Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 9 : Ondes

Cours



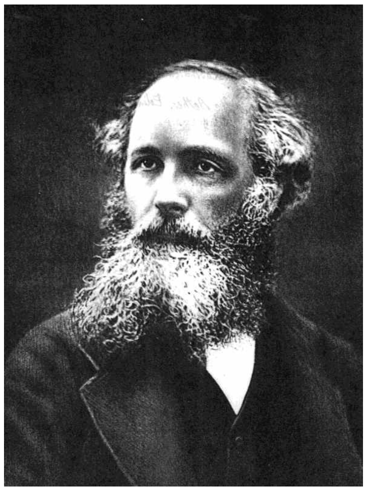


Figure 1 – Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783), mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français, Thomas Young (1773 – 1829), physicien et mathématicien et égyptologue anglais, et James Clerk Maxwell (1831 – 1879), physicien et mathématicien écossais, sont trois scientifiques ayant contribué à l'étude des ondes. Le premier a modélisé la propagation d'une onde mécanique le long d'une corde, établissant ainsi une équation d'onde portant son nom, tandis que le deuxième a mis en évidence et interpréter le phénomène d'interférences lumineuses. Le troisième est principalement connu pour avoir unifié en un seul ensemble d'équations l'électricité, le magnétisme et l'induction. Il est également célèbre pour avoir interprété la lumière comme étant un phénomène électromagnétique, en démontrant que les champs électrique et magnétique se propagent dans l'espace sous la forme d'une onde et à la vitesse de la lumière.

Table des matières

Chapitre 1 : Vibration d'une corde

Objectifs :

— Établir l'équation de propagation dans le cas des ondes transversales d'une corde.

— Reconnaître le caractère progressif ou stationnaire d'une onde.

— Utiliser les conditions aux limites et identifier les modes propres d'une onde stationnaire.

Au concours ATS : Aux écrits en 2020, 2019, 2018.

1.1 Établissement de l'équation d'onde

1.1.1 Position du problème

On considère une corde vibrante de masse linéique (masse par unité de longueur) μ. Au long de cette corde se propage un ébranlement. On repère par $y(x,t)$ la hauteur de la corde à l'abscisse x et à l'instant t (voir figure 1.1).

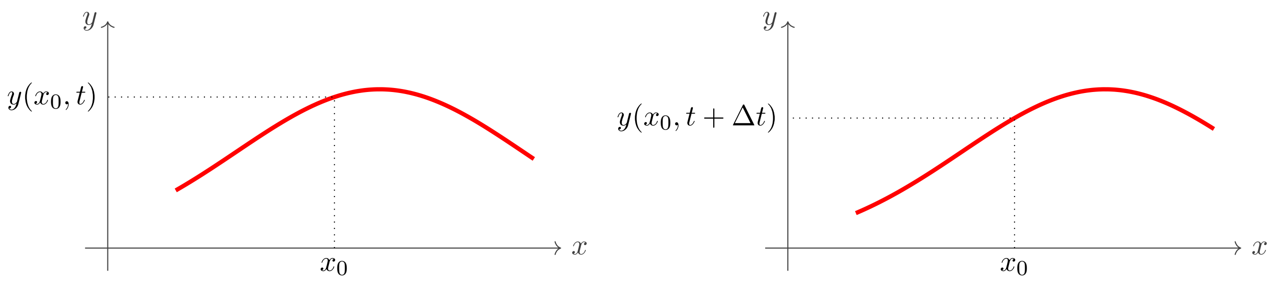


FIGURE 1.1 – Propagation d'un ébranlement le long d'une corde à deux instants t et $t + \Delta t$.

$\alpha(x,t)$ représente quant à lui l'angle que forme la corde en x et à t par rapport à l'horizontale (voir figure 1.2).

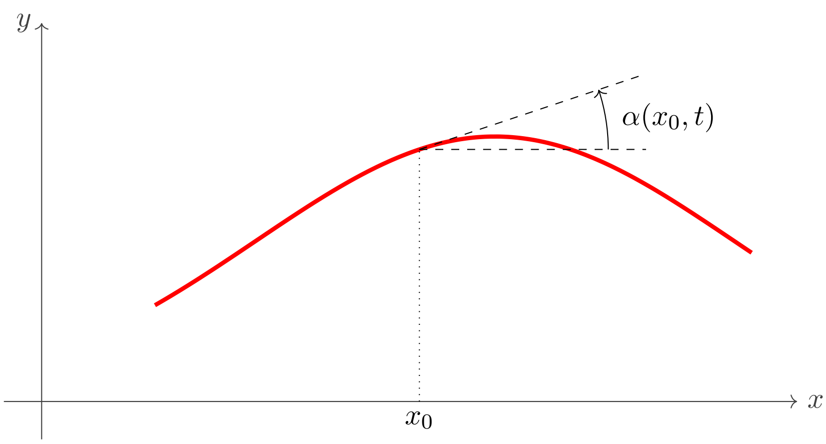


FIGURE 1.2 – Définition de l'angle $\alpha(x,t)$.

On se placera dans l'**approximation des petits angles** : $\alpha(x,t) \ll 1$ pour tout x et pour tout t : l'ébranlement ne soulève que peu la corde. Le poids sera négligé lors de cette étude. Viennent alors les approximations suivantes : $\cos(\alpha) \approx 1$, $\sin(\alpha) \approx \alpha$ et $\tan(\alpha) \approx \alpha$ (voir figure 1.3).

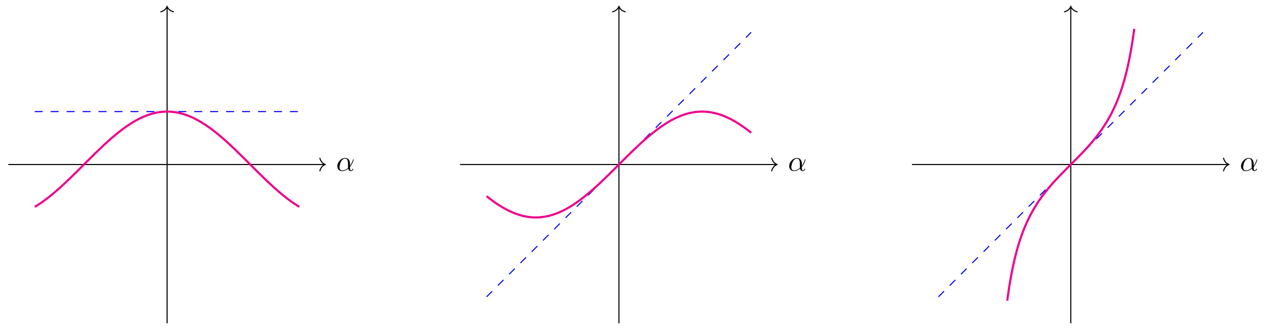


FIGURE 1.3 – Comparaisons : de la fonction cosinus avec la fonction $\alpha \mapsto 1$; de la fonction sinus avec la fonction $\alpha \mapsto \alpha$; de la fonction tangente avec la fonction $\alpha \mapsto \alpha$.

On s'intéresse à un brin de corde Σ de longueur ds, centré autour du point d'abscisse x (voir figure 1.4). Il a une longueur dx selon la direction x et une longueur dy selon la direction y.

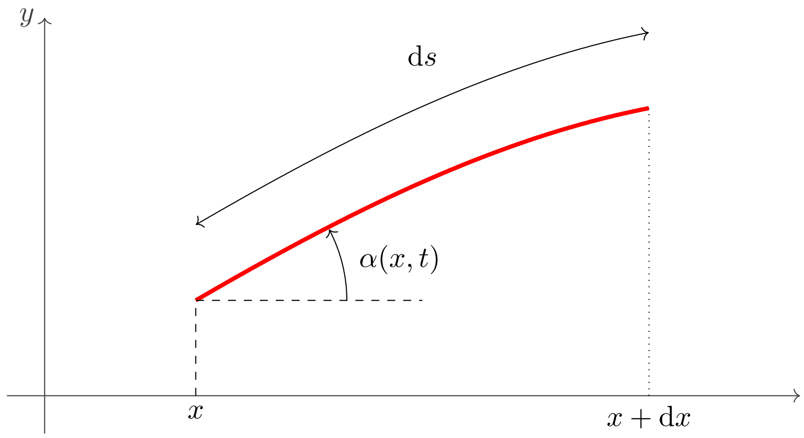


FIGURE 1.4 – Brin de longueur ds.

Question 1 : On rappelle que $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ pour $h \ll a$. Montrer que $\tan\alpha \approx \dfrac{\partial y}{\partial x}$. En utilisant l'approximation des petits angles, déterminer alors une relation simple entre α et $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.

L'objectif est d'appliquer le PFD à ce brin de corde pour déterminer son évolution au cours du temps. On va donc déterminer, dans l'ordre, la masse du système, son accélération, puis le bilan des actions mécaniques extérieures.

1.1.2 Détermination de la masse du système

Question 2 : Exprimer, par une relation trigonométrique, ds en fonction de dx et de α. En déduire que la masse δm du brin est approximativement égale à μdx.

1.1.3 Accélération du système

Question 3 : Dans quelle direction se fait le mouvement du système ? Exprimer alors l'accélération de Σ.

1.1.4 Bilan des actions mécaniques extérieures

Notons $\overrightarrow{T}_g$ la tension exercée par le brin à gauche de la position x sur le système, et $\overrightarrow{T}_d$ celle exercée par le brin à droite de la position $x + \mathrm{d}x$. $T(x)$ est la norme de cette tension à l'abscisse x.

On notera, pour simplifier, tous les vecteurs dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ sous forme de « colonne ».

Question 4 : Exprimer la force $\overrightarrow{T}_g$ en fonction de $T(x)$ et de α. Faire de même pour la force $\overrightarrow{T}_d$. Simplifier ces expressions dans l'approximation des petits angles.

Question 5 : En déduire la résultante des forces de tension $\overrightarrow{R}$.

1.1.5 Application du PFD

Question 6 : Appliquer le PFD à Σ et le projeter dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.

Question 7 : Montrer que T est en réalité uniforme le long de la corde. On notera T_0 cette constante.

Question 8 : Montrer que l'on a $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. On donnera l'expression de c.

Équation de d'Alembert

On dit que $\mathcal{A}(x,t)$ vérifie l'**équation de d'Alembert** si elle vérifie l'identité :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} = 0$$

Une équation de d'Alembert est typique de la propagation sans pertes énergétiques d'une perturbation dans un milieu (c'est-à-dire d'une onde).

1.2 Solutions de l'équation de d'Alembert

Question 9 : Quelle est la dimension de c ? Comment pourrait-on *a priori* l'interpréter ?

Considérons une onde $y(x,t)$ se propageant dans le sens des x croissants. On suppose qu'il n'y a pas de pertes énergétiques le long du déplacement, et on note v la vitesse de propagation de l'onde.

Question 10 : Justifier que $y(x,t) = y(0, t - x/v)$.

On comprend alors que $y(x,t)$ ne dépend en réalité que de la grandeur $t - x/v$. En d'autres termes, $y(x,t)$ est une fonction de la quantité $t - x/v$: $y(x,t) = F(t - x/v)$, avec F une fonction quelconque (par exemple : une exponentielle, un cosinus...).

En particulier, on peut écrire $y(x,t) = f(-v \times (t - x/v)) = f(x - vt)$ avec f une fonction quelconque.

