Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 8 : Thermique

Travaux dirigés

Exercice faisant uniquement appel à des outils mathématiques

Exercice facile et/ou proche du cours

Exercice accessible mais demandant du recul sur le cours et/ou sur les outils mathématiques

Exercice complexe, de par son côté calculatoire et/ou astucieux

Il est normal de « bloquer » sur les **exercices** : personne ne s'attend à ce que vous sachiez les faire en cinq minutes seulement. Il faut cependant persévérer, avoir le cours à côté afin de voir si un raisonnement similaire a déjà été abordé, et ne pas hésiter à parler avec vos camarades ou votre professeur.

Les **problèmes** sont issus d'annales de concours et/ou d'examens. Ils sont au moins aussi importants à aborder que les exercices, car ils sont les plus proches (en terme de rédaction et de questions « bout-à-bout ») de ce que vous aurez en devoir surveillé ainsi qu'au concours.

Chapitre 1 : Conduction thermique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une surface	1.2, 1.3, 1.4
Établir l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel	1.3
Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion thermique au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle	1.1

Questions de cours

- ☐ Énoncer la loi de Fourier. Donner sa signification physique. Donner des ordres de grandeur pour la conductivité thermique (métal, eau, air).
- ☐ Établir l'équation de propagation de la chaleur par conduction.
- ☐ Soit un sol argileux de diffusivité thermique $D = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Combien de temps faut-il pour que les variations de température se ressentent à une profondeur de $5\,\mathrm{m}$ sous la surface du sol ?
- ☐ Montrer, par étude d'une tranche dx entre t et $t+\mathrm{d}t$, que le flux thermique est uniforme en régime stationnaire. En déduire que la température est une fonction affine de x. Est-ce cohérent avec l'équation de la chaleur ?

Exercices

1.1 Cuisson d'un œuf

La cuisson d'un œuf de poule à la coque dure trois minutes. Un oeuf moyen a une masse de $50\,\mathrm{g}$ à $60\,\mathrm{g}$.

Le but est de déterminer quelle serait la durée pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche, sachant que la masse de celui-ci est comprise entre $1{,}2\,\mathrm{kg}$ et $1{,}8\,\mathrm{kg}$.

1. Justifier que $D_{\text{poule}} \approx D_{\text{autruche}}$ où D est la diffusivité thermique.
2. Évaluer l'ordre de grandeur de $\dfrac{V_{\text{autruche}}}{V_{\text{poule}}}$ où V représente le volume de chaque œuf.
3. Répondre alors à la problématique.

1.2 Sensation de froid et de chaud

Deux cylindres, isolés thermiquement sur leurs surfaces latérales, ont une même section S et un même axe (O, x). On note λ_1 et λ_2 leurs conductivités thermiques respectives, ainsi que L_1 et L_2 leurs longueurs respectives. Le contact se fait en $x = 0$; on maintient l'extrémité en $x = -L_1$ à la température T_1 et celle en $x = +L_2$ à la température T_2. On se place en régime stationnaire.

1. En considérant une portion de longueur dx du système constitué des deux barreaux, montrer que le flux thermique $\Phi_{1\to 2}$ est constant en régime permanent.
2. En déduire l'expression de la température T_i à l'interface entre les deux cylindres en fonction des données du problème.
3. Effectuer l'application numérique en considérant que le cylindre de gauche représente une main de température $T_1 = 37\,°\mathrm{C}$ et de conductivité $\lambda_1 = 10\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ et que le cylindre de droite représente soit du bois

($\lambda_{\text{bois}} = 1\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$), soit de l'acier ($\lambda_{\text{acier}} = 100\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$) en prenant $T_2 = 20\,°\mathrm{C}$ dans les deux cas. On prendra $L_1 = L_2$.

4. Expliquer pourquoi en hiver, dans un jardin public, il vaut mieux s'asseoir sur un banc en bois qu'une chaise en acier.

