Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 9 : Ondes

Travaux dirigés

Exercice faisant uniquement appel à des outils mathématiques ______ $\sqrt{x}$
Exercice facile et/ou proche du cours ______ 🌡
Exercice accessible mais demandant du recul sur le cours et/ou sur les outils mathématiques ______ 🌡
Exercice complexe, de par son côté calculatoire et/ou astucieux ______ 🌡

Il est normal de « bloquer » sur les **exercices** : personne ne s'attend à ce que vous sachiez les faire en cinq minutes seulement. Il faut cependant persévérer, avoir le cours à côté afin de voir si un raisonnement similaire a déjà été abordé, et ne pas hésiter à parler avec vos camarades ou votre professeur.

Les **problèmes** sont issus d'annales de concours et/ou d'examens. Ils sont au moins aussi importants à aborder que les exercices, car ils sont les plus proches (en terme de rédaction et de questions « bout-à-bout ») de ce que vous aurez en devoir surveillé ainsi qu'au concours.

Chapitre 1 : Vibration d'une corde

Capacités exigibles et exercices associés

Pas d'exercice réellement en lien avec les capacités exigibles, si ce n'est ce qui a déjà été fait en cours...

Questions de cours

- ☐ Établir l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante.
- ☐ Supposons que $y(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert. On note c la célérité de l'onde. Quelle est la forme de $y(x,t)$ si l'onde se propage dans le sens des x croissants ? Quelle est la forme de $y(x,t)$ si l'onde se propage dans le sens des x décroissants ?
- ☐ En utilisant le fait que $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$, montrer que la somme d'une onde incidente et d'une onde réfléchie forme une onde stationnaire.
- ☐ Soit une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Montrer qu'une onde stationnaire $y(x,t) = Y_0\sin(kx+\varphi)\sin(\omega t)$ (avec $\omega = kc$) admet des modes propres, c'est-à-dire que k et ω sont quantifiés.
- ☐ Soit une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Tracer l'allure de la corde pour les modes propres $n=1$ à différents instants. Idem pour les modes propres $n=2$ et $n=3$.

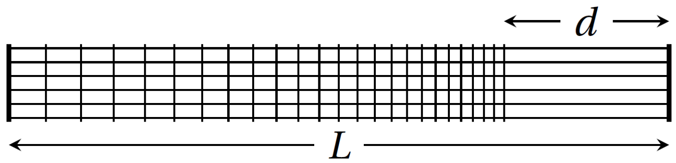
Exercices

1.1 Analogie avec les instruments à vent

Le son produit par un instrument à vent, telle qu'une flûte, est provoqué par des ondes de pression au sein de la colonne d'air la remplissant. En faisant une analogie avec les modes propres de la corde vibrante, expliquer si boucher tous les trous d'une flûte crée un son plus aigu ou plus grave que le son d'une flûte dont tous les trous sont « ouverts ».

1.2 Frettes d'une guitare

Les frettes (traits verticaux sur le schéma ci-dessous) placées le long du manche d'une guitare permettent au musicien de modifier la hauteur du son produit par la corde. En pressant la corde contre une frette, il diminue sa longueur effective, provoquant une augmentation de la fréquence fondamentale de vibration de la corde.



1. Retrouver rapidement la fréquence de vibration fondamentale d'une corde de longueur L le long de laquelle les ondes se propagent à la célérité c.
2. La note monte d'un demi-ton lorsque la fréquence est multipliée par $2^{1/12}$. Pour cela, comment doit-on modifier la longueur de la corde ?
3. En plaçant le doigt sur les frettes successives, on monte à chaque fois la note d'un demi-ton. Combien de frettes peut-il y avoir au maximum, sachant que la distance d entre la dernière frette et le point d'accrochage de la corde (le chevalet) doit être supérieure à $L/4$?

1.3 Réflexion d'une onde sur une corde accrochée à un mur

Soit une corde semi-infinie de masse linéique μ fixée sur un mur à l'une de ses extrémités (en $x = 0$) et tendue à l'autre avec une masse m (par exemple, à l'aide d'une poulie). Au repos, la corde est confondue avec l'axe (O, x) sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.