Question 11 : On cherche alors une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme $y_1(x,t) = f(x - vt)$. Montrer que y_1 est solution de l'équation de d'Alembert si $v = c$.

Question 12 : Montrer que toute fonction du type $g(x + ct)$ est solution de l'équation de d'Alembert. Que représente ce type de solution ?

Solutions de l'équation de d'Alembert

Les solutions de l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial x^2} = 0$ peuvent s'écrire $\mathcal{A}(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ où f et g sont des fonctions a priori quelconques.

- c est la **vitesse de propagation** (ou **célérité**) de l'onde ;
- $f(x - ct)$ représente l'onde se propageant dans le sens des x croissants : on parle d'**onde directe** ;
- $g(x + ct)$ représente l'onde se propageant dans le sens des x décroissants : on parle d'**onde rétrograde**.

L'onde associée à une fonction du type $\mathcal{A}(x,t) = f(x - ct)$ ou $\mathcal{A}(x,t) = g(x + ct)$ est appelée **onde progressive**.

1.3 Ondes progressives sinusoïdales

Question 13 : Supposons que la source (en $x = 0$) vibre de façon sinusoïdale. Que peut-on attendre de $y(x, t)$?

Onde progressive sinusoïdale

On appelle **onde progressive sinusoïdale** une fonction du type $\mathcal{A}(x, t) = A_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$:

- La solution $-$ correspond à une propagation selon les x croissants ;
- La solution $+$ à une propagation selon les x décroissants.

ω est la **pulsation de l'onde** (en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) et k est le **nombre d'onde** (en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1}$).

Question 14 : Injecter la solution progressive et sinusoïdale $y(x, t) = Y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$ dans l'équation de d'Alembert. Montrer qu'il existe un lien entre ω, k et c.

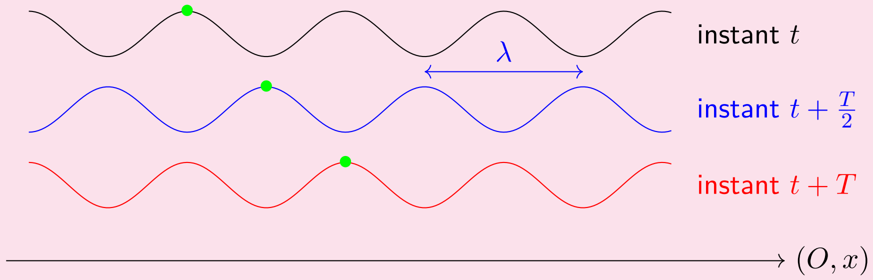
Question 15 : Que vaut $y\left(x, t + \dfrac{2\pi}{\omega}\right)$?

Question 16 : Que vaut $y\left(x+\dfrac{2\pi}{k},t\right)$?

Double périodicité spatiale et temporelle

Une onde progressive sinusoïdale possède une double périodicité :

- Sa **période temporelle** $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ est la durée minimale séparant deux valeurs identiques de l'onde en un point donné : $y(x,t+T)=y(x,t)$;
- Sa **période spatiale** (ou **longueur d'onde**) $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$ est la distance minimale séparant deux points où la valeur de l'onde est la même à un instant donné : $y(x+\lambda,t)=y(x,t)$.



Puisque $\omega=kc$, on a donc : $\lambda=c\times T$.

Question 17 : Supposons que l'on ait $y(0,t)=a\cos(\omega t)$ avec a l'amplitude de la vibration en $x=0$. On cherche $y(x,t)$ sous la forme d'une onde progressive sinusoïdale. Déterminer les valeurs de Y_0 et φ ; en déduire l'expression totale de $y(x,t)$.

1.4 Ondes stationnaires

Prenons l'exemple d'une corde, dont l'extrémité gauche (en $x = 0$) est tenue par Alice et dont l'extrémité droite (en $x = L$) est fixe ; par exemple, accrochée à un mur. Alice lance un coup sec sur la corde (voir figure 1.5 et la vidéo du QR code ci-contre).

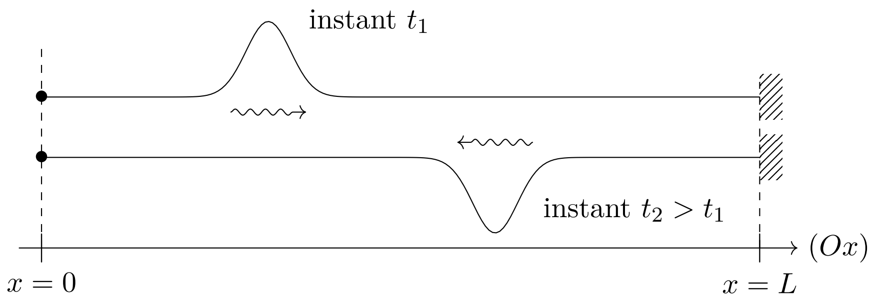


FIGURE 1.5 – Réflexion d'une perturbation le long d'une corde à deux instants t_1 (haut) et t_2 (bas).

On voit que, après la réflexion de l'onde sur le mur, la perturbation se retrouve renversée par rapport à son état d'origine.

Supposons à présent que l'extrémité gauche soit également fixe. On tire un point de la corde vers l'extérieur, puis on le lâche. On cherche les solutions sous forme d'ondes progressives sinusoïdales.

Question 18 : Donner l'expression générale de $y(x,t)$ en fonction notamment du déphasage φ entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. On suppose que les réflexions en $x = 0$ et $x = L$ sont élastiques (pas de perte d'énergie), ce qui entraîne des amplitudes Y_0 identiques pour les deux ondes.

Question 19 : À l'aide de la formule $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, déterminer une expression de $y(x,t)$ où le temps et l'espace sont décorrélés.

Définition et écriture mathématique d'une onde stationnaire

Une **onde stationnaire** est une onde où le temps et l'espace sont décorrélés ; une telle onde peut se mettre sous la forme $\mathcal{A}(x,t) = F(t) \times G(x)$.

Question 20 : En utilisant la condition en $x = 0$, déterminer une condition sur φ. Donner la nouvelle expression de $y(x,t)$.

Question 21 : Quelle condition le mur impose-t-il sur $y(x = L, t)$? Cette condition étant vraie pour tout t, en déduire que, nécessairement, kL doit être un multiple entier de π : $kL = m\pi$ avec $m \in \mathbb{N}$.

Question 22 : Déduire de la question précédente les longueurs d'onde $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ possibles pour l'onde stationnaire, puis les pulsations $\{\omega_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ possibles pour cette même onde.

Modes propres de la corde vibrante

Les **conditions aux limites** de la corde (fixée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$) imposent que les fréquences des ondes stationnaires la parcourant sont **quantifiées** : elles ne peuvent prendre que les valeurs $f_m = \dfrac{mc}{2L}$ où m est un entier positif.
Chacune de ces fréquence f_m définit un **mode propre** m de la corde.
Ainsi, l'équation de la corde vibrante fixée à ses deux extrémités s'écrit :

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin\left(m\frac{\pi c}{L}t + \phi_m\right)\sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right)$$

où les Y_m et ϕ_m sont déterminés par les conditions initiales (forme et vitesse) de la corde.

L'onde stationnaire $y(x,t)$ a été tracée sur la figure 1.6 à différents instants pour observer son évolution, pour le mode propre $m = 5$.

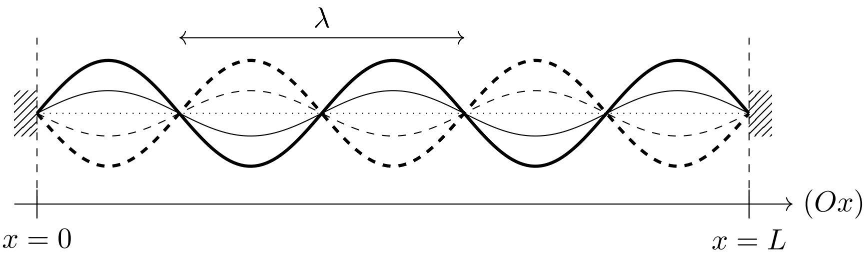


FIGURE 1.6 – Onde stationnaire le long d'une corde à t (gras, plein), $t+T/6$ (plein), $t+T/4$ (pointillés) $t + 2T/6$ (traitillés) et $t + T/2$ (gras, traitillés).

Nœuds et ventres d'une onde stationnaire

Un **nœud de vibration** est une position où la perturbation a une amplitude nulle.
Un **ventre de vibration** est une position où la perturbation a une amplitude maximale.
Deux nœuds ou deux ventres de vibration successifs sont séparés d'une distance $\dfrac{\lambda}{2}$.
Pour la corde vibrante à extrémités liées, un mode propre m contient m ventres et $m + 1$ nœuds.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Établir l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante.
- ☐ Supposons que $y(x,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert. On note c la célérité de l'onde. Quelle est la forme de $y(x,t)$ si l'onde se propage dans le sens des x croissants ? Quelle est la forme de $y(x,t)$ si l'onde se propage dans le sens des x décroissants ?
- ☐ En utilisant le fait que $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$, montrer que la somme d'une onde incidente et d'une onde réfléchie forme une onde stationnaire.
- ☐ Soit une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Montrer qu'une onde stationnaire $y(x,t) = Y_0 \sin(kx + \varphi)\sin(\omega t)$ (avec $\omega = kc$) admet des modes propres, c'est-à-dire que k et ω sont quantifiés.
- ☐ Soit une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Tracer l'allure de la corde pour les modes propres $n = 1$ à différents instants. Idem pour les modes propres $n = 2$ et $n = 3$.

Chapitre 2 : Circuits électriques et ondes électriques

Objectifs :

— Énoncer les équations de Maxwell.

— Interpréter qualitativement le lien entre l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday.

— Exprimer la condition d'application de l'ARQS en fonction de la taille du circuit et de la fréquence des signaux.

Au concours ATS : Aux écrits en 2018.

2.1 Lois de l'électromagnétisme

2.1.1 Équations de Maxwell

Équations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques sont régis les quatre **équations de Maxwell**.
Deux équations concernent le champ électrique $\overrightarrow{E}$:

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Maxwell-Gauss)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Faraday)}$$

Deux équations concernent le champ magnétique $\overrightarrow{B}$:

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{B} = 0 \qquad \text{(Maxwell-Thomson)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Ampère)}$$

Remarque : L'équation de Maxwell-Thomson est parfois appelée *équation de Maxwell relative au flux* ou *équation de Maxwell-flux*.

Question 1 : Rappeler ce que reflètent macroscopiquement chacune de ces équations.

Nous pouvons faire un grand nombre de remarques sur ces équations. Pour chacun des champs :

— sont associées deux équations permettant de les déterminer exactement en tout point de l'espace et à chaque instant (MG, MF pour $\overrightarrow{E}$ et MT, MA pour $\overrightarrow{B}$) ;

— il existe une équation portant sur leurs divergences (MG, MT). Ces équations sont invariantes en statique ;

— il existe une équation portant sur leurs rotationnels (MF, MA). Ces équations dépendent de la variation temporelle de l'autre champ. En statique, les deux champs sont décorrélés ;

— il existe une équation les liant à la matière (ρ et $\overrightarrow{j}$) (MG, MA) ;

— il existe une équation exhibant un potentiel (V, $\overrightarrow{A}$) à leurs origines (MF, MT).