1.3 [HP ?] Équation de la chaleur dans un cylindre

Soit un cylindre de rayon R et de longueur $L \gg R$. On note (O, z) l'axe de révolution du cylindre, et on utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) ainsi que les vecteurs usuels de la base associée.

On suppose qu'à $t = 0$, on a $T(r = 0) = T_1$ et $T(r = R) = T_2 < T_1$. On étudie une portion du cylindre contenue entre r et $r + \mathrm{d}r$, correspondant à un tore à section rectangulaire de hauteur L et d'épaisseur dr ; on note Σ ce système.

On note μ la masse volumique du cylindre, c sa capacité thermique massique et λ sa conductivité thermique.

1. Faire un schéma du problème faisant figurer Σ ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{j_Q}(r)$ et $\overrightarrow{j_Q}(r + \mathrm{d}r)$.
2. Exprimer δm, masse de Σ, en fonction de μ, L, r et dr.
3. Montrer alors que la variation d'enthalpie de Σ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ est $\mathrm{d}H = 2\pi\mu c L r \dfrac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}r\mathrm{d}t$.
4. Exprimer δQ_e et δQ_s, quantités de chaleur entrant et sortant de Σ à l'instant t, en fonction de j_Q, r, dr, L et dt.
5. En déduire que la quantité de chaleur accumulée pendant dt par Σ est $\delta Q = -2\pi L \dfrac{\partial}{\partial r}(r j_Q)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}t$.
6. En appliquant la loi de Fourier, montrer alors que $\delta Q = 2\pi L\lambda \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}t$.
7. Par application du premier principe enthalpique, en déduire l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques : $\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)$.

1.4 Estimation de l'âge de la Terre par Lord Kelvin

On admet que la température ne dépend que de la profondeur z comptée positivement. La température vérifie donc l'équation de la chaleur $\mu c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda\dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. On notera la diffusivité thermique $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$.

1. En utilisant la loi de Fourier, montrer $j_Q(z, t)$ vérifie la même équation aux dérivées partielles.

Lord Kelvin a imaginé, au XIXe siècle, que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément, sa surface a été soumise à une température T_s. Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre.

2. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelles doivent être les valeurs $j_Q(z = 0, t = 0)$ et $j_Q(z = 0, t \to \infty)$? Pour z quelconque, quelle est la valeur de $j_Q(z, t \to \infty)$?
3. Vérifier que la fonction $j_Q(z, t) = -\dfrac{A}{\sqrt{Dt}}\exp\left(-\dfrac{z^2}{4Dt}\right)$, où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre, est bien la bonne. Dessiner $j_Q(z, t)$ en fonction de z pour deux temps différents.
4. On suppose que A s'exprime en puissances des différents paramètres du problème. On décide donc d'écrire $A = a(T_0 - T_s)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c_p^\delta$ où a, α, β, γ et δ sont des constantes sans dimension. Par une analyse dimensionnelle, déterminer α, β, γ et δ.
5. On peut montrer $a = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. Exprimer $\dfrac{\partial T}{\partial z}$ à la surface de la Terre. Lord Kelvin a admis que $(T_0 - T_s)$ était de l'ordre de $1000\,\mathrm{K}$ à $2000\,\mathrm{K}$ et que D est était de $1\times10^{-6}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$. De plus, des relevés de température dans les mines donnent un gradient de température d'environ $30\,\mathrm{K\cdot km^{-1}}$. Quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ? Commentaires ?

Chapitre 2 : Conducto-convection thermique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire	2.1, 2.2

Questions de cours

- ☐ Énoncer la loi thermique de Newton. Commenter le signe.
- ☐ Soit un corps homogène de capacité thermique C et de surface S, initialement à la température T_0. Ce corps baigne dans un fluide de température T_{ext}, et seuls des échanges conducto-convectifs (coefficient de transfert thermique h) ont lieu entre le corps et le fluide. Déterminer l'équation de $T(t)$, température du corps au cours du temps.