1. Un expérimentateur produit une déformation sinusoïdale en un point de la corde situé loin du mur. Proposer une expression mathématique de $y_i(x,t)$, onde se dirigeant vers le mur. On la choisira à l'origine des phases, ce qui signifie que $\varphi_i = 0$. Comment qualifier cette onde ?
2. Écrire la condition aux limites en $x = 0$. L'onde précédente peut-elle y satisfaire seule ? Interpréter le phénomène qui se produit [1] et décrivez-le mathématiquement en introduisant une nouvelle grandeur.
3. Appliquer la condition aux limites et déduisez-en l'expression et la nature de l'onde résultante (c'est-à-dire de l'onde totale) $y(x,t)$. Commenter. On utilisera le fait que $\cos(a) - \cos(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

1. Si vous bloquez vraiment, regardez le titre de l'exercice.

Problème

On cherche à étudier le mouvement d'une corde de guitare.

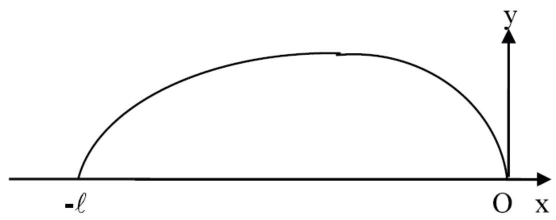
Caractéristiques de la corde

1. Déterminer la masse linéique μ d'une corde en acier de masse volumique ρ, de longueur ℓ et de diamètre D. On admet que le volume d'un cylindre de longueur L et de rayon r est $\pi r^2 L$.
2. Application numérique : on donne $\rho = 8000\,\mathrm{kg/m^3}$ et $\mu = 6\,\mathrm{g\cdot m^{-1}}$. Déterminer la section s en mm^2 et la longueur ℓ d'une corde de $3{,}6\,\mathrm{g}$.

Modes propres de la corde

On assimile la corde de guitare à une corde inextensible sans raideur de masse linéique constante μ, tendue par une tension de module T_0. Au repos, elle se confond avec l'axe (O, x) (voir figure 1.3). On note ℓ la longueur de la corde placée entre les abscisses $x = -\ell$ et $x = 0$ où la corde est attachée.

On étudie les vibrations de la corde dans le plan (O, x, y), c'est-à-dire les petits mouvements transversaux selon (O, y), de part et d'autre de cette position de repos.



3. Quelles sont les valeurs de $y(x,t)$ aux extrémités de la corde (conditions aux limites) ?
4. Analyser la dimension du terme $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

On admet que $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

5. Comment se nomme ce type d'équation ? Que représente-t-elle, physiquement ?
6. Calculer v pour $T_0 = 120\,\mathrm{N}$.
7. On cherche $y(x,t)$ sous la forme : $y(x,t) = Y_0 \sin(Kx)\sin(\Omega t)$. Injecter cette expression dans l'équation aux dérivées partielles ; en déduire un lien entre K, v et Ω.
8. En utilisant les conditions aux limites en $x = -\ell$, montrer que l'on a nécessairement $K = n \times \dfrac{\pi}{\ell}$ avec n un entier.

Toute solution de la forme $y_n(x,t) = Y_{0,n} \sin\left(\dfrac{n\pi}{\ell}x\right)\sin(n\omega_0 t)$ vérifie alors l'équation précédente associée à ses conditions aux limites, avec $\omega_0 = \dfrac{\pi v}{\ell}$. On posera $\omega_n = n \times \omega_0$.

9. Dessiner l'allure de la corde à $t = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$ et $t = \dfrac{\pi}{2\omega_n}$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Chapitre 5 : Propagation et énergie d'une onde électromagnétique

Capacités exigibles	Exercice(s)
Établir l'équation de propagation des champs dans le vide	5.1
Décrire un bilan d'énergie électromagnétique dans le cas du vide et définir le vecteur de Poynting	5.5, 5.6, 5.7
Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée	5.5, 5.6, 5.7