2.1.2 Retour sur la conservation de la charge

On rappelle que div $\overrightarrow{\text{rot}}\ = 0$.

Question 2 : En appliquant l'opérateur divergence à l'équation de Maxwell-Ampère, montrer que l'équation de conservation de la charge est respectée.

☛ *Remarque :* Seul l'ajout du courant de déplacement $\overrightarrow{j_D} \triangleq \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ à l'équation de MA permet d'être en cohérence avec l'équation de conservation de la charge !

2.2 Lois de Kirchhoff

2.2.1 Rappels en régime stationnaire

Loi des mailles

En régime stationnaire, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{E} = \vec{0}$, ce qui permet d'écrire que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$. La tension électrique entre deux points X et Y, définie par $U_{XY} = \int_X^Y \vec{E} \cdot \text{d}\vec{\ell}$, peut alors s'écrire comme :

$$\begin{aligned} U_{XY} &= \int_X^Y \vec{E} \cdot \text{d}\vec{\ell} \\ &= \int_X^Y -\overrightarrow{\text{grad}}\ V \cdot \text{d}\vec{\ell} \\ &= -(V_Y - V_X) \quad \text{par propriété du gradient} \\ &= V_X - V_Y \end{aligned}$$

La loi des mailles $U_{XY} + U_{YZ} + U_{ZX} = 0$ est alors bien valable.

Loi des nœuds

En régime stationnaire, on a div $\vec{j} = 0$, ce qui correspond donc un flux total nul sur une surface fermée grâce au théorème d'Ostrogradski (voir figure 2.1). Ceci impose alors que l'intensité entrante est égale à l'intensité sortante.

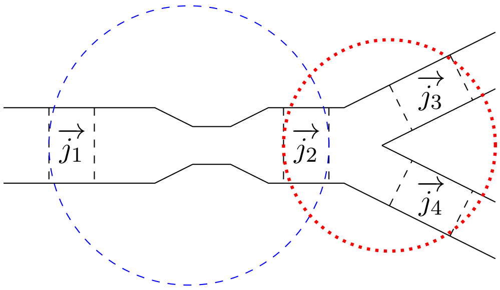


FIGURE 2.1 – Le flux à travers la surface en traitillés est nulle : $-j_1 \times S_1 + j_2 \times S_2 = 0$, c'est-à-dire : $-i_1 + i_2 = 0$, ou $i_1 = i_2$. C'est la conservation du courant.
Le flux à travers la surface en pointillés est nulle : $-j_2 \times S_2 + j_3 \times S_3 + j_4 \times S_4 = 0$, c'est-à-dire : $-i_2 + i_3 + i_4 = 0$, ou $i_2 = i_3 + i_4$. C'est la loi des noeuds.

Les deux lois de Kirchhoff sont-elles alors encore valable en régime variable ?

2.2.2 Validité dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires

Approximation des régimes quasi-stationnaires

L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ou ARQS) consiste à considérer comme négligeable le temps de propagation Δt des ondes électromagnétiques devant la période du signal T : $\Delta t \ll T$.
Si l'on note L la longueur caractéristique d'un circuit électrique et λ la longueur d'onde du signal, l'ARQS peut se traduire par : $L \ll \lambda$.

Question 3 : Rappeler le lien entre c, T et λ. Donner également celui entre c, Δt et L. Montrer l'équivalence entre les deux définitions de l'ARQS.

Question 4 : Le courant industriel fourni par le secteur a une fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Que vaut la longueur d'onde du signal électrique, en prenant $c = 2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pour la vitesse de propagation dudit signal ? Est-on dans l'ARQS pour des circuits de la dimension d'une ville ? D'un pays comme la France ?

Question 5 : Prenons un émetteur haute-fréquence, de fréquence $f = 10\,\mathrm{MHz}$. Que vaut la longueur d'onde du signal électrique, en prenant $c = 2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pour la vitesse de propagation dudit signal ? Est-on dans l'ARQS pour des circuits de la dimension d'une ville ? D'une paillasse de TP ?

2.2.3 Conséquences de l'ARQS

Équation de Maxwell-Ampère et loi des nœuds

En régime variable, on a div $\overrightarrow{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$: cette dérivée temporelle n'a a priori aucune raison d'être nulle ! La loi des nœuds n'est donc pas systématiquement valable...

Cherchons la conséquence de l'ARQS dans l'équation de Maxwell-Ampère. Pour cela, nous allons comparer $\overrightarrow{j_D} \triangleq \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ et $\overrightarrow{j}$, en supposant le circuit ohmique ($\overrightarrow{j} = \gamma.\overrightarrow{E}$), et en prenant un champ électrique variant sinusoïdalement dans le temps avec une pulsation ω.

Question 6 : Montrer que $\dfrac{\left\|\overrightarrow{j_D}\right\|}{\left\|\overrightarrow{j}\right\|} \sim \dfrac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}$.

Question 7 : Pour les fréquences utilisables en pratique, déterminer la valeur de $\dfrac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma}$. En déduire quel courant est négligeable face à l'autre. On rappelle la valeur de la permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ et la conductivité électrique du cuivre $\gamma_{\mathrm{Cu}} = 6 \times 10^{7}\,\mathrm{S \cdot m^{-1}}$.

Conséquence de l'ARQS pour l'équation de Maxwell-Ampère

L'ARQS a pour conséquence de négliger le courant de déplacement $\overrightarrow{j_D} \triangleq \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ face au courant de conduction $\overrightarrow{j}$ dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\left\|\varepsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right\| \ll \left\|\overrightarrow{j}\right\|$$

L'équation de Maxwell-Ampère devient donc : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j}$.

Question 8 : Que devient alors l'équation de conservation de la charge ?

Conséquence de l'ARQS pour l'équation de conservation de la charge

L'ARQS a pour conséquence de considérer la divergence du courant de conduction nulle : $\operatorname{div} \overrightarrow{j} = 0$.

Conséquence de l'ARQS pour la loi des nœuds

Puisque $\operatorname{div} \overrightarrow{j} = 0$, la loi des nœuds est toujours valable dans l'ARQS.

Loi des mailles

En régime variable, on a[1] $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V - \dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ avec V le potentiel électrique et $\overrightarrow{A}$ le potentiel magnétique.

Soit une maille électrique. La circulation, sur un contour nécessairement fermé, du champ électrique sur cette maille vaut donc :

$$\oint_{\text{circuit}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \oint_{\text{circuit}} -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} + \oint_{\text{circuit}} -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$$

Étudions chaque terme :

- Le membre de gauche $\oint_{\text{circuit}} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ correspond à la « somme des tensions » dans la maille. Elle est égale à zéro en régime statique, et cette nullité traduit la loi des mailles usuelle. Écrivons-la, pour la suite, comme $\displaystyle\sum_{i \in \text{maille}} U_i$, avec i représentant un segment de la maille ;
- Le premier terme du membre de droite $\oint_{\text{circuit}} -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ est nul. En effet, on sait[2] que :

  $$\int_X^Y -\overrightarrow{\text{grad}}\,(V) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = V(X) - V(Y)$$

  Ainsi, sur un contour fermé tel que notre maille, $X = Y$ et donc $V(X) - V(Y) = 0$;
- Le second terme du membre de droite $\oint_{\text{circuit}} -\dfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}$ correspond à la tension induite e_{ind} dans la maille[3].

On en déduit que $\displaystyle\sum_{i \in \text{maille}} U_i = e_{\text{ind}}$: cette tension n'a aucune raison d'être nulle sur sur une maille, en régime variable !

1. Résultat vu dans le thème 7. On rappelle, entre autres, que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$.
2. Résultat vu dans le thème 5.
3. $\displaystyle\oint_{\text{circuit}} -\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_{\text{circuit}} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \overset{\text{Stokes}}{=} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_{\mathcal{S}_{\text{circuit}}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_{\mathcal{S}_{\text{circuit}}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = e_{\text{ind}}$

On fait alors un « tour de passe-passe » : cette dernière égalité peut s'écrire $\sum_{i \in \text{maille}} U_i - e_{\text{ind}} = 0$. En schématisant la maille, on va alors ajouter aux résistors, générateurs, condensateurs, etc. un dipôle de tension $-e_{\text{ind}} = -\left(-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. On retrouve alors bien une loi des mailles.

Conséquence de l'ARQS pour la loi des mailles

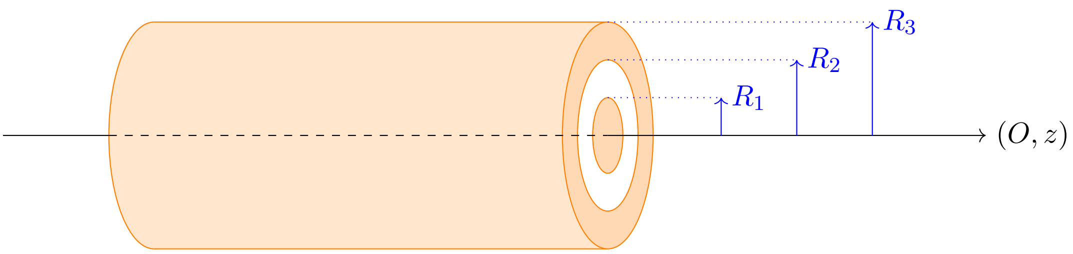
Dans l'ARQS, la loi des mailles est toujours valable si l'on modélise les effets d'auto-induction par un dipôle d'auto-inductance égale à l'auto-inductance totale de ladite maille.

Complément : Onde dans un câble coaxial

Position du problème

On considère un câble coaxial, constitué de deux cylindres conducteurs imbriqués l'un dans l'autre, mais n'étant pas en contact. Les deux axes de révolution sont identiques.

Le premier cylindre conducteur, plein, a un rayon R_1. Entre R_1 et R_2 se situe un isolant, puis l'ensemble est entouré par le deuxième conducteur contenu entre les rayons R_2 et R_3 (voir figure ci-dessous).

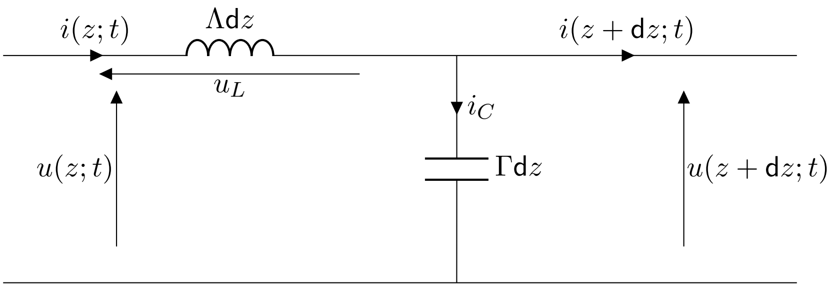


Le conducteur central (« l'âme ») est parcouru par un courant total I orienté dans le même sens que l'axe (O, z). Le conducteur externe est parcouru par un courant total I orienté dans le sens opposé à l'axe (O, z).

On a démontré dans les thèmes précédents que :

- sur chacune des armatures du câble peuvent apparaître des défauts ou des excès de charge, qui conduisent à une capacité linéique (en farad par mètre) $\Gamma = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$;
- à l'influence magnétique des deux armatures correspond une inductance linéique (en henry par mètre) $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln(R_2/R_1)$.

