
1.3.2	Applications du PFD . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Rotation d'un solide [HP]</b>	<b>13</b>
2.1	Moment cinétique . . . . .	13
2.1.1	Moment cinétique d'un point matériel . . . . .	13
2.1.2	Moment cinétique d'un solide . . . . .	15
2.2	Moment d'une force . . . . .	17
2.2.1	Définitions et propriétés . . . . .	17
2.2.2	Couple . . . . .	18
2.3	Théorème du moment cinétique . . . . .	19
2.3.1	Démonstration et énoncé pour un point matériel . . . . .	19
2.3.2	Énoncé pour un solide . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Régime sinusoïdal forcé d'un système mécanique</b>	<b>21</b>
3.1	Décomposition d'un signal . . . . .	21
3.1.1	Pour un signal périodique . . . . .	21
3.1.2	Pour un signal non périodique . . . . .	23
3.2	Position du problème . . . . .	24
3.3	Notation complexe . . . . .	26
3.4	Résolution de l'équation du mouvement . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Diagrammes de Bode [<math>\approx</math>HP]</b>	<b>30</b>
4.1	Fonction de transfert . . . . .	30
4.2	Diagrammes fréquentiels . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Résonance d'un système mécanique</b>	<b>35</b>
5.1	Premières observations . . . . .	35
5.2	Condition sur le facteur de qualité pour une résonance en position . . . . .	36
5.3	Pulsation et amplitude lors de la résonance en position . . . . .	38
<b>6</b>	<b>De la dynamique à l'énergétique</b>	<b>40</b>
6.1	Puissance d'une force . . . . .	40
6.2	Travail d'une force . . . . .	41
6.3	Mouvements conservatifs et énergie potentielle . . . . .	44
6.4	Démonstration du théorème de la puissance mécanique . . . . .	45

# Chapitre 1 : Dynamique du point matériel

## Objectifs :

- Énoncer le principe des actions réciproques et l'appliquer dans le cas de la réaction d'un support en l'absence de frottement solide.
- Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le cas d'un mouvement rectiligne.
- Exprimer algébriquement les coordonnées d'un vecteur. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes.
- Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées sur une base orthonormée.

 **Au concours ATS** : Aux écrits en 2022, 2021, 2019, 2018, 2017. Tombe régulièrement aux oraux.

## 1.1 Rappels et compléments sur les coordonnées cartésiennes

### Coordonnées cartésiennes

Les trois coordonnées cartésiennes d'un point  $M$  dans un repère orthonormé<sup>a</sup>  $(Oxyz)$  choisi sont rigoureusement notées  $x_M$ ,  $y_M$  et  $z_M$  :

- $x_M$  est l'abscisse du point  $M$  ( $x_M \in ]-\infty; +\infty[$ ) ;
- $y_M$  est l'ordonnée du point  $M$  ( $y_M \in ]-\infty; +\infty[$ ) ;
- $z_M$  est la cote du point  $M$  ( $z_M \in ]-\infty; +\infty[$ ).

<sup>a</sup>. Les trois directions sont orthogonales les unes aux autres, et le vecteur directeur  $\vec{e}_j$  de l'axe  $(Oj)$  a une norme égale à 1 ( $j = x, y, z$ ).

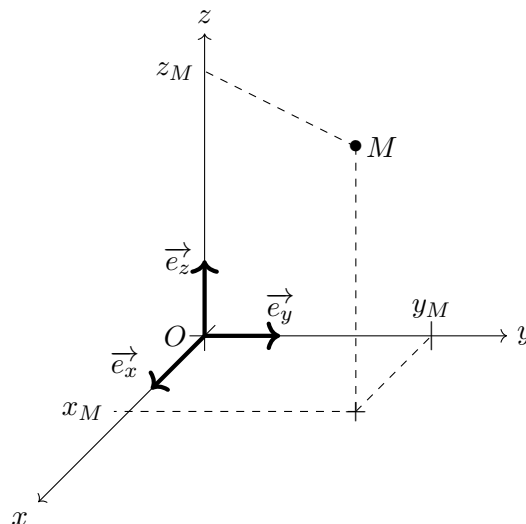


FIGURE 1.1 – Description de la position d'un point en coordonnées cartésiennes.

### Vecteur-position

Si  $O$  est l'origine d'un repère  $\mathcal{R}$ , le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  est appelé **vecteur-position** du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

L'ensemble des positions successives du point  $M$  définit sa **trajectoire**.

**Vecteur-position en coordonnées cartésiennes**

Le vecteur-position  $\overrightarrow{OM}$  s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t) \cdot \vec{e}_x + y(t) \cdot \vec{e}_y + z(t) \cdot \vec{e}_z$$

**Vecteur-vitesse**

On définit le **vecteur-vitesse**  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  d'un point  $M$  dans un repère  $\mathcal{R}$  à partir de son vecteur-position  $\overrightarrow{OM}$  :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

Le vecteur-vitesse est tangent, en tout point, à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement.

Si la norme  $\|\vec{v}(M/\mathcal{R})\|$  est constante, le mouvement du point est **uniforme**.

Si le vecteur  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  a une direction constante, le mouvement du point est **rectiligne**.

**Question 1** : Exprimer  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  en fonction de  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ .

**Vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes**

Le vecteur-vitesse  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \dot{y}(t) \cdot \vec{e}_y + \dot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$$

☛ **Remarque** : Pour un mouvement vertical, on aura toujours  $\vec{v} = \dot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$ , que l'axe  $(O, z)$  soit vers le haut ou vers le bas !  $\dot{z}(t)$  est une fonction pouvant être positive ou négative, et le vecteur-vitesse sera donc automatiquement dans le bon sens, quel que soit le sens du vecteur  $\vec{e}_z$ . Il ne faut donc jamais chercher à écrire  $\vec{v} = -\dot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$ , même si votre intuition vous dit le contraire.

**Question 2 :** Soient deux points  $O$  et  $O'$  fixes l'un par rapport à l'autre dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Montrer que le vecteur-vitesse ne dépend pas, en coordonnées cartésiennes, du choix de l'origine du repère.

### Vecteur-accélération

On définit le **vecteur-accélération**  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  d'un point  $M$  dans un repère  $\mathcal{R}$  à partir de son vecteur-position  $\vec{OM}$  ou de son vecteur-vitesse  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left. \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

**Question 3 :** Exprimer  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  en fonction de  $a_x \triangleq \ddot{x}$ ,  $a_y \triangleq \ddot{y}$  et  $a_z \triangleq \ddot{z}$ .

### Vecteur-accélération en coordonnées cartésiennes

Le vecteur-accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \ddot{x}(t) \cdot \vec{e}_x + \ddot{y}(t) \cdot \vec{e}_y + \ddot{z}(t) \cdot \vec{e}_z$$

☛ *Remarque :* Même remarque que pour le vecteur-vitesse : on n'a jamais  $\vec{a} = -\ddot{z}(t) \cdot \vec{e}_z \dots$

## 1.2 Actions, interactions et forces

### 1.2.1 Les interactions fondamentales

#### Les interactions fondamentales

On dit que deux systèmes interagissent quand ils exercent une influence l'un sur l'autre. L'ensemble des phénomènes observés en physique font intervenir quatre types d'interactions fondamentales, a priori très différentes.

Les deux interactions les plus connues et immédiatement perceptibles sont :

- la gravitation qu'exerce et ressent tout système physique. C'est elle qui est notamment responsable du champ de pesanteur terrestre et du mouvement des planètes. Elle joue un rôle très important en astrophysique, où elle domine dans de nombreuses situations ;
- l'interaction électromagnétique qui n'existe qu'entre des objets chargés électriquement ou aimantés. C'est elle qui est responsable de la cohésion des atomes et molécules mais aussi de tous les processus chimiques.

Il existe toutefois deux autres interactions plus complexes et se manifestant de façon moins évidente :

- l'interaction (nucléaire) faible qui est responsable de certains types de radioactivité et dont il a été montré dans les années 1960–1970 qu'elle formait avec l'interaction électromagnétique deux facettes d'une seule et même interaction plus fondamentale, l'interaction électrofaible ;
- l'interaction de couleur qui s'exerce entre quarks et qui explique l'interaction (nucléaire) forte, responsable de la cohésion des noyaux atomiques.

Les deux premières interactions sont de portées illimitées : tous objets de l'Univers sont en interaction gravitationnelle, voire électromagnétique s'ils sont chargés. Les interactions faible et de couleur sont cependant de portées limitées, ne dépassant pas la taille du noyau d'un atome.

### 1.2.2 Des interactions aux forces

#### Action mécanique et force

On appelle action mécanique toute action, exercée par un système extérieur et pouvant modifier, provoquer ou empêcher le mouvement d'un objet.

Une action mécanique exercée sur un point matériel est modélisée par un vecteur-force : sa norme correspond à l'intensité de la force, sa direction et son sens traduisent ceux de l'action. L'unité du Système International pour la force est le newton N.

#### Principe des interactions (ou d'action-réaction, ou troisième loi de Newton)

Si deux points  $A$  et  $B$  sont en interaction, alors la force exercée par  $A$  sur  $B$  s'oppose à celle exercée par  $B$  sur  $A$ . Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

**Question 4 :** Que peut-on en conclure sur les normes des deux forces ?

### 1.2.3 Exemples de forces

#### Poids

##### Poids

Au voisinage de la Terre, un corps subit une force appelée **poids** (noté  $\vec{P}$ ), qui est proportionnelle à sa masse :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

où  $\vec{g}$  est le **champ de pesanteur**, vertical et orienté vers le bas.

On considère généralement  $\vec{g}$  uniforme, de norme  $g = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Son origine principale est l'attraction gravitationnelle de la Terre.

#### Force de rappel d'un ressort

##### Force de rappel d'un ressort

Un ressort linéaire est caractérisé par sa longueur au repos  $\ell_0$  et sa constante de raideur  $k$ . Dans le modèle idéal, il est de masse négligeable et toute variation de sa longueur  $\ell$  produit sur chacune de ses extrémités la force :

$$\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \cdot \vec{e}_{r \rightarrow p}$$

où  $\vec{e}_{r \rightarrow p}$  est le vecteur unitaire de la direction du ressort, orienté du ressort vers le point d'attache considéré.

☛ *Remarque :* Il faut à tout prix retenir ce qu'est  $\vec{e}_{r \rightarrow p}$  : s'il y a une erreur de signe, l'équation du mouvement sera fautive !

☛ *Remarque :* Dans la parenthèse, il s'agit bien de  $\ell - \ell_0$ , avec  $\ell$  la longueur du ressort. Pour un bon nombre d'exercices,  $\ell$  sera souvent assimilée à la position d'une extrémité du ressort (par exemple, figure 1.2) ; cependant, ce n'est pas toujours le cas, et remplacer  $\ell$  par  $x(t)$  sans y réfléchir davantage est une erreur courante qui coûte beaucoup de points !