Questions de cours

- ☐ Soit $f(x,y,z)$ un champ scalaire. Donner l'expression du laplacien scalaire de f en coordonnées cartésiennes. Faire l'application sur $f(x,y,z) = x^2 - y^5 e^{z/x}$.
- ☐ Soit $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ un champ vectoriel. Donner l'expression du laplacien vectoriel de $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes. Faire l'application sur $\overrightarrow{A}(x,y,z) = x^2y^3.\overrightarrow{e_x} - (z^5+y^2).\overrightarrow{e_y}$.
- ☐ Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. À l'aide de la relation d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ - \overrightarrow{\Delta}$, établir l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique $\overrightarrow{E}$. Donner l'expression de la vitesse de propagation des ondes électriques.
- ☐ Soit une onde électromagnétique dont le champ électrique est $\overrightarrow{E} = E_0\cos(kx-\omega t).\overrightarrow{u_y}$. Selon quelle direction se propage l'onde ? Quelle est sa polarisation ? Montrer, à l'aide de l'équation de d'Alembert, que l'on a $\omega = kc$.
- ☐ Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
- ☐ Qu'est-ce qu'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ? Que peut-on dire du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ pour une telle onde dans le vide ? Montrer que l'on a nécessairement $B = E/c$.
- ☐ Donner les expressions de la densité volumique d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting. Que représente physiquement ce vecteur ? Énoncer l'équation locale de Poynting ; quelle est sa signification physique ?
- ☐ Soit une OPPM polarisée rectilignement : $\overrightarrow{E} = E_0\cos(kx-\omega t).\overrightarrow{u_y}$. Déterminer $\overrightarrow{B}$, puis $\overrightarrow{\Pi}$. Commenter sa direction. Calculer la puissance rayonnée à travers une surface S orthogonale à l'axe (O,x).

Exercices

5.1 Équation de d'Alembert pour le champ magnétique

Montrer que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ suit l'équation de d'Alembert. Est-ce la même célérité que pour le champ $\overrightarrow{E}$?

5.2 Calcul de laplaciens

1. Calculer les laplaciens des champs scalaires suivants :
   (a) $f_1(x,y) = x^2 \times y^3$;
   (b) $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;
   (c) $f_3(x,y,t) = C\cos(\omega t - kx)e^{-y/L}$.
2. Calculer les laplaciens des champs vectoriels suivants :
   (a) $\overrightarrow{A_1}(x,y) = C(y^3.\overrightarrow{e_x} - x^3.\overrightarrow{e_y})$;
   (b) $\overrightarrow{A_2}(x,y,z) = C_1 \times \cos(kx-\omega t).\overrightarrow{e_y} + C_2 \times \sin(kx-\omega t).\overrightarrow{e_z}$;
   (c) $\overrightarrow{A_3}(x,y) = C_1 e^{ax}.\overrightarrow{e_y} + C_2\ln(byx).\overrightarrow{e_x}$.

5.3 Domaines des ondes électromagnétiques

Déterminer à quelles régions des ondes électromagnétiques correspondent les valeurs suivantes :

1. $\lambda = 650 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$;
2. $f = 10\,\mathrm{MHz}$;
3. $T = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$;
4. $\omega = 30 \times 10^{10}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$;
5. $k = 1 \times 10^{2}\,\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$.

5.4 Champs électromagnétiques correspondant à des ondes

On considère des champs électromagnétiques dans le vide (pas de charge ou de courant de conduction).

1. On a $\overrightarrow{E} = -\dfrac{ak^2y}{\varepsilon_0\mu_0\omega}\cos(\omega t - kx).\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{B} = a\sin(\omega t - kx).\overrightarrow{u_x} + aky\cos(\omega t - kx).\overrightarrow{u_y}$. Le champ électromagnétique $\{\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}\}$ constitue-t-il une onde électromagnétique, et si oui, à quelle condition ?
2. À quelle condition le champ électrique $\overrightarrow{E} = a\sin(\alpha x)\cos(\omega t - kz).\overrightarrow{u_y}$ est-il le champ électrique d'une onde électromagnétique ?
3. On a $\overrightarrow{E} = E_0\sin(kz)\sin(\omega t).\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{B} = B_0\cos(kz)\cos(\omega t).\overrightarrow{u_y}$ constitue-t-il une onde électromagnétique, et si oui, à quelle condition ? Cette onde est-elle progressive ?

5.5 Un exemple d'OPPH

On étudie une onde électromagnétique dont le champ est de la forme $\overrightarrow{E} = E_x.\overrightarrow{u_x} + E_y.\overrightarrow{u_y}$ avec $E_x = E_0\exp\left[i\left(\dfrac{K}{3}(2x + 2y - z) - \omega t\right)\right]$.

L'onde se propage dans le vide, et sa longueur d'onde est $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$.

1. Calculer la fréquence de l'onde. Identifier le domaine du spectre électromagnétique auquel elle appartient.
2. Exprimer le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ en fonction de la constante K, puis calculer la valeur numérique de K.
3. À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer E_y en fonction de E_x.
4. Exprimer le champ magnétique de cette onde en fonction de E_x et c.
5. Exprimer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde. Commenter.
6. Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de cette onde. Commenter.