On peut alors modéliser une tranche $\mathrm{d}z$ du câble par le circuit ci-dessous :



Établissement de l'équation d'onde

Question 9 : À l'aide de la loi des mailles, exprimer $u(z,t)$ en fonction de $u(z+\mathrm{d}z,t)$ et u_L. En déduire alors que l'on a $\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}$.

Question 10 : À l'aide de la loi des nœuds, exprimer $i(z,t)$ en fonction de $i(z+\mathrm{d}z,t)$ et i_C. En déduire alors que l'on a $\dfrac{\partial i}{\partial z} = -\Gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Question 11 : Dériver la première équation par rapport au temps, et la deuxième par rapport à l'espace. En déduire que l'on a $\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\Lambda\Gamma}\dfrac{\partial^2 i}{\partial z^2} = 0$. Comment se nomme cette équation ?

Question 12 : Déterminer l'expression de la vitesse c de l'onde électrique. La calculer, sachant que $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$. Commenter.

☛ *Remarque :* En réalité, le milieu entre les deux armatures du câble coaxial est un isolant dont la constante diélectrique vaut $\varepsilon > \varepsilon_0$. Ainsi, on trouve en réalité une célérité des ondes électriques plus faible que la célérité de la lumière.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Énoncer les quatre équations de Maxwell, en donnant leurs noms et significations physiques.
- ☐ En quoi consiste l'approximation des régimes quasi-stationnaires ? Est-elle valable à l'échelle d'une paillasse de TP/d'une ville/de la France pour la fréquence industrielle ($f = 50\,\mathrm{Hz}$) ? pour une fréquence de $f = 10\,\mathrm{MHz}$? On admettra que la vitesse de propagation des ondes électriques est $c \approx 2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
- ☐ Montrer que, dans l'ARQS, le courant de déplacement $\overrightarrow{j_D} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ est négligeable face au courant de conduction $\overrightarrow{j}$. Quelle conséquence en tire-t-on ?

Chapitre 3 : Ondes thermiques

Objectifs :

- Définir une onde plane, une onde plane progressive et une onde place progressive harmonique. Expliquer la pertinence et les limites de ces modèles.
- Établir une distance ou un temps caractéristique d'atténuation en utilisant le modèle de l'onde plane en géométrie unidirectionnelle.

Au concours ATS : Aux écrits en 2017. Le vocabulaire est à maîtriser aussi bien aux écrits qu'aux oraux.

3.1 Classification des ondes

3.1.1 De l'onde sphérique à l'onde plane

Vecteur d'onde et front d'onde

Soit une onde se propageant selon la direction et le sens du vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$. Le **vecteur d'onde** $\overrightarrow{k}$ est défini par :

$$\overrightarrow{k} = k.\overrightarrow{u}$$

où $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, avec λ la longueur d'onde.

Les **fronts d'onde** correspondent alors à des surface auxquelles le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ est orthogonal en tout point.

Question 1 : Considérons une onde lumineuse provenant du Soleil. On se place en coordonnées et en base sphériques. Donner l'expression de $\overrightarrow{k}_{\text{lum}}$ en fonction de λ, longueur d'onde du rayonnement associé. En déduire la géométrie du front d'onde.

Question 2 : Que peut-on dire du front d'onde parvenant à la Terre ? On donne la distance Terre-Soleil $d_{TS} = 150 \times 10^6\,\text{km}$ et le rayon de la Terre $R_T = 6{,}4 \times 10^3\,\text{km}$.

> **Onde plane**
>
> Une **onde plane** est une onde dont les fronts d'onde sont des plans infinis. Nécessairement, le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ d'une onde plane est uniforme : $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{k_0}$.
> Une onde plane n'a pas de réalité physique, car elle transporterait une énergie infinie sur tout son front d'onde (infini). Il ne s'agit que d'une « simplification locale » de l'onde sphérique.

☛ *Remarque* : Si l'on a par exemple $\overrightarrow{k} = k_0.\overrightarrow{u_z}$, il vient que $\mathcal{A}(M,t)$ est une onde plane si et seulement si cette onde ne dépend spatialement que de z : $\mathcal{A}(M,t) = \mathcal{A}(z,t)$.

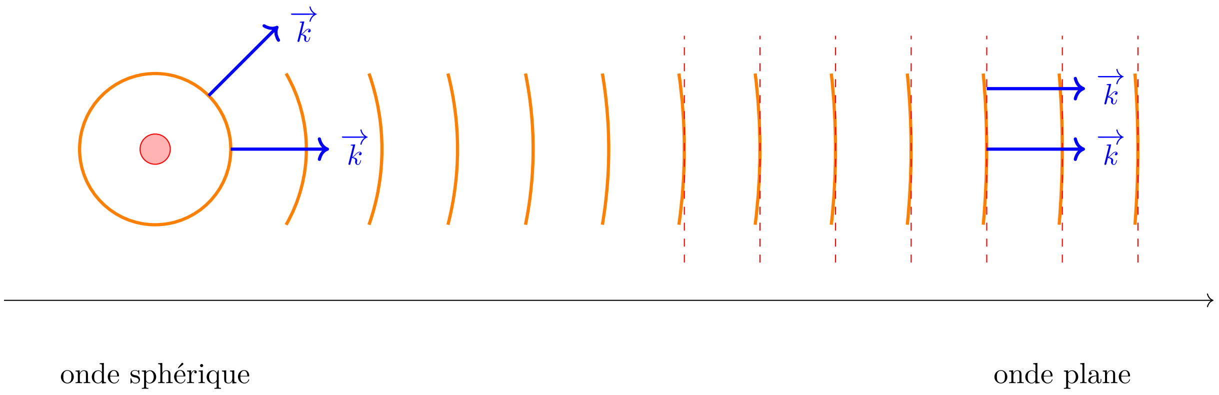


Figure 3.1 – De l'onde sphérique à l'onde plane.

3.1.2 Onde plane progressive, onde plane progressive harmonique

> **Onde plane progressive**
>
> On dit qu'une onde $\mathcal{A}(M,t)$ est une **onde plane progressive** si et seulement si :
>
> $$\mathcal{A}(M,t) = f(z - ct)$$

Question 3 : L'onde $\mathcal{A}_1(M,t) = A_1 \times e^{\frac{z-ct}{\lambda}}$ est-elle plane ? progressive ?

Question 4 : L'onde $\mathcal{A}_2(M,t) = \dfrac{A_2}{z} \times \cos(z - ct)$ est-elle plane ? progressive ?

Onde plane progressive harmonique

On dit qu'une onde $\mathcal{A}(M,t)$ est une **onde plane progressive harmonique** (OPPH) si et seulement si :

$$\mathcal{A}(M,t) = A_0 \cos(kz - \omega t)$$

☛ *Remarque :* On n'a pas forcément $\omega = kc$ pour une OPPH !

3.2 Application à l'équation de la chaleur

3.2.1 Position du problème

Considérons une onde thermique provenant du sol ($z = 0$) et se propageant en profondeur (dans le sens des z croissants ; (O,z) est donc l'axe vertical descendant).

L'onde à la surface est sinusoïdale : elle varie selon le cycle journalier. On a donc $T(z=0,t) = T_{\text{moy}} + T_0 \cos(\omega t)$ avec $T_{\text{moy}} = 15\,°\text{C}$ et $T_1 = 5\,°\text{C}$.

Question 5 : Donner la valeur de ω.

Pour le reste de l'énoncé, on pose $\theta(z,t) = T(z,t) - T_{\text{moy}}$.

Question 6 : On cherche $\theta(z,t)$ sous forme d'une OPPH. Justifier ce choix.

Question 7 : Donner l'expression mathématique de $\theta(z,t)$, en notant θ_0 son amplitude et φ sa phase. En utilisant la condition en $z = 0$, déterminer les valeurs de θ_0 et φ. Quelle est la seule inconnue ?

3.2.2 Effet de cave

L'équation de la chaleur est toujours valable pour $\theta(z,t)$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

où $D = \dfrac{\lambda}{\mu c} = 5{,}4 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$ est la diffusivité thermique du sol, constitué principalement de béton.

On utilise de plus la notation complexe : $\underline{\theta}(z,t) = \theta_0 e^{j(kz-\omega t)}$.

Question 8 : Que valent $\dfrac{\partial \theta}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial \theta}{\partial z}$? Réécrire alors l'équation de la chaleur pour la fonction complexe $\underline{\theta}(z,t)$.

Question 9 : En déduire une relation entre k, ω et D. Que peut-on dire de k ?

Question 10 : En utilisant le fait que $j = e^{j\pi/2}$, montrer que l'on a $\underline{k} = \pm\dfrac{1+j}{\delta}$. Donner l'expression de δ en fonction de ω et D.

Il vient nécessairement que l'on a :

$$\begin{aligned}
\underline{\theta}(z,t) &= A\exp\left(j\left(\frac{1+j}{\delta}z - \omega t\right)\right) + B\exp\left(j\left(-\frac{1+j}{\delta}z - \omega t\right)\right)\\
&= A\exp\left(j\frac{z}{\delta} - j\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + B\exp\left(-j\frac{z}{\delta} - j\omega t + \frac{z}{\delta}\right)\\
&= Ae^{j(z/\delta - \omega t)}e^{-z/\delta} + Be^{-j(z/\delta + \omega t)}e^{z/\delta}
\end{aligned}$$

Question 11 : Que représente la deuxième partie de la solution ? Justifier de deux manières que l'on a $B = 0$.

Question 12 : En déduire alors l'expression de $\theta(z,t)$ en fonction notamment de T_0 et δ, puis celle de $T(z,t)$.

Question 13 : Déterminer la dimension puis la valeur de δ. Quel sens physique pourrait-on lui donner ?

Question 14 : Déterminer à quelle profondeur H on ne ressent pas plus d'un écart de $1\,°\mathrm{C}$ par rapport à la température moyenne au cours d'une journée.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Définir le vecteur d'onde et un front d'onde.
- ☐ Qu'est-ce qu'une onde plane ? A-t-elle une réalité physique ?
- ☐ Qu'est-ce qu'une onde plane progressive ? Une onde plane progressive harmonique ? Définir chacun des termes.

Chapitre 4 : Propagation d'une onde électromagnétique dans le vide

Objectifs :

— Énoncer les équations de Maxwell dans le vide.
— Établir l'équation de propagation des champs dans le vide.
— Décrire la structure d'une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement. Expliquer la pertinence de ce modèle.
— Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.

Au concours ATS : Aux écrits en 2021. Tombe régulièrement aux oraux.

4.1 Équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

4.1.1 Laplacien scalaire, laplacien vectoriel

Revenons sur deux équations d'onde que nous avons démontrées précédemment :

- L'équation de la chaleur : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$;
- L'équation de la propagation d'un ébranlement le long d'une corde : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

On dit que ces équations sont unidirectionnelles : on ne regarde la propagation de l'onde que dans une direction (ici, x).

Considérons une démonstration plus générale, c'est-à-dire tridimensionnelle. Le premier principe enthalpique s'écrit $\mathrm{d}H = \delta Q$, c'est-à-dire : $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{th}}$ avec $\mathcal{P}_{\text{th}}$ la puissance thermique reçue (positive si elle est effectivement reçue, négative si elle est cédée à l'extérieur).

On note $\mathcal{V}$ le volume du système étudié et $\mathcal{S}$ la surface fermée délimitant ce volume.