**Question 5 :** Exprimer la force de rappel du ressort  $\vec{F}_r$  de la figure 1.2.

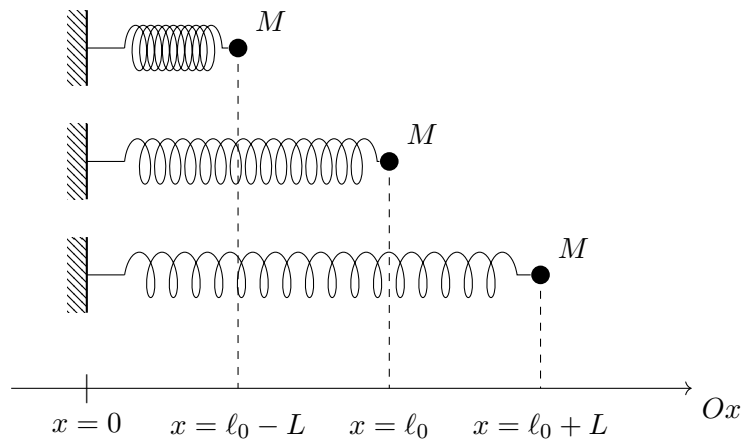
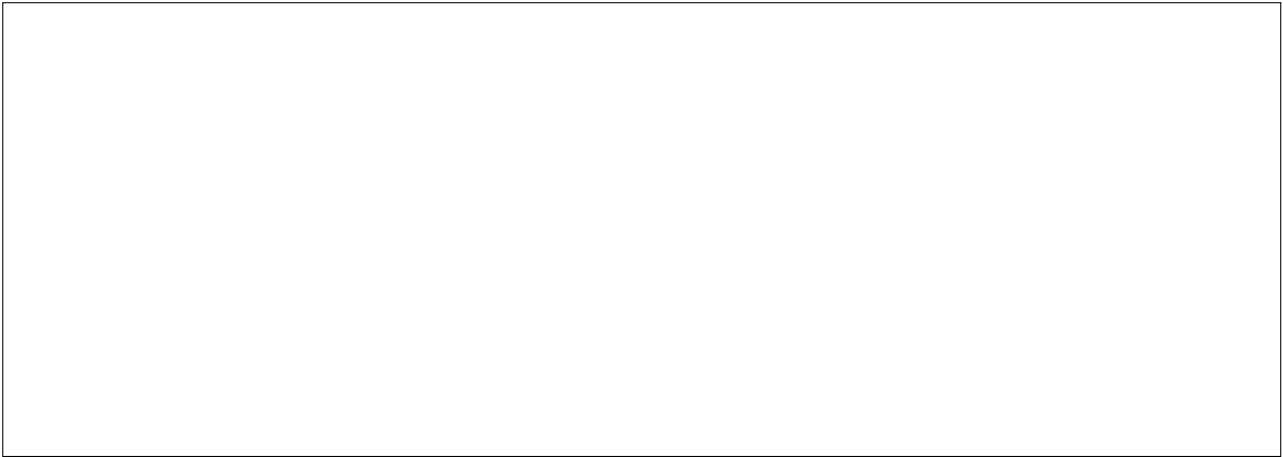


FIGURE 1.2 – Ressort comprimé (haut), au repos (milieu) et tendu (bas).

**Question 6 :** Représenter dans la figure 1.2 les forces en chacun des points d'attache du ressort si  $l < l_0$ ; si  $l = l_0$ ; si  $l > l_0$ .



### Force de réaction du support

#### Force de réaction du support

En l'absence de frottements entre un solide  $S$  et son support, la **réaction du support**  $\vec{R}$  est une force orthogonale au support et orientée du support vers le solide :

$$\vec{R} = R \cdot \vec{n}_{\text{support} \rightarrow S}$$

Sa norme  $R$  est *a priori* inconnue.



## Force de frottements fluides

### Force de frottements fluides (ou visqueux)

Quand un solide  $S$  est en mouvement dans un fluide, celui-ci exerce une **force de frottements fluides** (ou **force de frottements visqueux**) de sens opposé au vecteur-vitesse de  $S$ . Pour une vitesse suffisamment faible, la norme est proportionnelle à celle de la vitesse :

$$\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}(S)$$

☛ *Remarque* : Pour les vitesses très élevées, on a  $\vec{f} = -\alpha \|\vec{v}(S)\| \cdot \vec{v}(S)$  (donc de norme  $\alpha \times v(S)^2$ ).

## 1.3 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

### 1.3.1 Énoncé

#### ♥ Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Pour un point matériel  $M$  de masse constante  $m$  se déplaçant à l'accélération  $\vec{a}(M/\mathcal{R})$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , soumis à des forces extérieures de somme  $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ , le principe fondamental de la dynamique (PFD) peut se simplifier en :

$$m \cdot \vec{a}(M/\mathcal{R}) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

☛ *Remarque* : Il est primordial d'avoir un référentiel galiléen pour vérifier cette relation. Prenons l'exemple d'un trajet en voiture : si l'on avance à vitesse constante, quitte à négliger les frottements, on ne subira pas les mêmes forces dans sur une ligne droite ou dans un virage. Ce dernier cas fait intervenir des forces d'inertie, qui ne sont pas au programme d'ATS.

**Question 7** : Donner la dimension d'une force en fonction des dimensions fondamentales (ici : longueur, masse, temps).

Le PFD est une équation tridimensionnelle (selon trois directions de l'espace), donnant donc trois équations.

Lors d'un mouvement unidirectionnel, la projection du PFD selon la direction du mouvement donnera systématiquement l'équation du mouvement, tout comme le TPM. Ainsi, le TPM et le PFD semblent équivalents...

Il y a cependant des différences notables :

- Le mouvement peut ne pas être unidirectionnel : par exemple, un ballon de football aura une trajectoire parabolique, ce qui nécessite une étude sur deux directions différentes ;
- Le TPM ne peut fournir d'informations sur la direction orthogonale à celle du mouvement, alors que l'on peut projeter le PFD sur cette direction ;
- Le système peut être composé d'une multitude de points mobiles : on peut ainsi appliquer  $n$  PFD aux  $n$  points du système, ce qui permet d'obtenir suffisamment d'équations indépendantes afin de déterminer chaque position. Le TPM ne peut, quant à lui, s'appliquer qu'au système dans sa globalité.

### 1.3.2 Applications du PFD

Lorsque l'on veut étudier le couplage entre forces et mouvement d'un corps, on part quasi-systématiquement du PFD. Cependant, cela doit se faire en un certain nombre d'étapes :

1. On définit le système étudié ;
2. On choisit un référentiel (en s'assurant qu'on puisse le supposer galiléen, en ATS<sup>1</sup>) ;
3. On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au système dans le référentiel, et on exprime chacune des forces associées dans une base quelconque ;
4. Application mathématique du PFD.

#### Mouvement horizontal d'un point matériel entre deux ressorts

On considère le dispositif représenté sur le schéma ci-dessous. Le point  $A$  a une masse  $m_A$  et une abscisse  $x_A$  ; le point  $B$  a une masse  $m_B$  et une abscisse  $x_B$ .

On néglige la pesanteur et la réaction du support, et on admet qu'une force de frottements fluides  $\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}(B)$  s'applique uniquement sur le point  $B$ .

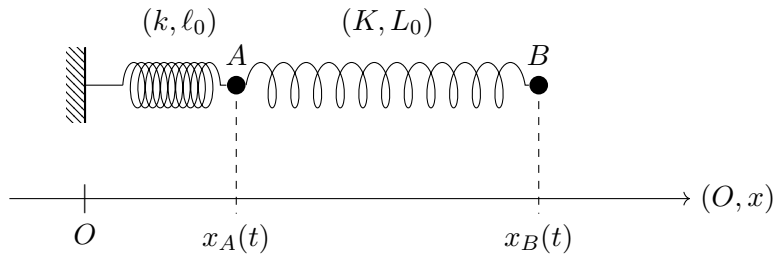


FIGURE 1.3 – Position des ressorts à un instant quelconque.

**Question 8 :** Déterminer les longueurs  $\ell_g$  et  $\ell_d$  des ressorts de gauche et de droite. Déterminer également les accélérations des points  $A$  et  $B$ .

**Question 9 :** Faire le bilan des actions mécaniques s'appliquant sur le point  $A$ . Les exprimer explicitement en fonction des données de l'énoncé.

1. La plupart du temps, il suffit de dire que la durée d'étude est « suffisamment courte » pour négliger les effets non-galiléens.

**Question 10 :** En appliquant le PFD, déterminer l'équation du mouvement du point  $A$ .

**Question 11 :** Faire le BAME appliquées au point  $B$  et déterminer également l'équation du mouvement de ce point.

### Déplacement d'un point matériel avec frottements fluides

Un skieur, assimilé à un point  $M$  de masse  $m$ , glisse le long d'une pente faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. En plus de son poids  $\vec{P}$ , le skieur subit une force de frottements fluides  $\vec{f} = -\lambda \cdot \vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est son vecteur-vitesse (voir figure 1.4).

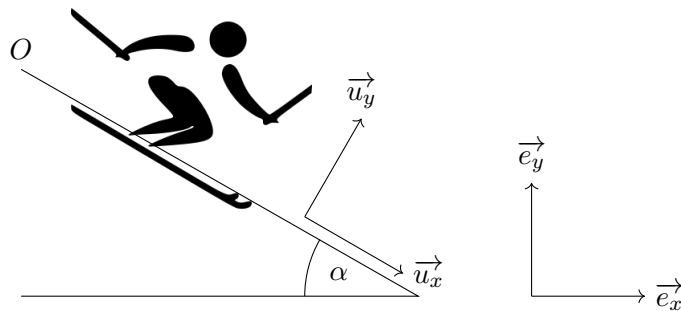


FIGURE 1.4 – Descente d'un skieur sur une piste.


La base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  est celle liée à l'horizontalité et à la verticalité locale ; la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  est celle liée à la pente.

$O$  est l'origine du repère, située en haut de la pente. Elle correspond à la position initiale du skieur, qui y possède une vitesse nulle. On note  $x(t)$  la position du skieur selon la pente :  $\vec{OM} = x(t)\vec{u}_x$ .

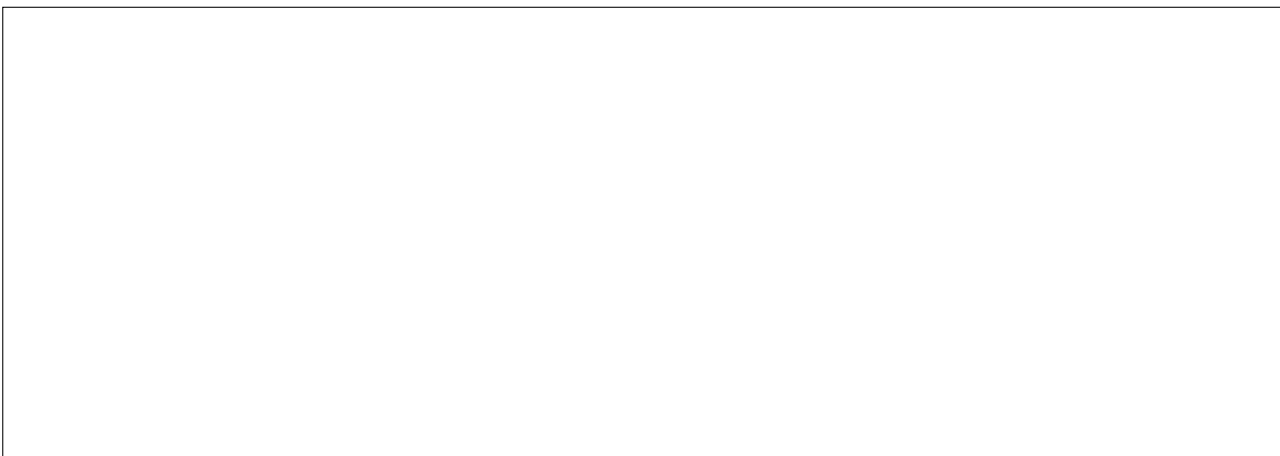
**Question 12 :** Effectuer le BAME appliquées au skieur, en les exprimant dans les bases pertinentes. Faire apparaître les vecteurs sur la figure 1.4, sans se soucier de l'échelle.