5.6 Étude énergétique d'un câble en régime statique

Soit un cylindre de longueur L, d'axe (O, z) et de rayon a, de conductivité γ, parcouru par des courants uniformes et indépendants du temps, de densité volumique $\overrightarrow{j} = j.\overrightarrow{u_z}$. On note I l'intensité traversant le câble.

1. Faire un schéma et dessiner la base appropriée en un point de la périphérique du câble.
2. Exprimer j en fonction de I.
3. En déduire $\overrightarrow{E}$ en fonction de I en tout point du câble.
4. On néglige les effets de bords, c'est-à-dire que les champs ont même géométrie que si le cylindre était infiniment long. Déterminer, en un point de la surface du cylindre, l'expression du champ magnétique.
5. En déduire le vecteur de Poynting en un point de la surface du cylindre. Le représenter sur le schéma.

6. Exprimer la puissance électromagnétique reçue par le conducteur à travers sa surface latérale S. Faire apparaître la résistance R du cylindre en interprétant la formule précédente.

5.7 Puissance d'un laser

Un laser de puissance moyenne totale $\mathcal{P} = 10\,\mathrm{W}$ émet un faisceau cylindrique d'axe (O, z) et de diamètre $D = 3{,}0\,\mathrm{mm}$ dans la longueur d'onde $\lambda = 632\,\mathrm{nm}$. On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$. L'air est assimilé au vide.

1. On suppose que les ondes lumineuses associées à ce faisceau sont planes, progressives, sinusoïdales à polarisation rectiligne selon $\overrightarrow{u_x}$. Donner l'expression générale du champ électrique en écriture complexe en introduisant une amplitude E_m.
2. En déduire celle du champ magnétique puis de la moyenne du vecteur densité surfacique de puissance en fonction de l'amplitude du champ électrique (entre autres).
3. Calculer l'amplitude du champ électrique en exploitant $\mathcal{P}$.
4. Quel est le nombre de photons n^* émise par seconde par ce laser ? On donne l'énergie d'un photon d'une onde de fréquence ν : $\mathcal{E} = h\nu$ avec $h = 6{,}62 \times 10^{-31}\ \mathrm{SI}$ (constante de Planck).

Problème

On considère une source lumineuse supposée ponctuelle et située en O, émettant de manière isotrope un rayonnement monochromatique de pulsation ω. Dans la suite, on utilisera le repérage cartésien $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. On note $\vec{E}$ le champ électrique et $\vec{B}$ le champ magnétique associé. Le milieu de propagation est l'air et sera assimilé à du vide dont la permittivité diélectrique est notée ε_0 et la perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H \cdot m^{-1}}$.

1. Enoncer les équations de Maxwell décrivant la situation étudiée.
2. Montrer que l'équation de propagation du champ électrique est $\vec{E}$ est $\vec{\Delta}\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ en posant $c^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$.

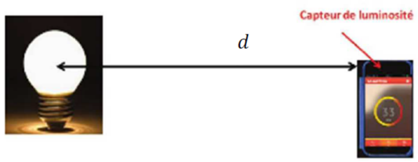
On étudie la propagation de l'onde électromagnétique émise par cette source dans la direction $\overrightarrow{u_x}$. On suppose que le rapport $\dfrac{D}{d}$ de l'extension D de la zone d'observation et de la distance moyenne d à la source tend vers 0. Pour $d - \dfrac{D}{2} \leq x \leq d + \dfrac{D}{2}$, on peut considérer $\vec{E}$ comme une onde localement plane dont l'amplitude $E_0(d) = E_0$ est supposée constante et se propageant à la vitesse $v > 0$. Dans ces conditions, on décrit le champ électrique par : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)\right).\overrightarrow{u_z}$.

3. Préciser la direction de polarisation de cette onde. Comment pourrait-on le vérifier en pratique ?
4. Vérifier que $\vec{E}(x,t)$ est effectivement bien solution de l'équation de propagation. En déduire alors la relation entre v et c.
5. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(x,t)$ associé.
6. Rappeler l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ ainsi que son unité.
7. Montrer que la valeur moyenne temporelle $\langle\vec{R}\rangle$ du vecteur de Poynting est $\langle\vec{R}\rangle = \dfrac{E_0^2}{2\mu_0 c}.\overrightarrow{u_x}$.
8. À chaque instant, on suppose que la source émet une puissance P de manière isotrope. Donner l'expression de $\left|\left|\langle\vec{R}\rangle\right|\right|$ mesurée à la distance d de la source en fonction de P.

9. Montrer alors que la valeur de E_0 en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ est donnée par la formule $E_0(d) = \dfrac{\sqrt{60P}}{d}$ où la valeur de P est en W et la valeur de d en m.