Question 1 : Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \iiint\limits_{\mathcal{V}} \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}V$.

Question 2 : Exprimer $\mathcal{P}_{\text{th}}$ en fonction de $\overrightarrow{j_Q}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{S^{\text{ext}}}$.

Question 3 : En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski $\displaystyle\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S^{\text{ext}}} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \overrightarrow{A} \mathrm{d}V$, établir un lien entre $\overrightarrow{j_Q}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

Question 4 : Rappeler la loi de Fourier. En déduire une nouvelle équation.

Laplacien scalaire

On appelle **laplacien scalaire** d'une fonction f la grandeur :

$$\Delta f = \text{div } \overrightarrow{\text{grad}}\ f$$

Il correspond à la généralisation de la dérivée seconde d'une fonction scalaire en trois dimensions. Son expression en coordonnées cartésiennes est

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Question 5 : Vérifier que l'on a effectivement $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Que dire alors de la dérivée seconde d'une grandeur vectorielle $\overrightarrow{A} = A_x.\overrightarrow{e_x} + A_y.\overrightarrow{e_y} + A_z.\overrightarrow{e_z}$?

Question 6 : Montrer que $\Delta\overrightarrow{A} = (\Delta A_x).\overrightarrow{e_x} + (\Delta A_y).\overrightarrow{e_y} + (\Delta A_z).\overrightarrow{e_z}$.

Laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel d'un vecteur $\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ s'exprime, <u>en coordonnées cartésiennes</u>, par :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$$

4.1.2 Équations de Maxwell dans le vide

Définition du vide en électromagnétisme

En électromagnétisme, le **vide** (ou « **vide de courants et de charges** ») correspond à une absence de matière : on a donc $\rho = 0$ et $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$.
Des ondes électromagnétiques peuvent cependant s'y propager : $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont *a priori* non-nuls.

Question 7 : Donner les quatre équations de Maxwell dans le vide.

4.1.3 Équation de d'Alembert pour le champ électrique

On admet [1] la formule d'analyse vectorielle suivante : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{div}\ \overrightarrow{A} - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{A}$.

Question 8 : Par la formule d'analyse vectorielle et l'équation de Mawell-Gauss, montrer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E}$.

Question 9 : En utilisant les équations de Maxwell-Faraday puis de Maxwell-Ampère, montrer que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{E} = -\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$.

Question 10 : En déduire que l'équation vérifiée par le champ électrique. Déterminer l'expression et la valeur de c, vitesse de propagation associée. On rappelle que $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$ et $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$. Commenter.

1. C'est un exercice du TD.

Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Le champ électrique et le champ magnétique[a] se propagent dans le vide en suivant l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} - c^2 \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{E} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \overrightarrow{B}}{\partial t^2} - c^2 \overrightarrow{\Delta} \overrightarrow{B} = 0$$

La vitesse de propagation de ces ondes électrique et magnétique est $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$: c'est la vitesse de la lumière dans le vide. On admet alors que la lumière est en réalité une onde électromagnétique, c'est-à-dire une onde associée à un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$.

a. Voir TD pour le champ magnétique.

4.2 Polarisation d'une onde électromagnétique

4.2.1 Spectre

Polarisation d'une onde électromagnétique

La **polarisation** d'une onde électromagnétique correspond à la direction du champ électrique $\overrightarrow{E}$. Elle peut *a priori* dépendre du temps.

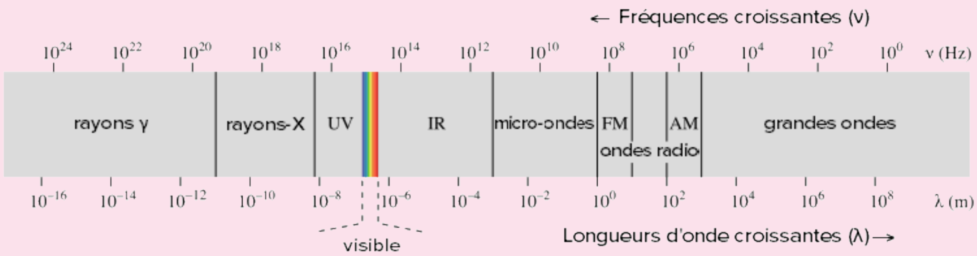
☛ *Remarque :* Connaître la polarisation d'une onde électromagnétique suffit à la décrire, car on peut déterminer le champ $\overrightarrow{B}$ à partir de l'équation de Maxwell-Ampère ou de celle de Maxwell-Faraday.

Prenons l'exemple d'une OPPH électromagnétique se propageant dans le sens des x croissants ; on note *a priori* $\overrightarrow{E}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \cos(kx - \omega t + \varphi_x) \\ E_{0,y} \cos(kx - \omega t + \varphi_y) \\ E_{0,z} \cos(kx - \omega t + \varphi_z) \end{pmatrix}$.

Question 11 : Montrer que pour une OPPH, on a $\omega = kc$. On utilisera l'équation d'onde.

Spectre des ondes électromagnétiques

Une onde électromagnétique se propageant dans le vide est partiellement décrite par la donnée de sa longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$.
Le spectre des ondes électromagnétique est composé de différentes régions. Le visible est contenu entre les longueurs d'onde $\lambda_V = 400\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_R = 800\,\mathrm{nm}$, ce qui correspond respectivement aux fréquences $f_V = 4 \times 10^{-14}\,\mathrm{Hz}$ et $f_V = 8 \times 10^{-14}\,\mathrm{Hz}$.



☛ *Remarque :* On peut citer des applications techniques et scientifiques pour chacune des régions : imagerie médicale et médecine nucléaire pour les rayons γ et X, luminothérapie et désinfection pour les UV, spectroscopie et thermographie pour les IR, radars et fours pour les micro-ondes, communication pour les ondes radio.

4.2.2 Structure d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

Question 12 : Montrer que l'on peut simplifier l'expression de $\overrightarrow{E}(x, y, z, t)$ dans le cas où $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z \triangleq \varphi$. Tracer alors l'allure du champ électrique au cours du temps.

Onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

Soit une onde électromagnétique se propageant selon le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$. On dit que cette **OPPM est polarisée rectilignement** si on peut l'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E_0} \cos\left(\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t + \varphi\right)$$

où le vecteur $\overrightarrow{E_0}$ ne dépend ni de l'espace, ni du temps, et $\overrightarrow{r} = x.\overrightarrow{u_x} + y.\overrightarrow{u_z} + z.\overrightarrow{u_z}$.
L'écriture complexe de cette onde est alors :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \overrightarrow{E_0}\ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)}$$

☛ *Remarque :* La plupart des ondes électromagnétiques ne sont pas à polarisation rectiligne. On peut toutefois superposer trois ondes polarisées rectilignement selon x, y et z avec trois valeurs de φ différentes pour retrouver l'onde totale.

Question 13 : Exprimer simplement $\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}$, div $\underline{\overrightarrow{E}}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\ \underline{\overrightarrow{E}}$ à l'aide notamment de ω et $\overrightarrow{k}$.

Question 14 : Que nous apprend l'équation de Maxwell-Gauss ? Pourrait-on dire la même chose du champ magnétique ?

Transversalité des ondes életromagnétiques

Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique et polarisée rectilignement est **transverse** : si la direction de propagation est selon la direction $\overrightarrow{k}$, alors $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ seront orthogonaux à cette direction.

Question 15 : Déterminer une expression de $\underline{\overrightarrow{B}}$ en fonction de $\overrightarrow{k}$, ω et $\underline{\overrightarrow{E}}$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday.

Orthogonalité des champs électrique et magnétique

Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ associés à une onde électromagnétique se propageant selon $\overrightarrow{k}$ sont orthogonaux : $\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{E}$.
Il vient donc, si l'on rajoute la propriété de transversalité, que $\left(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base orthogonale directe. En particulier, en notation complexe pour une OPPM polarisée rectilignement :

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\overrightarrow{k} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}}{\omega}$$

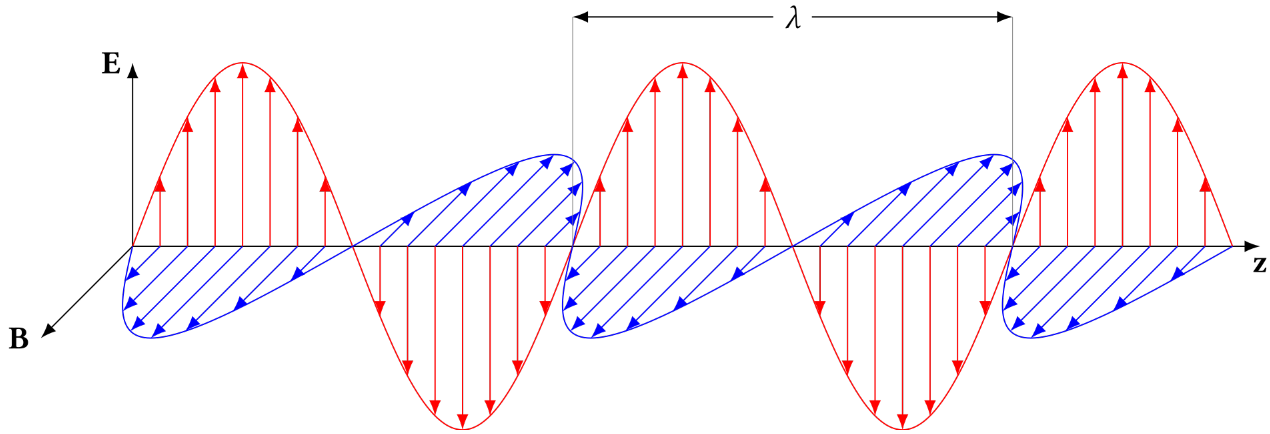


FIGURE 4.1 – Propagation d'une onde électromagnétique selon la direction z. By Francois frwiki - Own work, CC BY-SA 4.0, https ://commons.wikimedia.org/w/index.php ?curid=108645646

Question 16 : Montrer que l'on a forcément $B = E/c$.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit $f(x, y, z)$ un champ scalaire. Donner l'expression du laplacien scalaire de f en coordonnées cartésiennes. Faire l'application sur $f(x, y, z) = x^2 - y^5 e^{z/x}$.
- ☐ Soit $\overrightarrow{A}(x, y, z)$ un champ vectoriel. Donner l'expression du laplacien vectoriel de $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes. Faire l'application sur $\overrightarrow{A}(x, y, z) = x^2y^3.\overrightarrow{e_x} - (z^5 + y^2).\overrightarrow{e_y}$.
- ☐ Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. À l'aide de la relation d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ - \overrightarrow{\Delta}$, établir l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique $\overrightarrow{E}$. Donner l'expression de la vitesse de propagation des ondes électriques.
- ☐ Soit une onde électromagnétique dont le champ électrique est $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(kx - \omega t).\overrightarrow{u_y}$. Selon quelle direction se propage l'onde ? Quelle est sa polarisation ? Montrer, à l'aide de l'équation de d'Alembert, que l'on a $\omega = kc$.
- ☐ Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
- ☐ Qu'est-ce qu'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ? Que peut-on dire du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ pour une telle onde dans le vide ? Montrer que l'on a nécessairement $B = E/c$.

Chapitre 5 : Énergie d'une onde électromagnétique dans le vide

Objectifs :

— Décrire un bilan d'énergie électromagnétique dans le cas du vide et définir le vecteur de Poynting.