**Question 13 :** Dessiner la figure de changement de base entre les bases  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  et  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . En déduire l'expression de  $\vec{e}_y$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .



**Question 14 :** Exprimer l'accélération du skieur  $\vec{a}(M)$  dans la base adaptée. Appliquer le PFD au skieur ; en déduire l'équation du mouvement en projetant selon  $\vec{u}_x$ .



**Question 15 :** Déterminer la vitesse  $v(t)$  du skieur en fonction de  $v_{\text{éq}} \triangleq \frac{mg}{\lambda} \sin(\alpha)$  et  $\tau \triangleq \frac{m}{\lambda}$ . On utilisera la condition initiale sur la vitesse.

**Question 16 :** Que nous apprend la projection du PFD selon  $\vec{u}_y$  ?

## Outils mathématiques

### Le produit scalaire et la norme

Le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  et  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  s'écrit  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , et est égal par définition à  $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$ . On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est égal à 0.

La norme d'un vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  se note  $\|\vec{u}\|$ , et est égale par définition à  $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ .

On dit qu'un vecteur est unitaire si sa norme est égale à 1.

À partir de cette définition de la norme, on peut déterminer une deuxième expression pour le produit scalaire de deux vecteurs :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .

### La dérivée d'un vecteur et d'un produit scalaire

La dérivée d'un vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  exprimé dans une base  $\mathcal{B}$  indépendante du temps revient à dériver

chacune des composantes :  $\frac{d\vec{u}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ .

Dériver un produit scalaire revient à utiliser la règle du produit classique :  $\frac{d(\vec{u} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$

### Questions de cours

**À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...**

- Énoncer le principe des actions réciproques.
- Énoncer le principe fondamental de la dynamique ainsi que ses conditions d'application.
- Donner l'équation du mouvement d'un système masse-ressort horizontal à l'aide du PFD.
- Déterminer l'équation horaire d'un point matériel chutant dans le champ de pesanteur avec frottements à l'aide du PFD.

# Chapitre 2 : Rotation d'un solide [HP]

## 📌 Objectifs :

— Lier les notions de mécanique vues en physique et en génie mécanique.

✍️ **Au concours ATS :**  $\emptyset$ .

## 2.1 Moment cinétique

### 2.1.1 Moment cinétique d'un point matériel

#### Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point

Soit un point  $O$  fixe dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . Le **moment cinétique** d'un point matériel  $A$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}(A)$  **par rapport à un point**  $O$  est :

$$\vec{L}_O(A) = \vec{OA} \wedge m\vec{v}(A)$$

👉 *Remarque :* Le moment cinétique est un vecteur représente « à quelle intensité » le point  $A$  tourne autour du point  $O$  : il est grand si le point  $A$  a une grande masse et une grande vitesse, et d'autant plus si le point  $A$  est éloigné de  $O$ . Par ailleurs, le sens et la direction du moment cinétique indiquent, à l'aide de la règle de la main droite, autour de quel axe le point  $A$  tourne (voir figure 2.1).

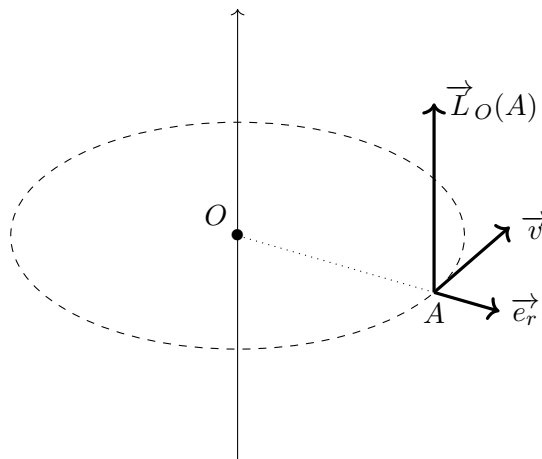


FIGURE 2.1 – Mouvement du point  $A$  autour de l'axe  $\Delta$  et son moment cinétique  $\vec{L}_O(A)$ . Le vecteur radial unitaire  $\vec{e}_r$  est colinéaire et de même sens que  $\vec{OA}$ ; le vecteur orthoradial unitaire  $\vec{e}_\theta$  est colinéaire et de même sens que  $\vec{v}$ .

**Question 1 :** Quelle est l'unité du moment cinétique dans le système international ?

**Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un axe orienté**

Le **moment cinétique** de  $A$  **par rapport à un axe**  $\Delta$  passant par  $O$  et de vecteur unitaire  $\vec{e}_\Delta$  est la projection de  $\vec{L}_O(A/\mathcal{R})$  sur  $\Delta$  :

$$L_\Delta(A/\mathcal{R}) = \vec{L}_O(A/\mathcal{R}) \cdot \vec{e}_\Delta$$

**Produit mixte**

La grandeur  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$  est appelée **produit mixte** des vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$  ; on la note souvent  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ .

Elle possède une propriété de permutation :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

**Question 2** : En remarquant que le moment cinétique scalaire  $L_\Delta(A/\mathcal{R})$  est le résultat d'un produit mixte, montrer que cette grandeur ne dépend pas du point  $O$  choisi sur l'axe  $\Delta$ .



### 2.1.2 Moment cinétique d'un solide

Supposons qu'un solide  $S$  soit en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans  $\mathcal{R}$ . On note  $\omega \triangleq \dot{\theta}$  sa vitesse angulaire autour de l'axe  $\Delta$ .

On s'intéresse à un point  $A$  quelconque de  $S$ . Ce point possède une masse infinitésimale  $\delta m$  et une vitesse  $\vec{v}(A)$  : son moment cinétique scalaire est donc  $\delta L(A) = (\vec{OA} \wedge \delta m \vec{v}(A)) \cdot \vec{e}_\Delta$ . On peut profiter d'une permutation du produit mixte pour montrer alors que :

$$\delta L(A) = (\vec{e}_\Delta \wedge \vec{OA}) \cdot \delta m \vec{v}(A)$$

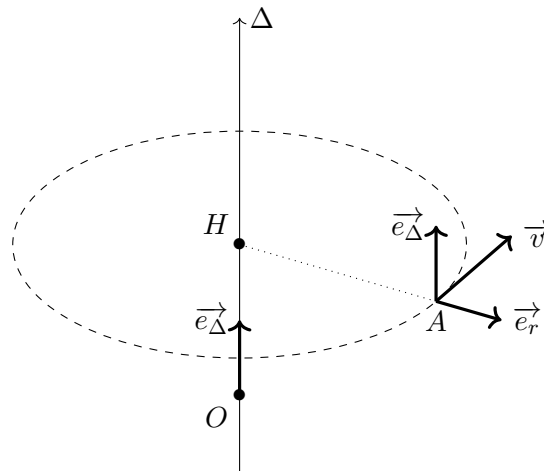


FIGURE 2.2 – Mouvement du point  $A$  autour de l'axe  $\Delta$ .  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur l'axe  $\Delta$ .

**Question 3 :** Montrer que  $\vec{e}_\Delta \wedge \vec{OA}$  a pour norme  $HA$  et pour vecteur directeur  $\vec{e}_\theta$ .

**Question 4 :** Exprimer  $\vec{v}(A/\mathcal{R})$  en fonction notamment de  $HA$ .

**Question 5 :** Montrer alors que  $\delta L(A/\mathcal{R}) = \delta m HA^2 \omega$ .

Le moment cinétique total du solide  $S$  est alors la somme des moments cinétiques infinitésimaux :

$$L_{\Delta}(S/\mathcal{R}) = \int_{A \in S} \delta L(A/\mathcal{R}) = \int_{A \in S} \delta m HA^2 \omega$$

#### Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Le moment cinétique d'un solide  $S$  en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe dans  $\mathcal{R}$  à la vitesse angulaire  $\omega$  est :

$$L_{\Delta}(S/\mathcal{R}) = J_{\Delta}(S) \omega$$

où  $J_{\Delta}(S)$ , le **moment d'inertie** de  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta$ . C'est une grandeur dépendant uniquement de la géométrie du solide et de sa répartition de masse par rapport à  $\Delta$ .

☛ *Remarque :* Le moment d'inertie correspond à  $\int_{A \in S} \delta m HA^2$ .

☛ *Remarque :* Le sens physique du moment d'inertie d'un solide correspond à l'inertie que possède ce solide face à la mise en rotation. Il est donc analogue à la masse pour une mise en translation.

**Question 6 :** Expliquer qualitativement pourquoi il est plus facile de faire tourner à la même vitesse angulaire  $\omega$  une fronde de longueur  $\ell = 50$  cm qu'une fronde de longueur  $\ell' = 1$  m.

## 2.2 Moment d'une force

### 2.2.1 Définitions et propriétés

#### Moment d'une force par rapport à un point

Le **moment d'une force**  $\vec{F}$  s'appliquant sur un point  $A$  **par rapport à un point**  $O$  est :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

☛ *Remarque* : Le moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un point  $O$  représente physiquement l'aptitude de cette force à faire tourner un système mécanique autour de ce point.

#### Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Le **moment d'une force**  $\vec{F}$  s'appliquant sur un point  $A$  **par rapport à un axe**  $\Delta$  passant par  $O$  et de vecteur unitaire  $\vec{e}_\Delta$  est la projection de  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{e}_\Delta$$

☛ *Remarque* : Comme précédemment,  $\mathcal{M}_\Delta$  ne dépend pas du choix du point  $O$  sur l'axe  $\Delta$ .

**Question 7** : On rappelle que  $\vec{e}_\Delta \wedge \vec{OA} = HA \cdot \vec{e}_\theta$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\Delta$ . Montrer que seule la projection  $F_\theta \triangleq \vec{F} \cdot \vec{e}_\theta$  intervient réellement dans le calcul du moment de  $\vec{F}$ .

#### Bras de levier

Pour une force  $\vec{F}$  dans un plan orthogonal à  $\Delta$ , le moment de  $\vec{F}$  par rapport à  $\Delta$  peut s'écrire :  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm d \times F$  où  $d$  est le **bras de levier**, représentant la distance entre le support de la force et l'axe  $\Delta$ .

Le signe du moment est positif si cette force tend à faire tourner  $A$  dans le sens positif autour de l'axe ; il est négatif sinon.

### 2.2.2 Couple

Prenons l'exemple d'une tige rigide de centre  $O$ . On considère deux points  $A$  et  $B$  situés à la même distance  $a$  de  $O$ . Deux forces  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  sont appliquées respectivement en  $A$  et en  $B$ ; ces vecteurs ont même norme  $F$ , sont orthogonales à la tige mais sont tout le temps opposées. Le référentiel d'étude sera supposé galiléen.