L'éclairement énergétique s'identifie à la valeur moyenne de la norme du vecteur de Poynting $\vec{R}$. Pour des raisons liées à la sensibilité de l'œil humain, on définit aussi l'éclairement visuel $\mathcal{E}$ exprimé en lux (lx) qui rend compte également d'une puissance surfacique. C'est cet éclairement visuel $\mathcal{E}$ en lux que les capteurs d'éclairement présents dans les téléphones mesurent.

En utilisant une ampoule, un mètre et un téléphone, on obtient les résultats expérimentaux ci-après :



$\mathcal{E}$ (lx)	d (m)	$d^2(\mathrm{m}^2)$	$d^{-2}(\mathrm{m}^{-2})$
1000	0,1	0,010	100
445	0,15	0,022	44
250	0,2	0,040	25
155	0,25	0,063	16
110	0,3	0,090	11
60	0,4	0,16	6,3

10. Dans son livre intitulé « Essai d'optique sur la gradation de la lumière » édité en 1729, Pierre Bouguer écrit « la force de la lumière doit suivre une raison inversé des carrés de la distance aux corps lumineux ». Proposer une exploitation des résultats expérimentaux précédents permettant de tester cette loi de Bouguer.

Chapitre 6 : Réflexion des ondes électromagnétiques sur les conducteurs

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait	6.2, 6.3, problème
Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies	6.2, 6.3, problème
Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface	6.3
Reconnaître et caractériser une onde stationnaire	6.1, problème

Questions de cours

☐ Rappeler ce qu'est un conducteur parfait. Montrer qu'une onde électromagnétique ne peut s'y propager.

Exercices

6.1 Four à micro-ondes

1. Représenter les modes propres du champ électrique dans une cavité (de $m = 1$ à $m = 3$).
2. Représenter les modes propres du champ magnétique dans une cavité (de $m = 1$ à $m = 3$).
3. On considère un four à micro-ondes constitué de deux plaques parallèles parfaitement conductrices. Expliquer l'intérêt d'un plateau tournant pour chauffer uniformément un objet au sein du four.

6.2 Peut-il exister des charges à la surface d'un conducteur parfait ?

Comme dans le cours, considérons un milieu conducteur (parfait) prenant le demi-espace $x > 0$. L'onde incidente est $\overrightarrow{E_i} = E_i e^{i(\omega t - kx)}.\overrightarrow{u_y}$; on cherche une onde réfléchie sous la forme $\overrightarrow{E_r} = E_r e^{i(\omega t + kx)}.\overrightarrow{u_y} + E_x e^{i(\omega t + kx)}.\overrightarrow{u_x}$.

1. Rappeler pourquoi le champ électrique est nul dans le métal.
2. À l'aide de la projection du théorème de Coulomb selon la direction $\overrightarrow{u_y}$, donner l'expression de E_r en fonction de E_i.
3. Justifier, à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss, que $E_x = 0$.
4. À l'aide de la projection du théorème de Coulomb selon la direction $\overrightarrow{u_x}$, montrer alors qu'il ne peut exister de densité surfacique de charge σ à la surface d'un conducteur parfait.

6.3 Peut-il exister des courants à la surface d'un conducteur parfait ?

On reprend les expressions de $\overrightarrow{E_i}$ et $\overrightarrow{E_r}$ de l'exercice précédent (le contexte est identique).

On rappelle la relation de passage pour le champ magnétique : $\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}$.

1. Que vaut $\overrightarrow{B}(x > 0)$ à l'intérieur du métal ? Justifier.
2. Donner l'expression de $\overrightarrow{B_i}$ et $\overrightarrow{B_r}$. En déduire $\overrightarrow{B}(x < 0)$.
3. Justifier que les éventuels courants surfaciques peuvent s'écrire $\overrightarrow{j_s} = j_{s,y}.\overrightarrow{u_y} + j_{s,z}.\overrightarrow{u_z}$.
4. En utilisant la relation de passage pour le champ magnétique, montrer qu'il existe nécessairement des courants surfaciques. Déterminer leur expression.
5. Expliquer pourquoi des objets métalliques pointus ne sont pas conseillés au sein d'un four à micro-ondes.