— Citer des ordres de grandeur de flux énergétiques moyens (Laser, flux solaire, etc.)

— Utiliser le flux du vecteur de Poynting à travers une surface orientée pour évaluer la puissance rayonnée.

— Décrire la propagation de l'énergie des ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement.

Au concours ATS : Aux écrits en 2021. Tombe régulièrement aux oraux.

5.1 Motivation et rappels sur l'énergie électromagnétique

Nous avons précédemment établi des équations de conservation :

- L'équation de conservation de la charge $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\vec{j}) = 0$ avec ρ la densité volumique de charges et $\vec{j}$ le courant de charges ;
- L'équation de conservation de l'énergie thermique $\dfrac{\partial h}{\partial t} + \text{div}\,\left(\overrightarrow{j_Q}\right) = 0$ avec h la densité volumique d'enthalpie et $\overrightarrow{j_Q}$ le courant de chaleur ;
- L'équation de conservation de la masse $\dfrac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}\,\left(\vec{J}\right) = 0$ avec μ la densité volumique de masse (ou masse volumique) et $\vec{J}$ le courant de masse.

Chacune de ces équations retranscrit la « non-disparition » de certaines quantités ; respectivement : la charge électrique, l'énergie thermique et la masse. En effet, ces équations peuvent se mettre sous la forme $\dfrac{\partial X}{\partial t} = -\text{div}\,\left(\overrightarrow{j_X}\right)$: la variation temporelle positive (respectivement : négative) de X correspond à une sortie (respectivement : une entrée) X dans le système étudié.

Il est à noter que X est alors toujours la densité volumique de la quantité à conserver.

Densité volumique d'énergie électromagnétique

On appelle **densité volumique d'énergie électromagnétique** la quantité :

$$u_{\text{em}} = u_e + u_m = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

Remarque : $\vec{A}^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = \left\|\vec{A}\right\|^2 \triangleq A^2$.

Remarque : Les expressions de u_e et u_m ont été déterminées dans les chapitres sur le condensateur et la bobine. On ne fait ici que les généraliser.

La problématique est donc de savoir si l'on peut déterminer une équation du type $\dfrac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}\,\left(\overrightarrow{j_{\text{em}}}\right) = 0$, afin de témoigner de la conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide.

5.2 Établissement de l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique

Question 1 : En utilisant les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, montrer que $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{\mu_0}\left(\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{B} - \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E}\right)$.

Question 2 : En utilisant la formule d'analyse vectorielle div $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{a} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{b}$, montrer que l'on a $\dfrac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = -\text{div}\left(\overrightarrow{\Pi}\right)$. Donner l'expression de $\overrightarrow{\Pi}$.

Vecteur de Poynting

On définit le **vecteur de Poynting** par :

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$$

Il est également parfois noté $\overrightarrow{R}$ ou $\overrightarrow{S}$.

Équation locale de Poynting

L'**équation locale de Poynting** décrit à l'échelle mésoscopique la conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}\ \overrightarrow{\Pi} = 0$$

Question 3 : En intégrant sur un volume $\mathcal{V}$ et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, montrer que l'on peut écrire $\dfrac{\mathrm{d}U_{\text{em}}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_{\text{ray}}$ avec U_{em} l'énergie électromagnétique totale et $\mathcal{P}_{\text{ray}}$ une puissance électromagnétique rayonnée vers l'extérieur.

Interprétation du vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ représente localement la densité surfacique de puissance électromagnétique rayonnée.
Ainsi, la puissance rayonnée sur une surface quelconque $\mathcal{S}$ est égale au flux du vecteur de Poynting à travers cette même surface :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\Pi} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

On en déduit que le vecteur de Poynting s'exprime en $\mathrm{W/m^2}$.

5.3 Étude énergétique d'une OPPM polarisée rectilignement

On prend l'exemple d'une OPPM polarisée rectilignement : $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(kx - \omega t).\overrightarrow{u_y}$.

Question 4 : Quelle est l'expression de $\overrightarrow{k}$?

Question 5 : Donner l'écriture de $\underline{\overrightarrow{E}}$; en déduire celle de $\underline{\overrightarrow{B}}$, puis celle de $\overrightarrow{B}$. On rappelle que, dans le cas du vide, on a $\omega = kc$.

Question 6 : Déterminer alors l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$. Quelle est sa direction ? Commenter.

Question 7 : Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie u_{em}. On rappelle que $c^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Question 8 : Vérifier l'équation locale de Poynting.

Question 9 : Pour une onde visible de longueur d'onde $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$, quelle est la fréquence f associée ? Que peut-on en déduire pour $\overrightarrow{\Pi}$?

Moyenne temporelle du flux du vecteur de Poynting

Un capteur photométrique, qu'il s'agisse d'un œil ou d'une photodiode, possède un temps de réponse qui ne dépasse généralement pas la nanoseconde.
Il vient que le vecteur de Poynting effectif est en réalité égal à la moyenne temporelle du vecteur de Poynting :

$$\overrightarrow{\Pi^{\text{eff}}} = \left\langle \overrightarrow{\Pi}(t) \right\rangle$$

Nécessairement, la puissance rayonnée effective est égale à :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}}^{\text{eff}} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\Pi^{\text{eff}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Remarque : $\langle \cos(kx - \omega t) \rangle = 0$ mais $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \dfrac{1}{2}$.

Remarque : La norme de $\overrightarrow{\Pi^{\text{eff}}}$ est appelée éclairement énergétique ou irradiance $\mathcal{E}_e$. On peut citer sa valeur pour le rayonnement solaire au sommet de l'atmosphère : $\mathcal{E}_e = 1361\,\mathrm{W/m^2}$; pour le rayonnement solaire au niveau du sol : $\mathcal{E}_e \approx 1000\,\mathrm{W/m^2}$; pour un pointeur laser $\mathcal{E}_e \approx 100\,\mathrm{W/m^2}$.

Question 10 : Calculer la puissance rayonnée effective $\mathcal{P}_{\text{ray}}^{\text{eff}}$ à travers une surface S située à l'abscisse x et orthogonale à la direction de propagation $\overrightarrow{k}$.

Question 11 : Déterminer la valeur moyenne de u_{em}. « Comparer » à $\mathcal{P}_{\text{ray}}^{\text{eff}}$ et commenter.

Compléments sur la notation complexe

Il est aisément possible de déterminer des valeurs moyennes à partir des grandeurs complexes en retenant le fait que la valeur moyenne d'un cosinus au carré vaut $1/2$.

Moyenne du carré d'un signal en représentation complexe

Soit un signal sinusoïdal $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$, que l'on note sous forme complexe $\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$.
On note le complexe conjugué de $\underline{x}(t)$ sous la forme :

$$\underline{x}^*(t) = X_0 e^{-j(\omega t+\varphi)}$$

La valeur moyenne $\langle x^2(t)\rangle$ est alors donnée par :

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{x} \times \underline{x}^*\right)$$

Moyenne du produit de deux signaux en représentation complexe

Soit deux signaux sinusoïdaux $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et $y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \psi)$ de même pulsation, que l'on note sous forme complexe $\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\underline{y}(t) = Y_0 e^{j(\omega t+\psi)}$.
La valeur moyenne $\langle x(t) \times y(t)\rangle$ est alors donnée par :

$$\langle x(t) \times y(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{x} \times \underline{y}^*\right)$$

Question 12 : Montrer que l'expression de $\overrightarrow{\Pi^{\text{eff}}}$ est plus facilement déterminable par ce moyen.

Question 13 : De même, déterminer $\langle u_{\text{em}}\rangle$ de cette manière.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner les expressions de la densité volumique d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting. Que représente physiquement ce vecteur ? Énoncer l'équation locale de Poynting ; quelle est sa signification physique ?
- ☐ Soit une OPPM polarisée rectilignement : $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(kx - \omega t).\overrightarrow{u_y}$. Déterminer $\overrightarrow{B}$, puis $\overrightarrow{\Pi}$. Commenter sa direction. Calculer la puissance rayonnée à travers une surface S orthogonale à l'axe (O, x).

Chapitre 6 : Réflexion des ondes électromagnétiques sur les conducteurs

Objectifs :

— Exploiter la nullité des champs dans un métal parfait.

— Établir l'expression de l'onde réfléchie en exploitant les relations de passage fournies.

— Interpréter qualitativement la présence de courants localisés en surface.

— Reconnaître et caractériser une onde stationnaire.

Au concours ATS : Aux écrits en 2018.

6.1 Conducteur parfait

Conducteur parfait

On dit qu'un milieu est un conducteur parfait si l'on a une conductivité γ qui tend vers l'infini : $\gamma \to \infty$.

On peut reformuler cette condition : un milieu est un conducteur parfait si sa résistivité $\dfrac{1}{\gamma}$ est nulle : $\dfrac{1}{\gamma} \to 0$.

On note $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$, ρ et $\overrightarrow{j}$ le champ électrique, le champ magnétique, la densité volumique de charges et le courant volumique de charges dans le conducteur parfait. Chacune de ces grandeurs peut s'écrire $G(M,t) = G_{\text{stat}}(M) + G_{\text{onde}}(M,t)$ avec $G_{\text{stat}}(M)$ une grandeur statique et $G_{\text{onde}}(M,t)$ une grandeur variable, représentative de l'onde électromagnétique pouvant se propager dans le milieu.

Question 1 : À l'aide de la loi d'Ohm locale, montrer que $\overrightarrow{E}_{\text{onde}} = \overrightarrow{E}_{\text{stat}} = \overrightarrow{0}$.

Question 2 : À l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss, montrer que $\rho_{\text{onde}} = \rho_{\text{stat}} = 0$.

Question 3 : À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que $\overrightarrow{B}_{\text{onde}} = \overrightarrow{0}$. Peut-il exister un champ magnétique statique ?

Question 4 : À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère (et d'une dérivation temporelle), montrer que $\overrightarrow{j}_{\text{onde}} = \overrightarrow{0}$. Peut-il exister un courant statique ?

Onde électromagnétique au sein d'un conducteur parfait

Une onde électromagnétique ne peut se propager dans un conducteur parfait :

- Le champ électrique de l'onde est nul : $\overrightarrow{E}_{\text{onde}} = \overrightarrow{0}$;
- Le champ magnétique de l'onde est nul : $\overrightarrow{B}_{\text{onde}} = \overrightarrow{0}$;
- Il n'y a pas de variation locale de la charge électrique : $\rho_{\text{onde}} = 0$;
- Il n'y a pas de variation locale du courant électrique : $\overrightarrow{j}_{\text{onde}} = \overrightarrow{0}$.

Il peut en revanche a priori exister une densité surfacique de charges σ et une densité surfacique de courants $\overrightarrow{j_S}$ à la surface du conducteur parfait.

6.2 Onde réfléchie en incidence normale

6.2.1 Position du problème

Considérons que le milieu conducteur correspond au demi-espace $x > 0$; le demi-espace $x < 0$ correspond au vide (voir figure 6.1).

On considère que l'onde incidente arrive perpendiculairement à la surface du milieu conducteur : $\overrightarrow{k_i} = k.\overrightarrow{u_x}$.

On suppose de plus que l'onde incidente est une OPPH polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_y}$; en notation complexe, on a : $\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_i e^{i(\omega t - kx)}.\overrightarrow{u_y}$.