**Question 8 :** Faire un schéma de la situation en faisant apparaître l'axe de rotation  $\Delta$ .

**Question 9 :** Que vaut la résultante des forces? A-t-on pour autant un mouvement rectiligne uniforme?

**Question 10 :** Exprimer les moments  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_A)$  et  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_B)$ . Leur somme est-elle nulle?

#### Couple

Un **couple** est un ensemble de forces de résultante nulle, mais de moment total non-nul. Pour deux forces  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  opposées, orthogonales à l'axe de rotation  $\Delta$  et espacées d'une distance  $2a$ , le moment total est  $\mathcal{M}_{\text{couple}} = \pm 2aF$ .

#### Liaison pivot

Une **liaison pivot** est une liaison entre un bâti (fixe) et une pièce mobile, donnant à celle-ci un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ . S'il s'agit d'une liaison pivot parfaite, aucun moment n'est exercé selon l'axe  $\Delta$ . En réalité, des frottements viendront toujours s'opposer à la mise en rotation, tout comme les frottements s'opposent toujours à une mise en translation.

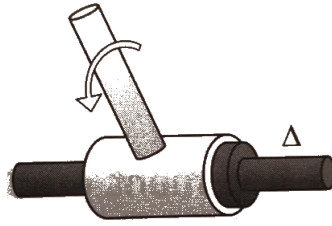


FIGURE 2.3 – Liaison pivot.

## 2.3 Théorème du moment cinétique

### 2.3.1 Démonstration et énoncé pour un point matériel

On étudie le mouvement d'un point  $A$  (masse  $m$ , vitesse  $\vec{v}(A)$ ) autour d'un centre  $O$ . On regroupe l'ensemble des forces s'exerçant sur le point  $A$  sous l'appellation  $\sum \vec{F}$ . Le référentiel d'étude est supposé galiléen.

**Question 11 :** Exprimer  $\vec{L}_O(A)$ , puis sa dérivée temporelle en fonction des données de l'énoncé.

**Question 12 :** En appliquant le PFD au point  $A$ , montrer qu'il existe un lien entre la dérivée temporelle du moment cinétique et la somme des moments des forces.

#### Théorème du moment cinétique pour un point matériel

Soit  $A$  un point matériel de moment cinétique  $L_\Delta(A)$  par rapport à un axe orienté  $\Delta$ . Le **théorème du moment cinétique** donne alors que :

$$\frac{dL_\Delta(A)}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{ext}})$$

☛ *Remarque :* Le théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel donnera toujours la même équation du mouvement que le PFD.

### 2.3.2 Énoncé pour un solide

#### Théorème du moment cinétique pour un point matériel

Soit  $S$  un solide de moment cinétique  $L_{\Delta}(S)$  par rapport à un axe orienté  $\Delta$ . Le **théorème du moment cinétique** donne alors que :

$$\frac{dL_{\Delta}(A)}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}})$$

On peut réécrire cette formule sous la forme :

$$J_{\Delta}(S) \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}})$$

où  $\omega$  est la vitesse angulaire du solide  $S$  autour de l'axe  $\Delta$ .

☛ *Remarque* : Alors que le théorème du moment cinétique relevait effectivement d'une démonstration pour l'étude d'un point matériel (et donnait donc la même équation du mouvement), il s'agit plutôt d'un principe pour un solide.

## Outils mathématiques

### Sur le produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  se note  $\vec{a} \wedge \vec{b}$ .

Il correspond à l'unique vecteur tel que  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  est orthogonal à  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , de norme  $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$  et la base  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  est directe.

En particulier, si  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont colinéaires, alors  $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ .

Pour une base directe  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  (ou  $(\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}, \vec{e}_z)$ ), on a :

- $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$  (ou  $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_{\theta} = \vec{e}_z$ );
- $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x$  (ou  $\vec{e}_{\theta} \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_r$ );
- $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$  (ou  $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_{\theta}$ ).

Les autres produits peuvent être retrouvés en utilisant la propriété d'antisymétrie :  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ .

### Sur le produit mixte

La grandeur  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$  est appelée produit mixte des vecteurs  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  et  $\vec{c}$ ; on la note souvent  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ . Elle possède une propriété de permutation :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

# Chapitre 3 : Régime sinusoïdal forcé d'un système mécanique

## 📌 Objectifs :

- Utiliser la notation complexe modélisant un signal sinusoïdal.
- Établir en régime forcé les expressions de la position et de la vitesse d'un mobile en mouvement rectiligne oscillant.
- Exploiter un spectre, analyser la réponse du système.

📌 **Au concours ATS** : Aux écrits en 2023, 2021, 2020, 2019, 2017. Tombe régulièrement aux oraux.

## 3.1 Décomposition d'un signal

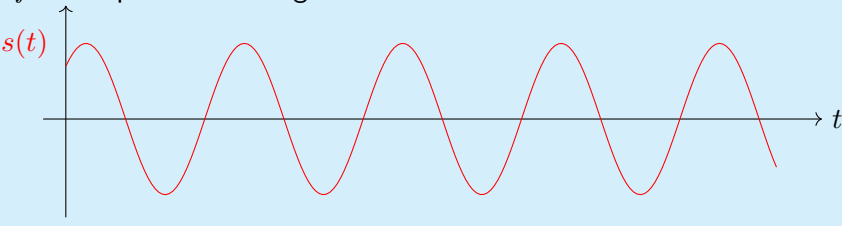
### 3.1.1 Pour un signal périodique

**Signal pur**

Un signal périodique est **pur** s'il peut être mis sous forme sinusoïdale :

$$s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$$

où  $\omega = 2\pi f$  est la pulsation du signal.



The graph shows a red sinusoidal wave oscillating around a horizontal axis labeled 't'. The vertical axis is labeled 's(t)'. The wave starts at a positive peak at t=0.

**Signal composé**

Un signal périodique est dit **composé** s'il ne peut pas être mis sous forme sinusoïdale.

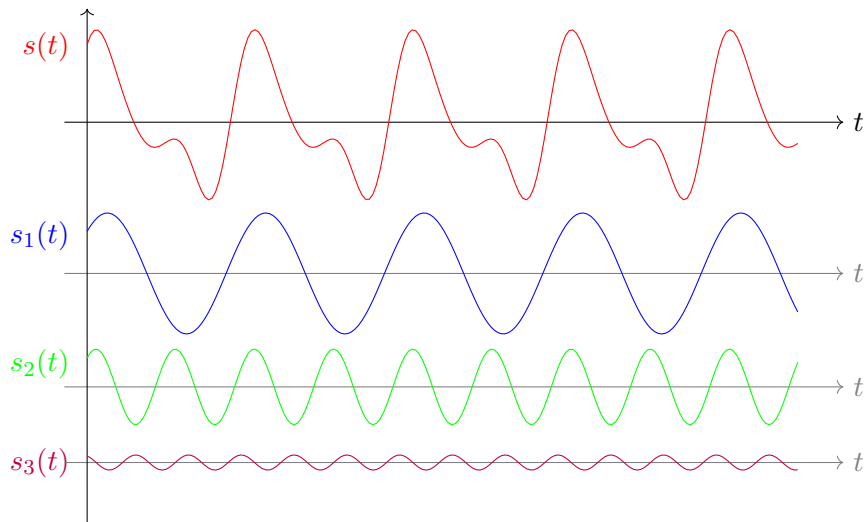


The graph shows a red periodic wave with a complex shape, oscillating around a horizontal axis labeled 't'. The vertical axis is labeled 's(t)'. The wave has multiple peaks and troughs within one period.

Une des découvertes majeures de Joseph Fourier (1738–1830), mathématicien et physicien français, a consisté à comprendre qu'un son périodique de fréquence  $f$  peut en fait se « décomposer » en une somme de sons purs de fréquences respectives  $f, 2 \times f, 3 \times f$ , etc. C'est ce que l'on appelle l'analyse de Fourier, qui a ouvert tout un pan des mathématiques, et a permis à Fourier de résoudre des problèmes sur le transport de la chaleur.

Par exemple, on peut analyser mathématiquement le signal composé précédent, et s'apercevoir qu'il s'agit en fait d'une somme de trois signaux purs (figure 3.1).

Dans la figure 3.1, on a donc  $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$  avec chaque  $s_n(t)$  de la forme  $s_n(t) = S_n \cos(n \times \omega t + \varphi_n)$ , où  $\omega$  est la pulsation de  $s(t)$ .

FIGURE 3.1 – Décomposition du signal  $s(t)$  en somme de signaux sinusoïdaux.

### Décomposition en série de Fourier

Soit un signal périodique  $s(t)$  de pulsation  $\omega$ . On peut décomposer ce signal en une somme, potentiellement infinie, de signaux sinusoïdaux :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

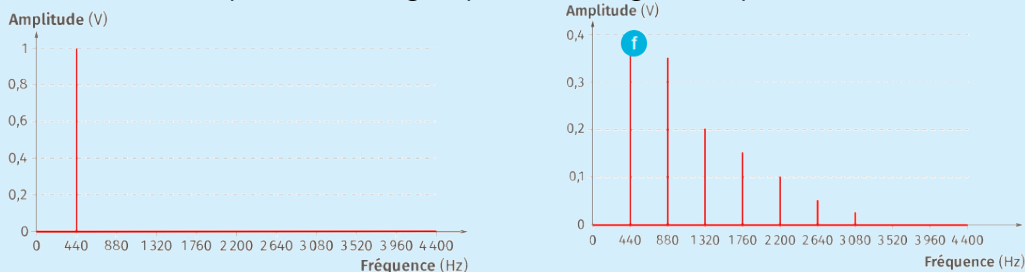
où  $S_0$  est la **valeur moyenne** de  $s(t)$ . Cette décomposition se nomme **décomposition en série de Fourier**, et la suite des  $(S_n)$  est la suite des **coefficients de Fourier** du signal  $s(t)$ .

### Spectre de Fourier, fondamental et harmoniques

Le **spectre** d'un signal périodique est la représentation graphique des différentes fréquences le constituant. Un trait vertical correspond à la présence d'une fréquence donnée par l'abscisse ; la longueur de ce trait correspond à l'amplitude de cette fréquence.

La raie présente à la pulsation  $\omega$  du signal correspond au **fondamental** ; les autres raies sont appelées **harmoniques** (la  $n$ -ième raie est l'harmonique de rang  $n$ ).