6.4 Champ électrique dans un métal non parfait

Soit un milieu conducteur mais imparfait prenant le demi-espace $x > 0$. On n'a pas $\gamma \to \infty$; en conséquence, $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx).\vec{u_y}$ est non nul dans le conducteur. On se place par ailleurs dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

1. Donner la relation entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.
2. Que devient l'équation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS ?
3. En appliquant l'opérateur divergence à cette équation, montrer que $\rho = 0$ dans le métal.
4. En utilisant la formule $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div} - \overrightarrow{\Delta}$, montrer que $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = D.\overrightarrow{\Delta}\vec{E}$. On donnera naturellement l'expression de D.
5. En déduire une relation entre k et ω (on passera par les complexes). Que vous rappelle ce problème ?
6. Montrer que la même équation est vérifiée pour $\vec{j}$. Expliquer pourquoi augmenter la surface d'un conducteur au-delà « d'une certaine valeur » n'augmente pas la conductance.

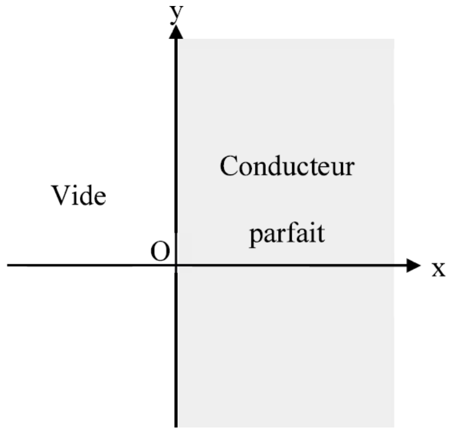
Problème

Conducteur parfait

1. Rappeler la loi d'Ohm locale ainsi que la définition d'un conducteur parfait.
2. Montrer que le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait.
3. Écrire alors les relations de passage du champ électrique à la surface d'un tel conducteur.

Étude de l'onde résultante

Une onde électromagnétique arrive en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $x > 0$ (figure ci-dessous).



On suppose que cette onde est plane progressive monochromatique de pulsation ω. Le champ électrique s'écrit en coordonnées cartésiennes et en représentation complexe :

$$\underline{\vec{E}_i} = E_0 \exp\left(i(\omega t - kx)\right).\vec{u_y}$$

où E_0 et k sont des constantes. On a notamment $\omega = kc$.

4. La présence du conducteur implique une réflexion. Comment l'onde réfléchie se propage-t-elle ?
5. L'onde réfléchie est une onde monochromatique de même pulsation. On cherche alors le champ électrique réfléchi complexe sous la forme :

$$\underline{\vec{E}_r}(x,t) = \underline{\overrightarrow{E_{r,0}}}(x)\exp(i\omega t)$$

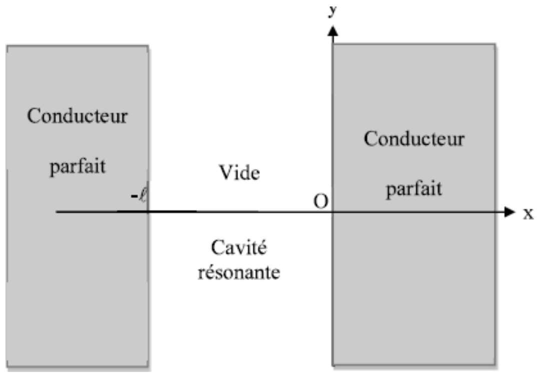
Justifier que $\underline{\overrightarrow{E_{r,0}}}$ ne dépende que de x.

6. À l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss, montrer que $\underline{\overrightarrow{E_{r,0}}}$ n'a pas de composante selon $\vec{u_x}$.

7. À l'aide des relations de passage, déterminer les projections $\underline{E}_{r,y}$ et $\underline{E}_{r,z}$ de $\overrightarrow{\underline{E}_{r,0}}$ selon $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$. En déduire $\overrightarrow{\underline{E}_r}$.
8. Déterminer l'expression $\overrightarrow{E}(x,t)$ du champ électrique total en fonction notamment de E_0, ω et c. On donnera le résultat sous forme du produit de deux fonctions sinusoïdales.
9. Quelle est la particularité de cette onde et son nom ?
10. Déterminer les positions des plans nodaux (plans dans lesquels le champ est nul à tout instant) du champ électrique $\overrightarrow{E}$ en fonction de la longueur d'onde.

Cavité résonante : quantification de la fréquence

Pour former la cavité résonante on ajoute un deuxième conducteur parfait placé dans le demi-espace $x < -\ell$ (figure ci-dessous).