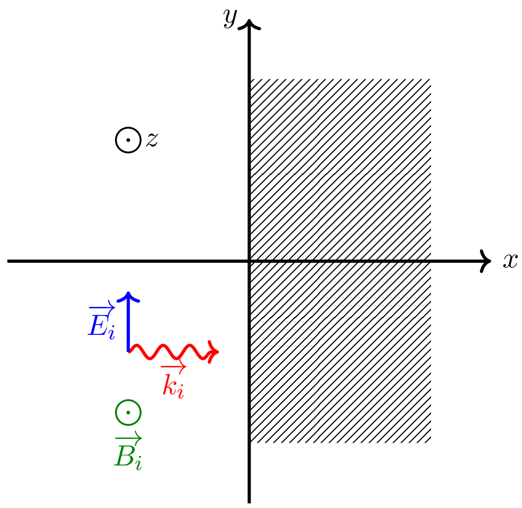


FIGURE 6.1 – Onde électromagnétique arrivant en incidence normale sur un conducteur parfait.

Question 5 : Montrer que le champ magnétique de l'onde incidente peut s'écrire, en notation complexe, $\underline{\overrightarrow{B_i}} = \dfrac{E_i}{c} e^{i(\omega t - kx)}.\overrightarrow{u_z}$.

6.2.2 Caractéristiques de l'onde réfléchie

L'onde incidente transporte une puissance $\mathcal{P}_i = \iint \overrightarrow{\Pi_i} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$. Or, dans le conducteur, on a $\overrightarrow{\Pi_{\text{métal}}} = \overrightarrow{0}$, donc pas de puissance transmise.

Il y a nécessairement une puissance réfléchie, qui correspond à une onde réfléchie.

Question 6 : Expliquer, par un argument simple, pourquoi on cherche un vecteur d'onde sous la forme $\overrightarrow{k_r} = -k'.\overrightarrow{u_x}$ pour l'onde réfléchie.

On cherche alors une onde réfléchie dont la polarisation est $\overrightarrow{\underline{E_r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ E'_y e^{i(\omega' t + k' x)} \\ E'_z e^{i(\omega' t + k' x)} \end{pmatrix}$. Il vient que le champ électrique total $\overrightarrow{\underline{E}_{\text{tot}}} = \overrightarrow{\underline{E_i}} + \overrightarrow{\underline{E_r}}$ pour le milieu $x < 0$ est :

$$\overrightarrow{\underline{E}_{\text{tot}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_i e^{i(\omega t - kx)} + E'_y e^{i(\omega' t + k' x)} \\ E'_z e^{i(\omega' t + k' x)} \end{pmatrix}$$

Question 7 : Rappeler le théorème de Coulomb ; l'appliquer explicitement sous forme vectorielle.

Question 8 : Que peut-on dire de $E_{\text{tot},y}(x = 0^-, t)$? En déduire que $\omega' = \omega$ (et donc que $k = k'$) et que $E'_y = E_i$.

Question 9 : Que peut-on dire de $E_{\text{tot},z}(x = 0^-, t)$? En déduire que $E'_z = 0$.

Question 10 : En déduire alors les expressions des ondes réfléchies $\overrightarrow{\underline{E_r}}$ et $\overrightarrow{\underline{B_r}}$.

Réflexion d'une OPPM en incidence normale sur un conducteur parfait

Soit une onde se propageant selon le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ vers un conducteur parfait.
Il résultera de la rencontre entre le conducteur parfait et l'onde incidente une onde réfléchie de vecteur d'onde $-\overrightarrow{k}$ et de polarisation opposée à celle de l'onde incidente.

6.3 Superposition des ondes incidente et réfléchie

6.3.1 Pour le champ électrique et le champ magnétique

Question 11 : Réexprimer le champ électrique total pour $x < 0$. En utilisant le fait que $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$, montrer que le champ électrique réel est représentatif d'une onde stationnaire.

Question 12 : Même question pour le champ magnétique.

Question 13 : Que peut-on dire du champ magnétique à la surface du conducteur ?

6.3.2 Pour le vecteur de Poynting

Question 14 : Exprimer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ pour $x < 0$.

Question 15 : Quelle est la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting ? Commenter.

6.4 Applications aux cavités à une dimension

Considérons deux conducteurs parfaits séparés d'une distance L. Le premier occupe le demi-espace $x < -L/2$; le deuxième occupe le demi-espace $x > L/2$ (voir figure 6.2).

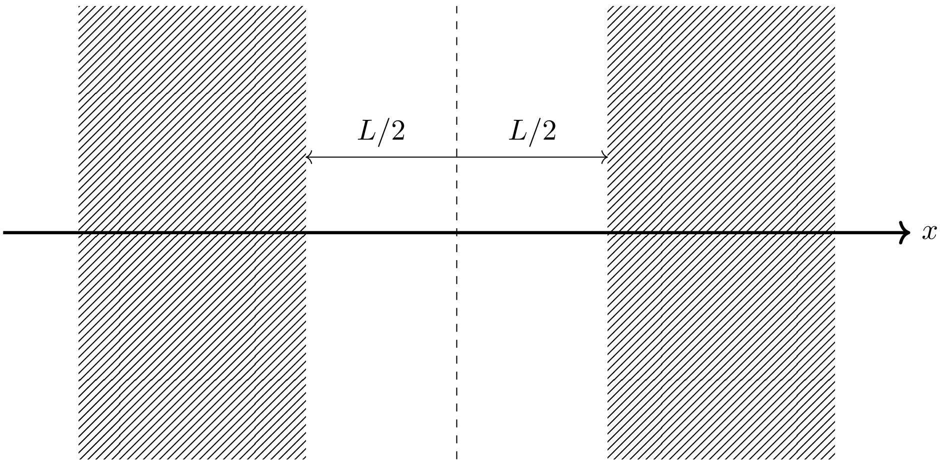


Figure 6.2 – Cavité entre deux conducteurs parfaits.

Une onde électromagnétique se propage normalement aux surfaces des deux métaux. On note $E(x,t) = E_0 \sin(\omega t)\sin(kx + \psi)$ l'amplitude du champ électrique dans la cavité.

Question 16 : Que vaut $E(x = L/2, t)$? En déduire la valeur de ψ et la nouvelle expression de $E(x, t)$.

Question 17 : Que vaut $E(x = -L/2, t)$? En déduire que k doit suivre une condition pour permettre la propagation et la réflexion de l'onde dans la cavité.

Question 18 : Quelles sont alors les valeurs de ω accessibles ?

Modes propres d'une cavité

Une onde électromagnétique confinée dans un espace limité L est forcément quantifiée : seules certains nombres d'ondes $k_m = m\dfrac{\pi}{L}$ et certaines pulsations $\omega_m = m\dfrac{\pi c}{L}$ sont accessibles.

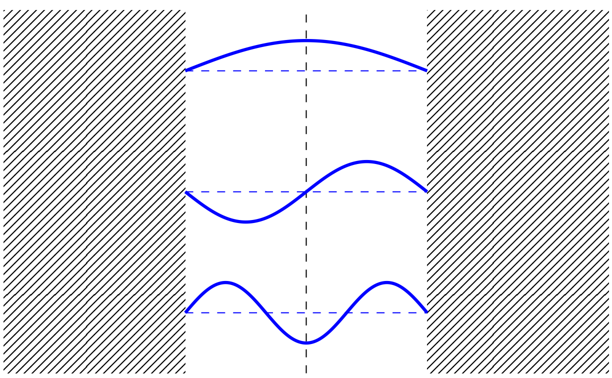


FIGURE 6.3 – Modes propres du champ électrique pour la cavité (de $m = 1$ à $m = 3$).

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit $f(x, y, z)$ un champ scalaire. Donner l'expression du laplacien scalaire de f en coordonnées cartésiennes. Faire l'application sur $f(x, y, z) = x^2 - y^5 e^{z/x}$.
- ☐ Soit $\overrightarrow{A}(x, y, z)$ un champ vectoriel. Donner l'expression du laplacien vectoriel de $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes. Faire l'application sur $\overrightarrow{A}(x, y, z) = x^2 y^3.\overrightarrow{e_x} - (z^5 + y^2).\overrightarrow{e_y}$.
- ☐ Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. À l'aide de la relation d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ - \overrightarrow{\Delta}$, établir l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique $\overrightarrow{E}$. Donner l'expression de la vitesse de propagation des ondes électriques.
- ☐ Soit une onde électromagnétique dont le champ électrique est $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(kx - \omega t).\overrightarrow{u_y}$. Selon quelle direction se propage l'onde ? Quelle est sa polarisation ? Montrer, à l'aide de l'équation de d'Alembert, que l'on a $\omega = kc$.
- ☐ Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
- ☐ Qu'est-ce qu'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ? Que peut-on dire du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ pour une telle onde dans le vide ? Montrer que l'on a nécessairement $B = E/c$.

Chapitre 7 : Interférences lumineuses

Objectifs :

— Expliquer le modèle scalaire de l'onde lumineuse.

— Définir l'intensité lumineuse.

— Décrire le phénomène d'interférence à deux ondes monochromatiques dans le cas du dispositif des trous de Young.

— Définir la différence de phase, la différence de marche, l'ordre d'interférence et l'intensité lumineuse en un point du champ d'interférence de deux ondes monochromatiques cohérentes.

Au concours ATS : Aux écrits en 2021. Tombe parfois aux oraux, et est souvent mal maîtrisé...

7.1 Observations expérimentales

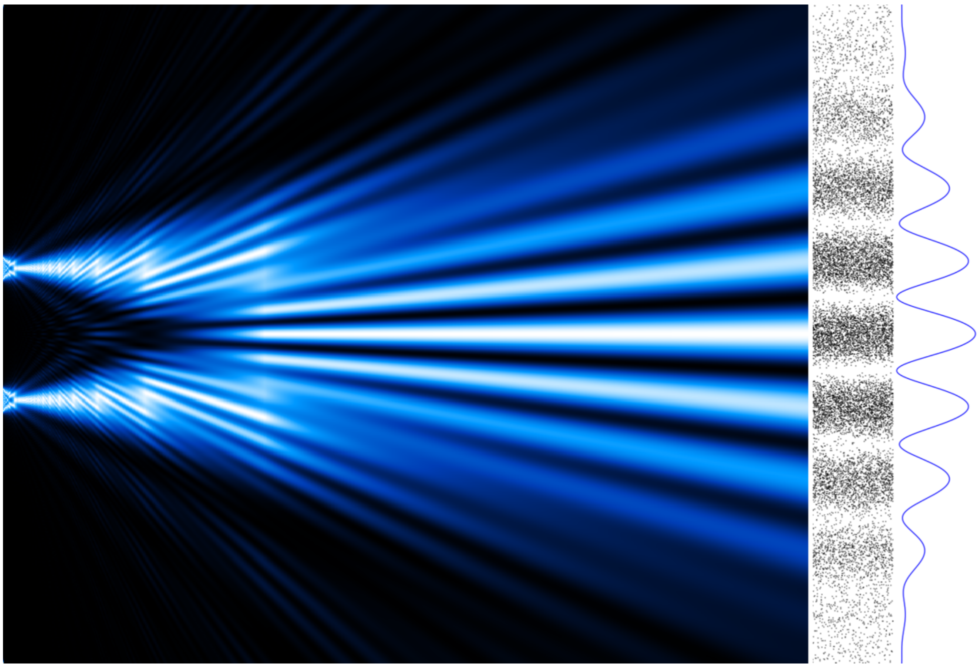


FIGURE 7.1 – Expérience des trous de Young. Par Alexandre Gondran — Travail personnel, CC BY-SA 4.0, https ://commons.wikimedia.org/w/index.php ?curid=53628849

En 1801, Thomas Young a mis en oeuvre une expérience faisant interférer de la lumière avec elle-même. Il a alors aperçu que la somme de deux ondes lumineuses ne donnait pas une onde « deux fois plus lumineuse », mais une successions de franges brillantes et sombres (voir figure 7.1).