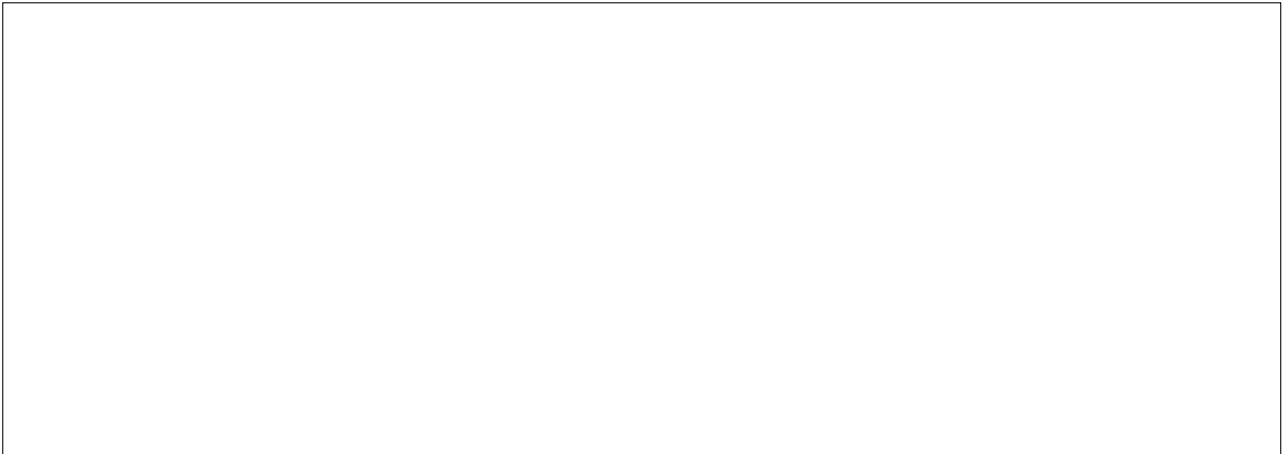
Ci-dessous sont les spectres d'un signal pur et d'un signal composé.



L'intérêt de pouvoir décomposer un signal périodique composé en signaux sinusoïdaux est de pouvoir simplifier l'étude du signal composé. En effet, si l'on sait comment réagit un système à une excitation sinusoïdale d'amplitude  $A$  et de pulsation  $\omega$ , il suffira d'additionner les réponses pour chacune des excitations afin d'obtenir la réponse totale du système.



**Question 1** : Tracer le spectre en amplitude du signal :  $e(t) = 3 \cos(\omega t) - 5 \cos(2\omega t) + \sin(4\omega t)$ .



### 3.1.2 Pour un signal non périodique

Si l'on pousse les mathématiques un peu plus loin, on peut démontrer que quasiment tous les signaux physiques peuvent se décomposer en sinusoïdes, qu'ils soient périodiques ou non.

Par exemple, une impulsion (voir figure 3.2) possède un spectre ; celui-ci est juste continu, à l'inverse du spectre de raies d'un signal périodique. La somme se transforme alors en :

$$s(t) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos(\omega t + \varphi_{\omega}) d\omega$$

où  $S(\omega)$  est la transformée de Fourier du signal  $s(t)$ .

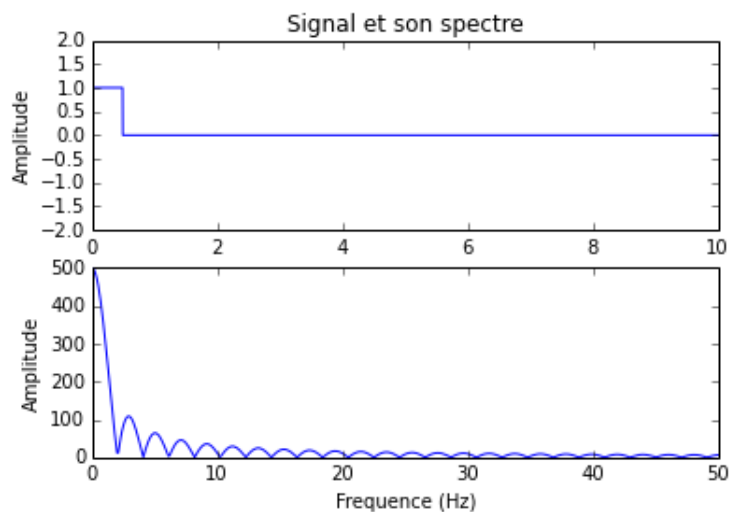


FIGURE 3.2 – Spectre d'une impulsion.

Ainsi, la décomposition d'une excitation en sinusoïdes permet toujours de revenir à la réponse totale du système, en sommant tout simplement les réponses pour chacune des fréquences concernées.

### 3.2 Position du problème

On s'intéresse à un système masse-ressort composé d'une masse  $m$ , modélisée par un point matériel  $M$ , liée à un point  $O$  fixe par un ressort de longueur à vide  $\ell_0$  et de constante de raideur  $k$ . On note  $x(t)$  la position du point  $M$  au cours du temps. Des frottements fluides de coefficient  $\lambda$  s'opposent au mouvement du point  $M$ .

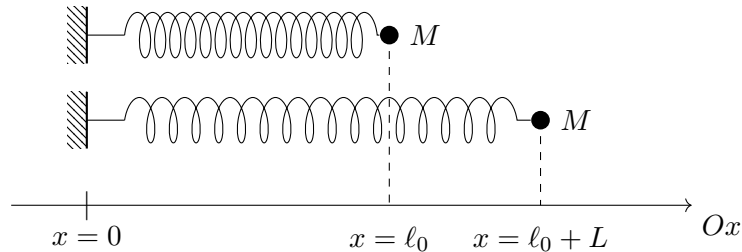


FIGURE 3.3 – Ressort au repos (haut) et tendu (bas).

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des systèmes mécaniques dont l'excitation extérieure<sup>1</sup> était constante (par exemple, le poids). Or, il existe des systèmes mécaniques étant soumis à une excitation périodique : vibration des cordes vocales à une pulsation  $\Omega$  donnée, mouvement d'une éolienne...

Cette excitation extérieure périodique  $e(t)$  peut être décomposée, par le théorème de Fourier, en une multitude de signaux sinusoïdaux  $e_1(t) = E_1 \cos(\Omega t + \phi_1)$ ,  $e_2(t) = E_2 \cos(2\Omega t + \phi_2)$ , et ainsi de suite. Lorsque l'équation régissant le mouvement d'un système est linéaire<sup>2</sup>, on peut alors s'intéresser à chacune des harmoniques  $e_n(t)$ , déterminer la solution  $x_n(t)$  associée, puis retrouver la solution totale  $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ .

Le **régime sinusoïdal forcé** correspond alors au cas où l'excitation mécanique extérieure impose une périodicité sinusoïdale au système :  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ .

Tout comme les études précédentes, l'évolution des grandeurs mécaniques se fait en deux étapes : un régime transitoire, qui disparaît au bout d'un temps caractéristique  $\Delta t$ , et un régime permanent. Dans cette partie, nous allons négliger toute étude du régime transitoire, et uniquement nous intéresser à la solution particulière que constitue le régime permanent.

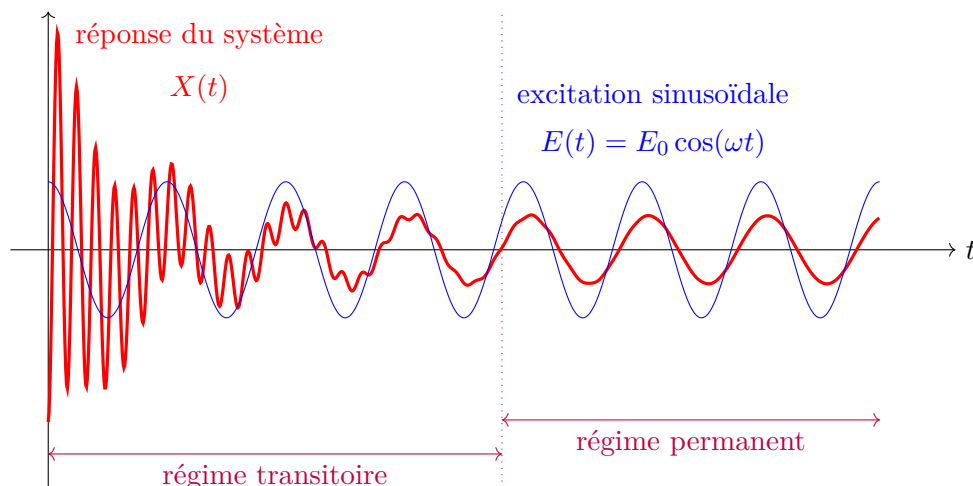


FIGURE 3.4 – Régime transitoire et régime permanent en régime sinusoïdal forcé. On observe que la réponse du système possède la même fréquence que l'excitation extérieure, en régime permanent, mais pas forcément la même amplitude, et elle peut également avoir un retard.

1. C'est-à-dire l'action mécanique extérieure à l'origine du mouvement.  
2. C'est-à-dire ne faisant intervenir que des grandeurs du type  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ , et pas de  $\sqrt{x}$  ou  $\exp(\dot{x})$  par exemple.

On suppose dans ce problème que l'excitation extérieure est une force  $\vec{F}(t) = F_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ .

**Question 2 :** Faire un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au point  $M$ .

**Question 3 :** Appliquer le PFD au point  $M$  dans le référentiel du laboratoire pour déterminer une équation différentielle à mettre sous la forme :  $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2(x - \ell_0) = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$ . Donner les expressions de  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $E_0$ .

On pose  $X(t) = x(t) - \ell_0$ . On a alors  $\dot{X} = \dot{x}$  et  $\ddot{X} = \ddot{x}$ , ce qui nous donne l'équation différentielle :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$$

Puisque l'excitation (terme de droite de l'équation différentielle) est sinusoïdale, on aura une réponse sinusoïdale pour  $X(t)$  en régime permanent. En particulier,  $X(t)$  oscillera à la même fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  que l'excitation. On écrit alors  $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$  avec  $X_0$  et  $\varphi$  deux inconnues à déterminer.

### 3.3 Notation complexe

En régime sinusoïdal forcé permanent, toutes les grandeurs sont de la forme  $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , où  $\omega$  est la pulsation imposée par le générateur.

#### Représentation complexe d'un signal

On associe à un signal réel  $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$  excité à la pulsation  $\omega$  une grandeur complexe  $\underline{x}(t)$ , définie par :

$$\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On peut passer de l'écriture complexe à l'écriture réelle par la formule  $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$ .

Pour simplifier davantage l'écriture, on utilise la propriété  $e^{a+b} = e^a e^b$  qui nous permet d'écrire :

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$$

avec  $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}$ .

$X_0$  est l'**amplitude réelle** du signal,  $\varphi$  sa **phase** et  $\underline{X}_0$  son **amplitude complexe**.

**Question 4** : Exprimer  $X_0$  et  $\varphi$  en fonction de  $\underline{X}_0$  et d'opérateurs agissant sur les nombres complexes.

#### Module et argument d'un signal complexe

Soit un signal réel  $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$  auquel on associe un signal complexe  $\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$ . On a alors :

$$X_0 = |\underline{X}_0| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{X}_0)$$

**Question 5** : Donner une expression de  $\frac{d\underline{x}}{dt}(t)$  en fonction de  $\omega$  et  $\underline{x}(t)$ . De même, donner une expression de  $\int \underline{x}(t) dt$  en fonction de  $\omega$  et  $\underline{x}(t)$ .

## Opérations sur les grandeurs complexes

- Dériver  $n$  fois un signal  $x(t)$  correspond à le multiplier par  $(j\omega)^n$ . En particulier :

$$\frac{dx}{dt}(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} j\omega \times \underline{x}(t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) \xrightarrow{\mathbb{C}} (j\omega)^2 \times \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$$

- Intégrer  $n$  fois un signal  $x(t)$  correspond à le diviser par  $(j\omega)^n$ . En particulier :

$$\int x(t)dt \xrightarrow{\mathbb{C}} \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}$$

**Question 6** : En passant à la notation complexe, montrer que l'on a  
 $\left(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) \underline{X}_0 e^{j\omega t} = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t}$ .