11. Quelle(s) autre(s) condition(s) la présence de ce deuxième conducteur parfait impose-t-elle au champ électrique $\overrightarrow{E}$?
12. Montrer que ceci impose une quantification de la pulsation des ondes pouvant s'établir dans la cavité :

$$\omega_n = n\omega_0$$

où n est un entier. Expliciter ω_0 en fonction de c et ℓ.

13. En déduire que pour l'onde harmonique de pulsation ω_n, le champ électrique $\overrightarrow{E_n}(x,t)$ dans la cavité prend la forme :

$$\overrightarrow{\underline{E}_n}(x,t) = A\sin(\alpha x)\sin(\beta t).\overrightarrow{u_y}$$

en explicitant A, α et β en fonction de E_0, ω_0, c et n.

Chapitre 7 : Interférences lumineuses

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Définir l'intensité lumineuse	tous
Définir la différence de phase, la différence de marche, l'ordre d'interférence et l'intensité lumineuse en un point du champ d'interférence de deux ondes monochromatiques cohérentes	tous

Questions de cours

- ☐ Définir la cohérence de deux sources lumineuses.
- ☐ Définir l'intensité lumineuse d'une onde lumineuse d'amplitude scalaire $s(M,t)$.
- ☐ Définir la différence de marche. Donner la relation entre la différence de phase et la longueur d'onde, la différence de marche.
- ☐ Soient deux ondes $s_1(M,t) = S_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\mathcal{S}_1 M\right)$ et $s_2(M,t) = S_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\mathcal{S}_2 M\right)$ émises par deux sources cohérentes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$. Montrer que l'intensité lumineuse au point M est $I(M) = 2I_0 \times \left[1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}(\mathcal{S}_2 M - \mathcal{S}_1 M)\right)\right]$ avec I_0 l'intensité lumineuse de chacune des deux sources.
- ☐ Déterminer l'expression de la différence de marche pour l'expérience des trous de Young.

Exercices

7.1 Conditions d'interférences

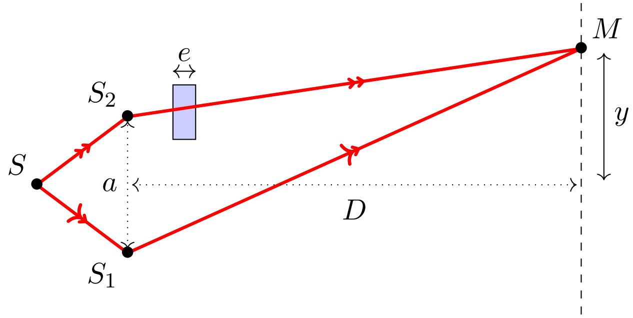
Soient deux sources $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ (de mêmes intensités I_0) possédant deux pulsations ω_1 et ω_2 différents. En particulier, parce qu'on a deux pulsations différentes dans le problème, on ne peut pas utiliser la formule $\langle x^2(t)\rangle = \dfrac{1}{2}\text{Re}\left(\underline{x}\underline{x}^*\right)$.

1. Donner les expressions <u>réelles</u> des amplitudes scalaires s_1 et s_2. On notera $\varphi_1 = \dfrac{2\pi}{\lambda_1}S_1M$ et $\varphi_2 = \dfrac{2\pi}{\lambda_2}S_2M$.
2. Donner l'expression de s, puis de s^2.
3. En utilisant la formule $\cos(a).\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$, en simplifier l'expression de s^2. En déduire celle de l'intensité lumineuse I, et montrer que le terme d'interférences est nul (c'est-à-dire que $I = I_1 + I_2$).
4. Expliquer pourquoi le phénomène d'interférences lumineuses n'est pas perceptible dans « la vie de tous les jours ».

7.2 Mesure d'une lame mince à l'aide des trous de Young

On considère un dispositif des trous de Young comme schématisé ci-dessous. Dans cette expérience, on va ajouter une lame mince d'épaisseur e, avec $e \ll D$, et d'indice optique n sur un des trajets des ondes en le plaçant derrière la fente $\mathcal{S}_2$.

On utilise un laser vert $\lambda_0 = 532\,\mathrm{nm}$ et l'écran est placé à $D = 2\,\mathrm{m}$. On suppose que $D \gg a$ et $D \gg y$; nécessairement, on a $\alpha \ll 1$.