7.2 Modèle scalaire de l'onde lumineuse

Une onde électromagnétique telle que la lumière est décrite à l'aide de son vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, de son champ électrique $\overrightarrow{E}$ et de son champ magnétique $\overrightarrow{B}$.

Nous avons cependant vu précédemment que, connaissant $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{E}$, on peut facilement déterminer $\overrightarrow{B}$ pour une OPPH. On décide alors de s'intéresser uniquement, pour simplifier les calculs, à l'amplitude du champ électrique $\overrightarrow{E}$, notée $s(M,t)$: c'est l'**amplitude scalaire** de l'onde lumineuse.

Si l'on note O la position de la source lumineuse, on a donc :

$$s(M,t) = S_0 \cos\left(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{OM}\right)$$

7.3 Interférences de deux ondes

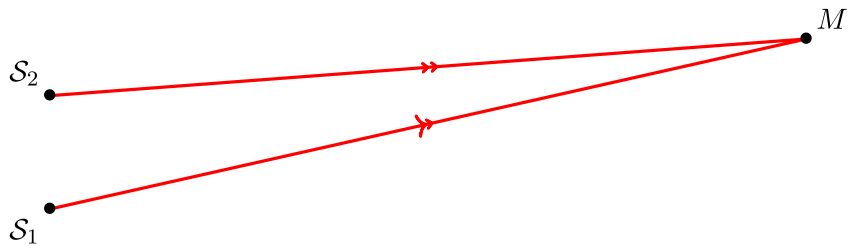
7.3.1 Intensité lumineuse

Cohérence de deux sources

On dit que deux sources sont cohérentes si elles ont même pulsation et même longueur d'onde.

Supposons que deux ondes s_1 et s_2 partent de deux sources cohérentes (émettant dans toutes les directions de façon identique) $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

Ces deux ondes, de même amplitude S_0, vont de leurs origines respectives vers un point M.



Question 1 : Exprimer l'amplitude scalaire complexe $\underline{s_1}(M,t)$ de l'onde issue de S_1 en fonction de $\lambda \triangleq \dfrac{2\pi}{k}$, ω, t et S_1M. Faire de même pour $\underline{s_2}(M,t)$; en déduire l'amplitude scalaire complexe de l'onde résultante $\underline{s}(M,t)$.

Intensité lumineuse

L'intensité lumineuse correspond à la valeur moyenne temporelle du carré de l'amplitude scalaire d'une onde lumineuse :

$$I(M) = \left\langle s^2(M,t) \right\rangle$$

☛ *Remarque :* On retrouve l'idée du carré et de la moyenne temporelle provenant de la puissance effective issue du vecteur de Poynting.

Moyenne du carré d'un signal en représentation complexe

Soit un signal sinusoïdal $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$, que l'on note sous forme complexe $\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$.
On note le complexe conjugué de $\underline{x}(t)$ sous la forme :

$$\underline{x}^*(t) = X_0 e^{-j(\omega t+\varphi)}$$

La valeur moyenne $\langle x^2(t)\rangle$ est alors donnée par :

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{x} \times \underline{x}^*\right)$$

Question 2 : Montrer que les intensités lumineuses I_1 et I_2 des sources $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont égales ; on les notera I_0.

Question 3 : Exprimer $I(M)$, intensité lumineuse totale au point M.

Différence de marche

Soient deux ondes <u>cohérentes</u>, de longueur d'onde λ, issues respectivement des points S_1 et S_2. Si ces deux ondes interfèrent en un point M, on appelle différence de marche la grandeur :

$$\delta(M) = S_1M - S_2M$$

L'intensité lumineuse en M vaut alors :

$$I(M) = I_0 \times \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)\right)\right]$$

Différence de phase

Soient deux ondes cohérentes, de longueur d'onde λ, issues respectivement des points S_1 et S_2. Si ces deux ondes interfèrent en un point M avec une différence de marche $\delta(M)$, on appelle différence de phase la grandeur :

$$\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)$$

L'intensité lumineuse en M vaut alors :

$$I(M) = I_0 \times [1 + \cos(\Phi(M))]$$

7.3.2 Interférences constructives et destructives

Question 4 : Pour quelles valeurs de $\Phi(M)$ l'intensité lumineuse est-elle maximale ? À quelles valeurs de $\delta(M)$ cela correspond-il ?

Question 5 : Pour quelles valeurs de $\Phi(M)$ l'intensité lumineuse est-elle minimale ? À quelles valeurs de $\delta(M)$ cela correspond-il ?

Interférences constructives et destructives

Deux ondes cohérentes interfèrent si on peut les retrouver en un même lieu et à un même instant.

- On dit que les interférences sont **constructives** en un point M si l'onde résultante y a une amplitude maximale : cela correspond au cas où les deux ondes sont en phase, et $\Phi(M) = 2m \times \pi$ avec m un entier. On a alors $\delta(M) = m \times \lambda$: la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde.
- On dit que les interférences sont **destructives** en un point M si l'onde résultante y a une amplitude minimale : cela correspond au cas où les ondes sont en opposition de phase, et $\Phi(M) = (2m + 1)\pi$ avec m un entier. On a alors $\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda$: la différence de marche est un multiple demi-entier de la longueur d'onde.

Ordre d'interférence

L'**ordre d'interférence** est défini par le rapport :

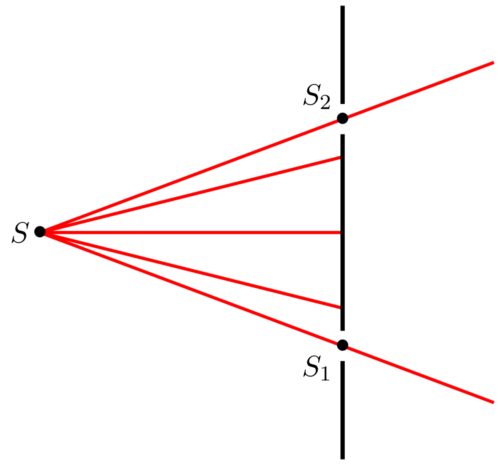
$$p = \frac{\delta}{\lambda}$$

Il s'agit d'un nombre sans dimension. En particulier :

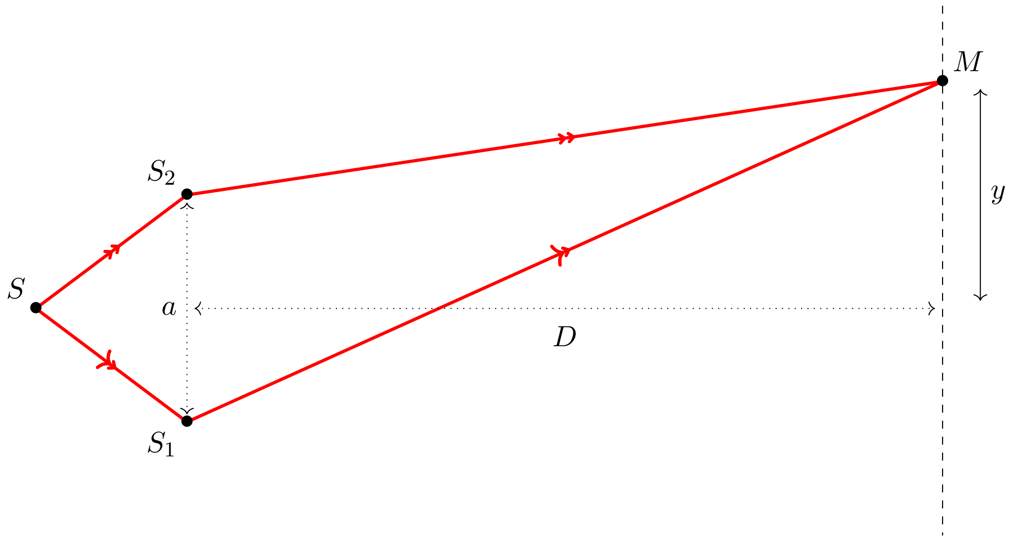
- Il y a interférences constructives si p est un entier ;
- Il y a interférences destructives si p est un demi-entier.

7.4 Retour sur l'expérience des trous de Young

Revenons sur l'expérience des trous de Young. Expérimentalement, on peut observer des interférences lumineuses en plaçant un laser derrière deux fentes très fines et rapprochées. Ainsi, les sources S_1 et S_2 sont « créées » par la source S réelle du laser.



La distance entre les deux sources est $S_1S_2 = a$, et on note D la distance entre le plan des sources et celui contenant le point M, d'ordonnée y. Les sources sont très rapprochées : $a \ll D$. Le point M auquel on observe les interférences lumineuses est situé « assez loin » des sources : $y \ll D$. On se place dans l'air, d'indice $n_{\text{air}} = 1$.



Question 6 : Il faut donc rajouter aux ondes s_1 et s_2 la distance parcourue entre S et S_1 ou entre S et S_2. Pourquoi cela n'influe-t-il pas le calcul de la différence de marche ?

Question 7 : Exprimer les distances S_1M et S_2M en fonction de D, y et a.

Question 8 : Lorsque $u \ll 1$, on a $(1+u)^\alpha \approx 1 + \alpha u$. Simplifier les expressions de S_1M et de S_2M ; en déduire l'expression simplifiée de la différence de marche $\delta(M)$.

Question 9 : Montrer alors que la figure d'interférences est constituée de franges rectilignes sombres et brillantes.

Question 10 : Quelle est la distance i entre deux franges brillantes successives ?

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit $f(x,y,z)$ un champ scalaire. Donner l'expression du laplacien scalaire de f en coordonnées cartésiennes. Faire l'application sur $f(x,y,z) = x^2 - y^5 e^{z/x}$.
- ☐ Soit $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ un champ vectoriel. Donner l'expression du laplacien vectoriel de $\overrightarrow{A}$ en coordonnées cartésiennes. Faire l'application sur $\overrightarrow{A}(x,y,z) = x^2y^3.\overrightarrow{e_x} - (z^5 + y^2).\overrightarrow{e_y}$.
- ☐ Énoncer les équations de Maxwell dans le vide. À l'aide de la relation d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div}\ - \overrightarrow{\Delta}$, établir l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique $\overrightarrow{E}$. Donner l'expression de la vitesse de propagation des ondes électriques.
- ☐ Soit une onde électromagnétique dont le champ électrique est $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(kx - \omega t).\overrightarrow{u_y}$. Selon quelle direction se propage l'onde ? Quelle est sa polarisation ? Montrer, à l'aide de l'équation de d'Alembert, que l'on a $\omega = kc$.
- ☐ Citer les domaines du spectre des ondes électromagnétiques et leur associer des applications.
- ☐ Qu'est-ce qu'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement ? Que peut-on dire du vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$, du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ pour une telle onde dans le vide ? Montrer que l'on a nécessairement $B = E/c$.