## Écriture complexe d'une équation différentielle

Soit une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$$

En utilisant la notation complexe, on se rapporte alors à l'équation :

$$\left(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) \underline{X}_0 = \omega_0^2 E_0$$

### 3.4 Résolution de l'équation du mouvement

**Question 7 :** Dédurre de la équation du mouvement complexe une expression de  $\underline{X}_0$ . Que vaut alors  $X_0$  ?

**Question 8 :** Donner les expressions possibles de  $\varphi$  selon la valeur de  $\omega$ .

☛ *Remarque :* Nous avons seulement déterminé ici l'expression de la position et de la vitesse en régime permanent. Le régime transitoire s'établit avec facilité : il s'agissait des solutions non constantes abordées dans le premier thème (mathématiquement : les solutions de l'équation homogène). Comme précisé précédemment, lorsqu'on étudie le régime sinusoïdal forcé, on ne s'intéresse généralement pas au régime transitoire permettant d'y accéder.

### Complément : pourquoi la notation complexe fonctionne-t-elle ?

Comment justifier rigoureusement le fait qu'une équation du type :

$$\frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX(t)}{dt} + \omega_0^2 X(t) = \omega_0^2 E \cos(\omega t)$$

puisse se « transformer » en :

$$\frac{d^2 \underline{X}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{X}(t)}{dt} + \omega_0^2 \underline{X} = \omega_0^2 E e^{j\omega t}$$

avec  $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$  et  $\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$  ? En d'autres termes, comment justifier que l'équation différentielle complexe est tout aussi valable que l'équation différentielle réelle ?

Notons  $\underline{X}^*(t) = X_0 e^{-j(\omega t + \varphi)}$  le complexe conjugué de  $\underline{X}(t)$ . On a donc  $X(t) = \frac{\underline{X}(t) + \underline{X}^*(t)}{2}$  et  $E \cos(\omega t) = E \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ . Ainsi, l'équation différentielle de départ peut se réécrire, en multipliant par 2 :

$$\frac{d^2 \underline{X}(t)}{dt^2} + \frac{d^2 \underline{X}^*(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \left[ \frac{d\underline{X}(t)}{dt} + \frac{d\underline{X}^*(t)}{dt} \right] + \omega_0^2 [\underline{X}(t) + \underline{X}^*(t)] = \omega_0^2 E [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}]$$

Or  $\underline{X}(t) = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$  et  $\underline{X}^*(t) = X_0 e^{-j\varphi} e^{-j\omega t} = \underline{X}_0^* e^{-j\omega t}$ . Une propriété mathématique<sup>3</sup> permet alors de dire que si l'on a  $a_1 e^{j\omega t} + a_2 e^{-j\omega t} = b_1 e^{j\omega t} + b_2 e^{-j\omega t}$ , alors  $a_1 = b_1$  et  $a_2 = b_2$ . Nécessairement, on en déduit les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \underline{X}(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{X}(t)}{dt} + \omega_0^2 \underline{X} &= \omega_0^2 E e^{j\omega t} \\ \frac{d^2 \underline{X}^*(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{X}^*(t)}{dt} + \omega_0^2 \underline{X}^* &= \omega_0^2 E e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

Ces deux équations reflètent en réalité la même chose : si l'on applique la transformation « complexe conjugué » à la deuxième équation, on retombe en fait sur la première. Ainsi, l'équation différentielle réelle implique nécessairement l'équation différentielle complexe :  $\mathbf{ED}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbf{ED}_{\mathbb{C}}$ .

Par ailleurs, on peut prendre la partie réelle de l'équation différentielle complexe, qui redonne l'équation différentielle réelle :  $\mathbf{ED}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \mathbf{ED}_{\mathbb{R}}$ .

On a finalement l'équivalence entre les deux équations différentielles :  $\mathbf{ED}_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \mathbf{ED}_{\mathbb{C}}$ .

## Outils mathématiques

$$\left| \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{\underline{c}} \right| = \frac{|\underline{a}| \times |\underline{b}|}{|\underline{c}|}$$

$$\arg \left( \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{\underline{c}} \right) = \arg \underline{a} + \arg \underline{b} - \arg \underline{c}$$

$$\arg(x + iy) = \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \text{ si } x > 0$$

$$\arg(x + iy) = \pi + \arctan \left( \frac{y}{x} \right) \text{ si } x < 0$$

## Questions de cours

**À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...**

- Soit le signal réel  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$ . Donner l'expression du signal complexe  $\underline{u}(t)$ ; expliciter notamment son amplitude complexe  $\underline{U}$ .
- Démontrer que dériver un signal réel correspond à multiplier le signal complexe correspondant par  $j\omega$ .
- Déterminer la solution de  $5\dot{u} + \frac{1}{\tau}u = 3 \cos(\omega t)$  en régime permanent.

3. Il s'agit, rigoureusement, du fait que les fonctions  $t \mapsto e^{j\omega t}$  et  $t \mapsto e^{-j\omega t}$  forment une famille libre : vous verrez cette propriété plus tard dans l'année en mathématiques.

# Chapitre 4 : Diagrammes de Bode [ $\approx$ HP]

## 📌 Objectifs :

- Simplifier et interpréter les solutions dans les cas limites basses fréquences et hautes fréquences ; tracer des diagrammes asymptotiques fréquentiels.

✍ Au concours ATS :  $\emptyset$ .

## 4.1 Fonction de transfert

Soit un système masse-ressort amorti et forcé, dont l'équation du mouvement est  $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \times E_0 \cos(\omega_0 t)$ .

On rappelle que, si l'on utilise la notation complexe, on a alors  $\left(-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2\right) \underline{X}_0 = \omega_0^2 E_0$  avec  $\underline{X}_0$  l'amplitude complexe de  $x(t)$ .

### Fonction de transfert

Une **fonction de transfert**  $\underline{H}$  correspond au rapport entre le signal de sortie et le signal d'entrée d'un filtre :

$$\underline{H} = \frac{s}{e}$$

**Question 1** : Quelle est la grandeur d'entrée pour le système masse-ressort amorti ? Et la grandeur de sortie ? En déduire l'expression de la fonction de transfert.

**Question 2** : À quoi est équivalente la fonction de transfert quand  $\omega \rightarrow 0$  ? Et quand  $\omega \rightarrow \infty$  ? En déduire pourquoi ce système peut être qualifié de « passe-bas ».



## Gain et phase induite d'un système

On peut estimer le **gain en amplitude**  $G = \frac{\text{amplitude de sortie}}{\text{amplitude d'entrée}}$  et le **déphasage**  $\Delta\varphi = \varphi_{\text{sortie}} - \varphi_{\text{entrée}}$  entre l'entrée et la sortie à partir de la fonction de transfert :

$$G = |\underline{H}| \qquad \Delta\varphi = \arg \underline{H}$$

On définit également le gain décibel  $G_{\text{dB}}$  par la formule :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log \underline{H} = 20 \log G$$

**Question 3 :** Pour  $\omega \ll \omega_0$ , exprimer  $G_{\text{dB}}(\omega)$ .

**Question 4 :** Pour  $\omega \gg \omega_0$ , exprimer  $G_{\text{dB}}(10 \times \omega)$  en fonction de  $G_{\text{dB}}(\omega)$ . Pourquoi peut-on dire que l'on a une pente de  $-40$  dB par décade ?

**Question 5 :** Exprimer  $G_{\text{dB}}(\omega_0)$ . Donner sa valeur si  $Q = 1/\sqrt{2}$ .

## 4.2 Diagrammes fréquentiels


### Diagrammes de Bode

Les **diagrammes de Bode** d'un filtre correspondent aux tracés du gain décibel et du déphasage en fonction de la pulsation  $\omega$ .

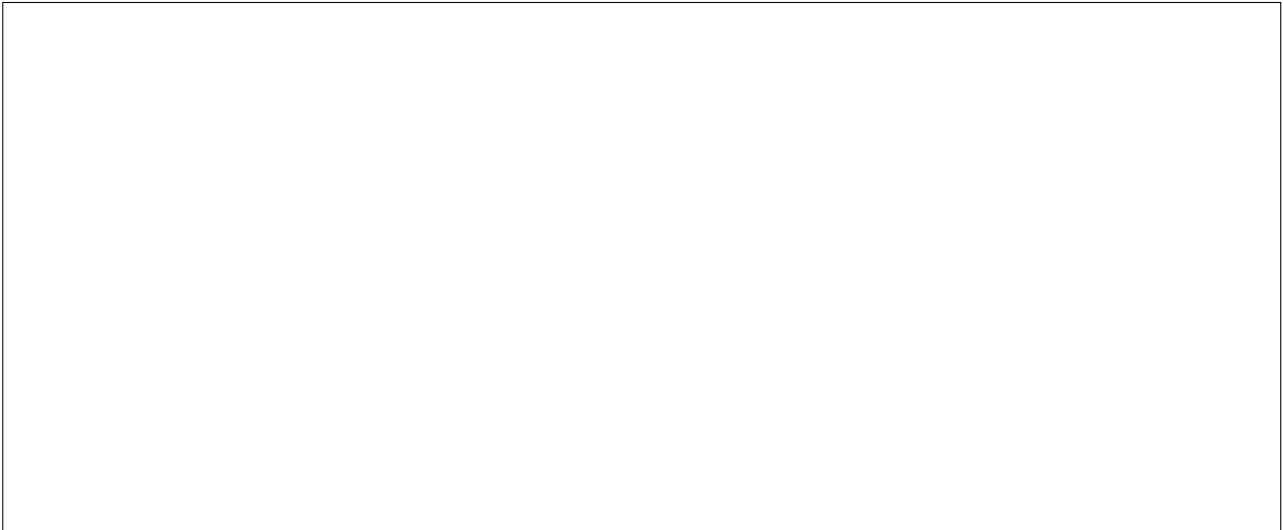
La particularité de ces diagrammes est d'avoir une échelle logarithmique pour les abscisses : l'écart entre  $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  est le même qu'entre  $10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ce changement d'échelle permet de visualiser les comportements à hautes et basses fréquences sans avoir une de ces régions "écrasées" à droite ou à gauche du graphe.

La région comprise entre  $10^n \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $10^{n+1} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  est appelée **décade**.

**Question 6 :** Donner l'équation du gain décibel pour  $\omega \gg \omega_0$ . Montrer qu'il s'agit de l'équation d'une droite, dans un diagramme de Bode. Pour quelle valeur de  $\omega$  a-t-on un gain décibel nul ?



**Question 7 :** Tracer l'allure du diagramme de Bode du système, en plaçant d'abord les asymptotes, puis le point  $G_{dB}(\omega_0)$ .