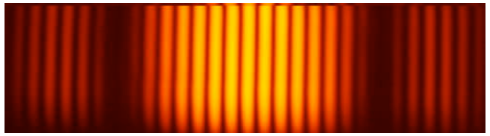


1. En l'absence de la lame mince, déterminer ou retrouver l'expression de la différence de marche au point M sur l'écran. Dessiner la figure d'interférences observée.
2. Sans la lame, on mesure un interfrange $\Delta = 6\,\mathrm{mm}$. Calculer l'écart a entre les trous de Young.
3. Déterminer l'expression de la différence de marche au point M lorsqu'on ajoute la lame d'indice n et d'épaisseur e. On négligera toute déviation (réfraction) du rayon à travers la lame, et on admet que le chemin optique (AB) d'un trajet de longueur réelle AB dans un milieu d'indice n est $(AB) = n \times AB$.
4. Quel est l'effet de l'ajout de cette lame sur la figure d'interférences par rapport au cas où elle n'y est pas ?
5. La lame est d'épaisseur $e = 0{,}20\,\mathrm{mm}$. Lorsqu'on l'ajoute, la figure se déplace de $150\,\mathrm{franges}$. Calculer l'indice n du verre utilisé.

7.3 Fentes de Young éclairées par un doublet

Considérons un dispositif de fentes de Young éclairé par une lampe à vapeur de mercure assimilée à une source ponctuelle située sur l'axe optique du montage. On isole, à l'aide d'un filtre approprié, deux longueurs d'ondes très rapprochées, modélisées par deux raies monochromatiques de même intensité I_m et de longueurs d'onde $\lambda_1 = 577\,\mathrm{mm}$ et $\lambda_2 = 579\,\mathrm{mm}$.

Les fentes de Young sont séparées d'une distance a ; sur l'écran placé à la distance $D \gg a$ des fentes, on observe de longues franges rectilignes dans la direction (O, z) et réparties périodiquement le long de l'axe (O, y).



1. Pour une seule radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0, rappeler sans démonstration l'expression de la différence de marche au point de l'écran d'ordonnée y puis celle de l'intensité $I(y)$.
2. Définir l'interfrange i. Pour laquelle des longueurs d'onde λ_1 ou λ_2 est-il le plus grand ?
3. Les ondes issues de la raie 1 et celles issues de la raie 2 interfèrent-elles ? Justifier.
4. Montrer alors que l'intensité totale se met sous la forme :
$$I(y) = I_{\text{moy}} \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{\Delta}{2\lambda^2} \frac{ay}{D}\right) \cos\left(2\pi \frac{ay}{\lambda D}\right)\right]$$
avec I_{moy} une constante de proportionnalité à exprimer en fonction de I_m ; $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ la séparation du doublet et $\lambda = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ sa longueur d'onde moyenne. Comme les deux longueurs d'onde sont très proches, on peut faire l'approximation $\lambda_1 \lambda_2 \approx \lambda^2$. On utilisera le fait que $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.
5. Déterminer la période spatiale des deux cosinus. En déduire que l'un d'eux s'interprète comme un terme d'interférences et l'autre comme un facteur dépendant du point d'observation (on l'appelle facteur de contraste).

6. À quelle distance y du centre de l'écran la figure d'interférences est-elle complètement brouillée, c'est-à-dire sombre ?

7.4 Miroir de Lloyd

Une source ponctuelle S émet une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 600\,\text{nm}$. Le faisceau lumineux émis éclaire un miroir plan de côté $AB = 24\,\text{cm}$. On donne $OA = 1\,\text{cm}$ et $h = 0{,}25\,\text{mm}$. L'écran est supposé infini dans la direction x (contrairement à ce que le schéma peut laisser supposer).

On admet que, pour déterminer en quel point M de l'écran se situe l'image de S par rapport à un point I d'impact du rayon lumineux sur le miroir, on peut placer un point S' (symétrique de S par rapport à O) et alors tracer la prolongation du segment $[S'I]$ jusqu'à l'écran.

Par ailleurs, on admet qu'une réflexion ajoute un déphasage π à l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente.

1. Placer un point I quelconque sur le miroir (plutôt proche de B). Par l'astuce donnée dans l'énoncé, déterminer en quel point M arrive le faisceau lumineux issu de S après réflexion par I.
2. Indiquer la région de l'écran où se superposent les deux faisceaux qui interfèrent.
3. À partir de quelle hauteur L sur l'écran n'observe-t-on plus le phénomène ?
4. Observe-t-on une frange brillante ou sombre au point B ?
5. Exprimer la distance de marche maximale δ_{max} entre deux rayons qui interfèrent.
6. En déduire alors le nombre de franges brillantes observées sur l'écran, ainsi que le nombre de franges sombres.