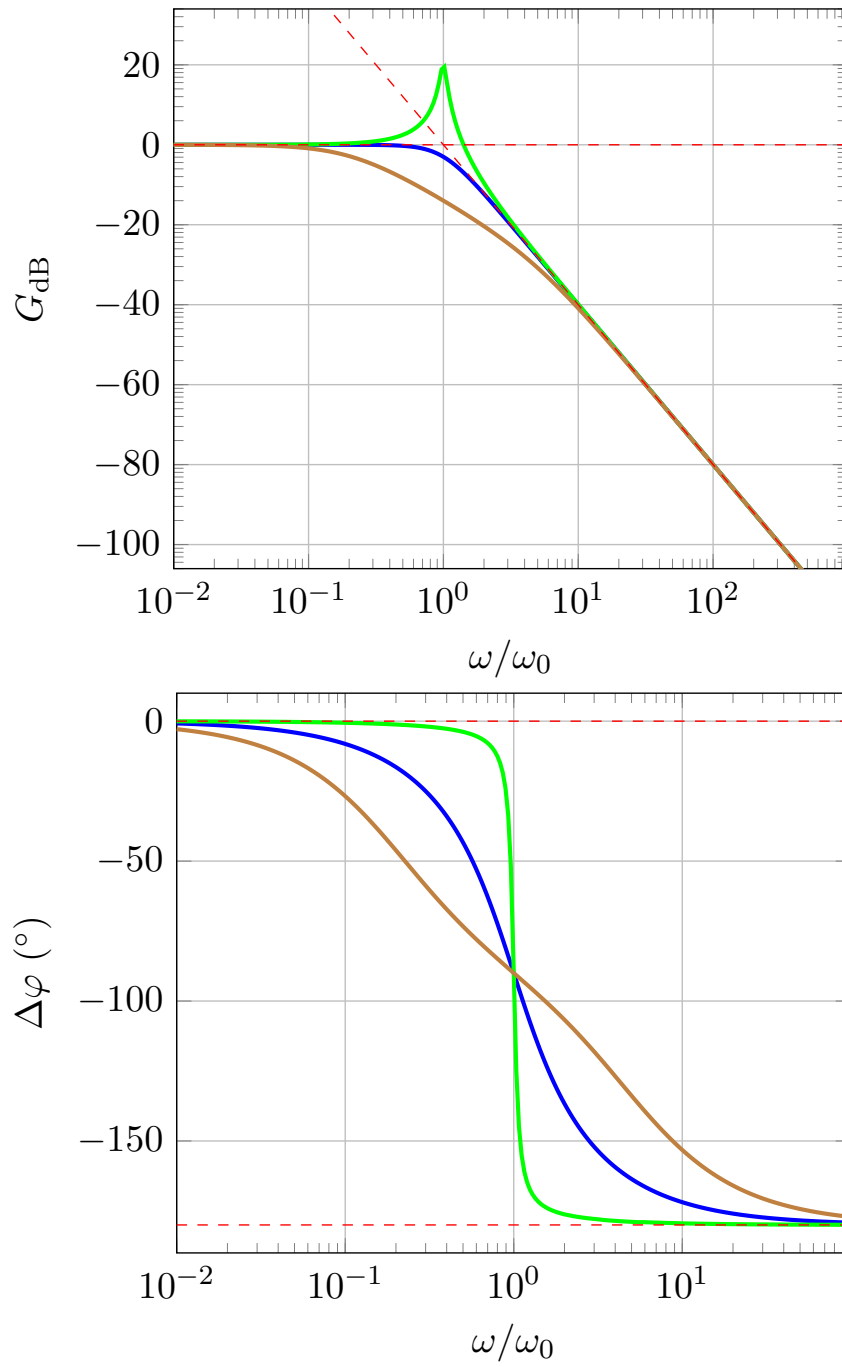


FIGURE 4.1 – Diagrammes de Bode en gain et en phase d'un filtre passe-bas d'ordre 2. Vert :  $Q = 10$ ; bleu  $Q = 1/\sqrt{2}$ ; marron :  $Q = 0,2$ .

**Question 8 :** Posons  $e(t) = \omega_0^2 F(t)$  l'excitation sinusoïdale d'entrée. On a  $e(t) = 2 \cos(0,3 \times t) - \cos(\omega_0 t) + 0,5 \times \sin(4\omega_0 t)$ . Déterminer  $s(t)$  à l'aide du diagramme de Bode de la figure 4.1, avec  $Q = 0,2$ .



# Chapitre 5 : Résonance d'un système mécanique

## 🎯 Objectifs :

- Établir la possibilité de l'existence d'une résonance en amplitude.
- Exploiter un spectre, analyser la réponse du système.

✍ **Au concours ATS** : Aux écrits en 2023, 2021, 2020, 2019, 2017. Tombe régulièrement aux oraux.

## 5.1 Premières observations



On observe le déplacement vertical d'une masselotte dans de l'eau. Ce déplacement est forcé par un moteur qui excite le ressort relié à la masselotte. On peut régler la fréquence d'excitation ainsi que le facteur de qualité (c'est-à-dire l'intensité des frottements fluides).

**Question 1** : On prend  $Q = 0,5$  et on augmente progressivement la fréquence. Qu'observe-t-on pour l'amplitude du déplacement ? Pour la phase du déplacement ?

**Question 2** : On prend  $Q = 2,5$  et on augmente progressivement la fréquence. Qu'observe-t-on pour l'amplitude du déplacement ? Pour la phase du déplacement ?

### Résonance

La **résonance** est une situation très générale dans laquelle l'excitation périodique d'un système à une fréquence  $\omega_r$  provoque une réponse de très forte amplitude.

## 5.2 Condition sur le facteur de qualité pour une résonance en position

Soit un système masse-ressort amorti et forcé, dont l'équation du mouvement est  $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \times E_0 \cos(\omega t)$ .

On rappelle que, si l'on utilise la notation complexe, on a alors  $\left(-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2\right)\underline{X_0} = \omega_0^2 E_0$  avec  $\underline{X_0}$  l'amplitude complexe de  $x(t)$ .

**Question 3 :** Exprimer l'amplitude réelle  $|\underline{X_0}|$ ; montrer que l'on peut l'écrire sous la forme  $|\underline{X_0}| = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{u(\omega)}}$  où  $u(\omega)$  est une fonction à déterminer.

**Question 4 :** Si l'amplitude est maximale, que peut-on dire de  $u(\omega)$ ? De sa dérivée par rapport à  $\omega$ ?

**Question 5 :** Exprimer explicitement  $u(\omega)$  en tant que somme de monômes. En déduire l'expression de sa dérivée, et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme  $\frac{du}{d\omega} = 4\omega(\omega^2 + a)$  où  $a$  est une constante dont l'expression est à déterminer.

**Question 6 :** Expliquer physiquement pourquoi  $\omega = 0$  ne peut pas mener à un phénomène de résonance.

**Question 7 :** Montrer que le signe de  $a$  ne dépend que de la valeur de  $Q$ . Quelle condition sur  $Q$  doit-on poser pour que  $\omega^2 + a = 0$  possède des solutions ?

**Résonance en position**

Pour un système amorti du deuxième ordre, on a **résonance en position** si  $Q > 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ .

### 5.3 Pulsation et amplitude lors de la résonance en position

**Question 8 :** Quelle est alors la pulsation de résonance  $\omega_r$  du système, si  $Q > 1/\sqrt{2}$ ?

**Question 9 :** En déduire l'expression de  $u(\omega_r)$ , puis celle de  $|X_0|$  si  $\omega = \omega_r$ .



**Question 10 :** On admet que, pour toute valeur positive de  $Q$ , on a toujours  $\frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}} \geq 1$  (le cas d'égalité n'arrive que si  $Q = 1/\sqrt{2}$ ). En déduire si  $|\underline{X}_0|(\omega = \omega_r)$  est plus grand ou plus petit que  $|\underline{X}_0|(\omega = 0)$ .

**Question 11 :** Si  $Q \rightarrow \infty$ , vers quelle valeur tend  $\omega_r$  ? Et vers quelle valeur tend  $|\underline{X}_0|(\omega = \omega_r)$  ?

### Questions de cours

**À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...**

- Qu'appelle-t-on résonance en position pour un système mécanique ?
- Soit un système mécanique dont l'équation du mouvement est  $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \times E_0 \cos(\omega_0 t)$ .  
Déterminer la pulsation de résonance  $\omega_r$  en position du système.

# Chapitre 6 : De la dynamique à l'énergétique

## 🎯 Objectifs :

- Définir le travail et la puissance d'une force.
- Calculer le travail d'une interaction conservative.
- Calculer la puissance d'une force dissipative.
- Établir que le théorème de la puissance mécanique découle du principe fondamental de la dynamique.

✍ **Au concours ATS** : Aux écrits en 2023, 2022, 2019. Tombe régulièrement aux oraux.

## 6.1 Puissance d'une force

Prenons l'exemple d'une voiture roulant sur une pente d'angle  $\beta$  par rapport à l'horizontale (voir figure 6.1). Cette force est soumise à quatre actions mécaniques : son poids  $\vec{P}$ , la réaction du support  $\vec{R}$ , des frottements fluides  $\vec{f}$  et une force de traction provenant du moteur  $\vec{F}_t$ .

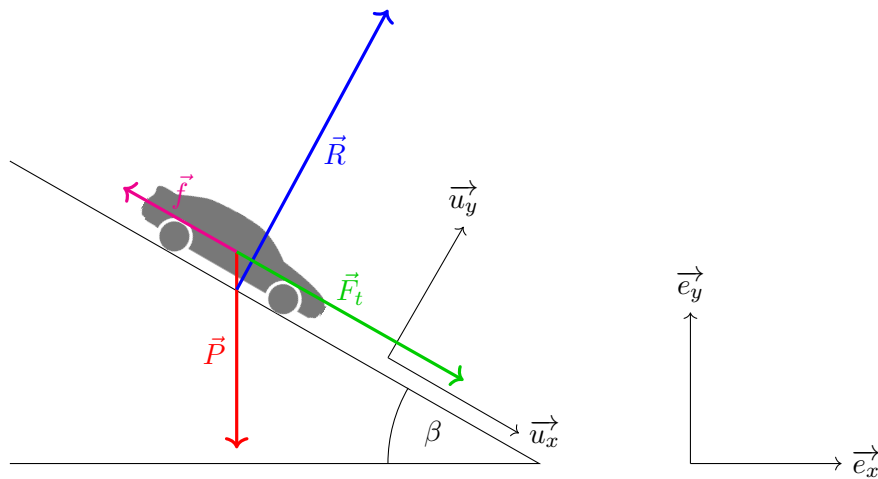


FIGURE 6.1 – Descente d'un voiture selon une pente.

On souhaite évaluer à quel point chaque action mécanique contribue à faire avancer la voiture dans la direction  $\vec{u}_x$ .

**Question 1** : Répondre qualitativement à cette problématique. On pourra « changer de base » en dirigeant le vecteur  $\vec{u}_y$  selon la verticale ascendante.

**Puissance d'une force**

Soit  $M$  un point matériel en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  à la vitesse  $\vec{v}(M/\mathcal{R})$  et soumis à une force  $\vec{F}$ . La **puissance** de  $\vec{F}$  dans  $\mathcal{R}$  est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Ainsi, si l'on note  $\alpha$  l'angle entre la vitesse et la force, on a  $\mathcal{P}(\vec{F}) = Fv \cos(\alpha)$ .  
Dans le système international, la puissance s'exprime en watt W.

**Puissance motrice, puissance résistante**

- Si la puissance d'une force  $\vec{F}$  est positive, on dit que la force est **motrice** ;
- Si la puissance d'une force  $\vec{F}$  est négative, on dit que la force est **résistante**.

**Question 2** : Déterminer quelles forces sont motrices et quelles forces sont résistantes. Que dire de la réaction du support ? Est-ce en accord avec les prévisions qualitatives ?

**6.2 Travail d'une force**

Intéressons-nous à un point matériel  $M$  se déplaçant dans l'espace. On note  $O$  l'origine du repère d'étude.

**Question 3** : Montrer que la puissance d'une force est bien homogène au rapport d'une énergie par une durée.

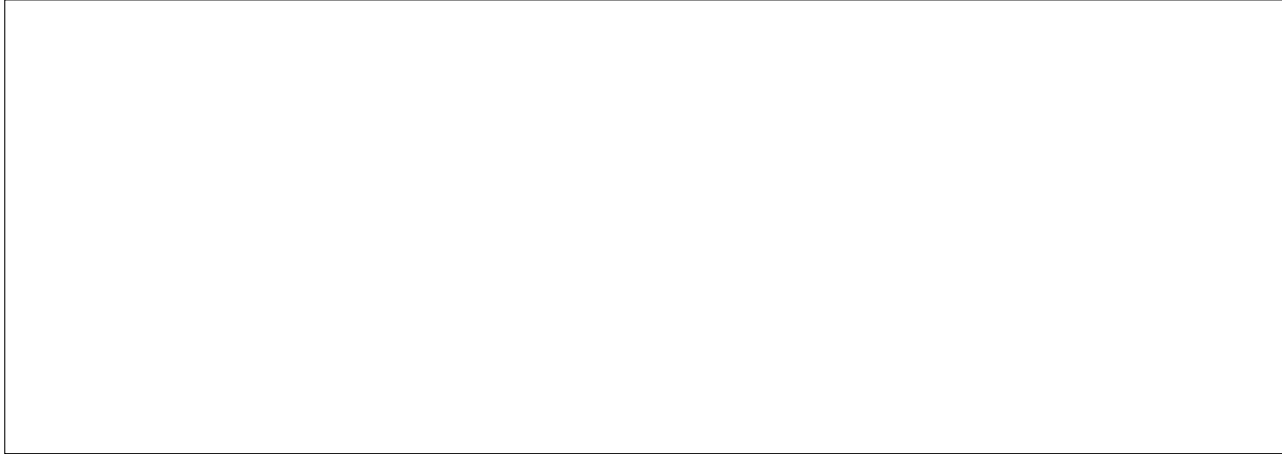
**Travail élémentaire d'une force**

On appelle **travail élémentaire**  $\delta W(\vec{F})$  **d'une force**  $\vec{F}$  l'énergie apportée par cette force au cours d'une durée infinitésimale  $dt$  :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}) \times dt$$

☛ *Remarque* : Le  $\delta$  présent devant  $W$  signifie qu'il s'agit d'une grandeur infinitésimale. On n'utilise pas la lettre  $d$ , qui désigne une variation : le travail existe, ou n'existe pas ; on ne peut pas gagner du travail ou en perdre.

**Question 4** : En utilisant la définition de la puissance, puis celle de la vitesse, montrer que  $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot (\overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t))$ .



#### Déplacement élémentaire d'un point

On définit le **déplacement élémentaire**  $d\overrightarrow{OM}$  d'un point  $M$  comme :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t + dt)}$$

Il s'agit du vecteur-déplacement du point  $M$  pendant la durée infinitésimale  $dt$ .

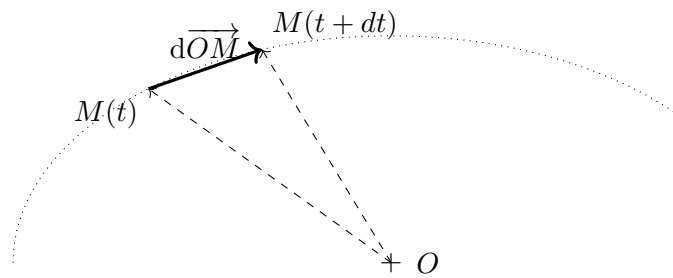


FIGURE 6.2 – Vecteur-déplacement élémentaire du point  $M$ . La trajectoire est représentée en pointillés.

**Question 5** : Déterminer l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes.

#### Autre définition du travail élémentaire d'une force

On définit le travail élémentaire  $\delta W(\vec{F})$  d'une force  $\vec{F}$  s'appliquant sur un point  $M$  comme :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Le vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$  du point  $M$  s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$d\vec{OM} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$$

#### Travail d'une force le long d'une trajectoire

Si une force  $\vec{F}$ , potentiellement dépendante du temps ou de la position du point  $M$ , s'applique sur ce dernier le long d'une trajectoire allant de  $A$  à  $B$ , alors on définit le **travail de la force le long de cette trajectoire** comme :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Ce travail correspond à l'énergie fournie par la force au point  $M$  du début ( $A$ ) jusqu'à la fin ( $B$ ) du mouvement.

Si  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) > 0$ , on parle de **travail moteur** ; si  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) < 0$ , on parle de **travail résistant**.

☛ *Remarque* : On pourrait également dire, au vu des définitions précédentes, que  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\vec{F}) dt$  (et cette définition est tout à fait valide, aussi bien mathématiquement que physiquement). Cependant, le calcul explicite du travail par cette méthode est impossible sans résoudre l'équation du mouvement ; en effet :  $\vec{v}(t)$  est a priori inconnu, et donc  $\mathcal{P}(\vec{F})$  également... En revanche,  $\vec{F}$  est généralement bien connue.

**Question 6** : Comment se simplifie l'expression du travail si  $\vec{F}$  est constamment orthogonale au déplacement ?

**Question 7** : Montrer que, si le vecteur  $\vec{F}$  est constant alors  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ .

### 6.3 Mouvements conservatifs et énergie potentielle

#### Force conservative

On dit qu'une force  $\vec{F}$  est *conservative* si son travail  $W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$  sur un point  $M$  ne dépend pas de la trajectoire suivie par ce point mais uniquement des points d'arrivée et de départ.

**Question 8** : Montrer que le poids  $\vec{P} = -mg \cdot \vec{e}_z$  est conservatif.

**Question 9** : Expliquer pourquoi la force de frottements fluides n'est pas conservative.

### Énergie potentielle

Toute force conservative  $\vec{F}_c$  dérive d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$ . Mathématiquement, cela signifie que l'on peut toujours écrire  $\delta W(\vec{F}_c) = -d\mathcal{E}_p$ , où  $\mathcal{E}_p$  est une fonction ne dépendant que de la position.

**Question 10 :** Exprimer le travail élémentaire du poids. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

## 6.4 Démonstration du théorème de la puissance mécanique

Prenons un point matériel  $M$  de masse  $m$ . Celui-ci est soumis à des forces extérieures, conservatives ou non. On peut donc écrire que  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}^c + \sum \vec{F}_{\text{ext}}^{\text{nc}}$ .

Si l'on se place dans un référentiel galiléen, le PFD donne alors que  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}^c + \sum \vec{F}_{\text{ext}}^{\text{nc}}$ , ou encore :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} - \sum \vec{F}_{\text{ext}}^c = \sum \vec{F}_{\text{ext}}^{\text{nc}}$$

**Question 11 :** Effectuer le produit scalaire de cette équation avec la vitesse  $\vec{v}(M)$ . Que reconnaît-on dans le membre de droite de l'équation ?

**Question 12 :** En observant que  $\frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{u}^2}{2} \right)$ , que devient le premier terme du membre de gauche de l'équation ?

**Question 13 :** En utilisant la définition de la vitesse  $\vec{v}$ , montrer que le second terme du membre de gauche peut s'écrire  $-\sum \frac{\delta W(F_{\text{ext}}^c)}{dt}$ . Y reconnaître la dérivée temporelle de l'énergie potentielle.

**Question 14 :** Enfin, montrer que l'on retrouve le théorème de la puissance mécanique.



## Compléments sur les théorèmes énergétiques

### Théorème de la puissance cinétique

Revenons sur la démonstration du théorème de la puissance mécanique : on a, d'après le PFD,  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$ . En faisant le produit scalaire de cette équation par la vitesse  $\vec{v}$ , on trouve alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}$$

#### Théorème de la puissance cinétique

D'après le **théorème de la puissance cinétique** :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}}$$

où  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$  représente la puissance de toutes les forces extérieures, qu'elles soient conservatives ou non.

L'intérêt de ce théorème réside dans le cas où des forces « non classiques » (c'est-à-dire, dans notre cas, différentes du poids ou de la force élastique d'un ressort) sont présentes dans un énoncé : on n'a pas à se demander si lesdites forces sont conservatives ou non !

### Théorème de l'énergie mécanique

Reprenons le TPM :  $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}}^{\text{n.c.}}$ . On décide d'intégrer cette équation par rapport au temps, entre un instant initial  $t_i$  et un instant final  $t_f$  :

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{P}_{\text{ext}}^{\text{n.c.}} dt$$

Le terme de gauche correspond à  $\mathcal{E}_m(t_f) - \mathcal{E}_m(t_i)$ , c'est-à-dire à la variation  $\Delta\mathcal{E}_m$  de l'énergie mécanique entre l'instant initial et l'instant final.

Par ailleurs, on a démontré précédemment que  $\mathcal{P}(\vec{F})dt = \delta W(\vec{F})$  où  $\vec{F}$  est une force quelconque et  $\delta W$  est le travail élémentaire de cette force. On a donc  $\int_{t_i}^{t_f} \mathcal{P}_{\text{ext}}^{\text{n.c.}} dt = W_{i \rightarrow f}^{\text{ext, n.c.}}$ , le travail total des forces extérieures non conservatives entre l'instant initial et l'instant final.

#### Théorème de l'énergie mécanique

D'après le **théorème de l'énergie mécanique** :

$$\Delta\mathcal{E}_m = W_{\text{ext}}^{\text{n.c.}}$$

où  $W_{\text{ext}}^{\text{n.c.}}$  représente le travail de toutes les forces extérieures non conservatives.

On remarque que, dans le cas d'un mouvement conservatif, on a alors conservation de l'énergie mécanique :  $\Delta\mathcal{E}_m = 0$ .

Le théorème de l'énergie mécanique est très utile dans le cas où les forces extérieures non conservatives sont constantes : leur travail est alors simplement  $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_i M_f}$  (avec  $M_i$  la position initiale et  $M_f$  la position finale), et on peut en déduire une grandeur recherchée (vitesse finale ou position finale) aisément.

## Et pour un solide en rotation ?

**Question 15** : Quelle est l'analogie de la vitesse  $v$  pour un mouvement de rotation ? L'analogie de la masse ? L'analogie d'une force ?

### Énergie cinétique d'un solide en rotation

L'énergie cinétique d'un solide  $S$  en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe est :

$$\mathcal{E}_c(S) = \frac{1}{2} J_{\Delta}(S) \omega^2$$

### Puissance du moment d'une force

La puissance du moment  $\mathcal{M}_{\Delta}$  d'une force exercé sur un solide en rotation est :

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}_{\Delta}) = \mathcal{M}_{\Delta} \omega$$

Le théorème de la puissance cinétique est alors utilisable avec les grandeurs précédentes : il donnera alors la même équation que le théorème du moment cinétique.

## Questions de cours

**À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...**

- Définir le travail et la puissance d'une force ; donner leurs interprétations physiques, et le lien entre ces deux grandeurs.
- Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ; établir l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort.
- Établir que le théorème de la puissance mécanique se déduit du principe fondamental de la dynamique.