Exercices

2.1 Refroidissement d'un corps homogène dans un fluide

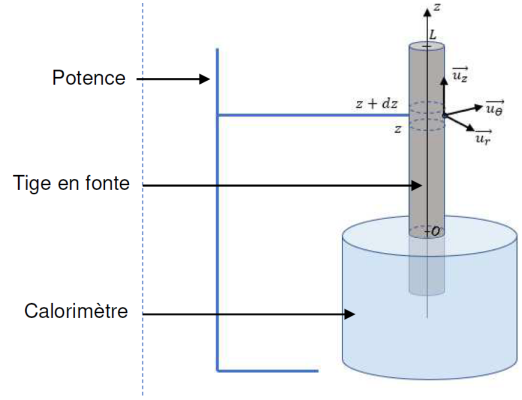
À savoir refaire ! Voir fiche de révisions.

2.2 Exercice de l'ailette de refroidissement

À savoir refaire ! Voir fiche de révisions.

Problème

On considère une tige en fonte, cylindrique, de rayon a dont une extrémité est plongée dans un bain d'eau glacée thermostatée dans un calorimètre à la température $T_0 = 0\,°\text{C}$. Le reste de la tige, de longueur L, est au contact de l'air extérieur supposé à une température $T_{\text{ext}} > T_0$ constante et uniforme. La pression atmosphérique sera également considérée comme constante et uniforme.



Pour cette partie théorique, on travaillera avec les hypothèses suivantes :

— On suppose le régime stationnaire atteint. On a $L = 1{,}0\,\text{m}$, $a = 0{,}50\,\text{cm}$ donc $L \gg a$. On pourra considérer que le champ des températures T dans la tige ne dépend que de z : on a donc $T(z)$. On a également $T(0) \approx T_0$.

— On note c la capacité thermique massique de la tige assimilée à une phase condensée indilatable et incompressible, on note ρ sa masse volumique et λ sa conductivité thermique. On prendra $c = 400\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\rho = 5000\,\text{kg/m}^3$.

1. Énoncer la loi de Fourier, préciser l'unité SI de la densité de flux thermique.
2. En déduire l'expression du vecteur de flux thermique $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ décrivant la conduction thermique unidirectionnelle au sein de la tige étudiée.

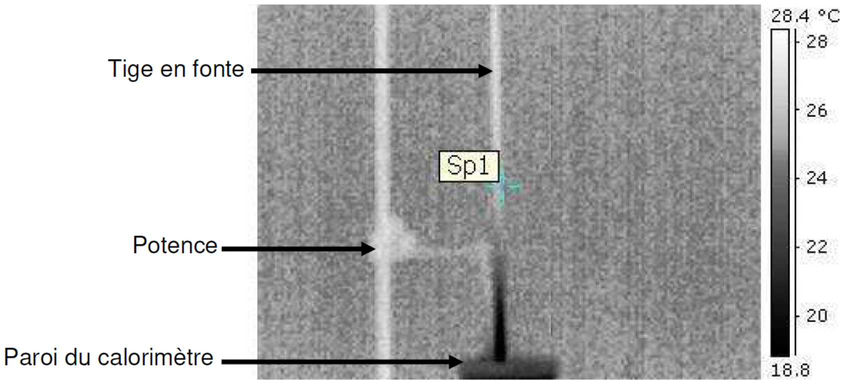
On considère un élément de volume mésoscopique de la tige compris entre z et $z + \mathrm{d}z$ et de volume $\mathrm{d}V = \pi a^2 \mathrm{d}z$.

3. Effectuer un bilan enthalpique de cet élément de volume $\mathrm{d}V$ en supposant que la tige n'est le siège que du seul mode de transfert d'énergie par conduction thermique et montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} = 0$.
4. Exprimer la fonction $T(z)$ puis la représenter en fonction de z, en faisant apparaître les grandeurs $T(0)$ et $T(L) > T(0)$ sur votre schéma.

Expérimentalement, nous devons compléter la description des transferts thermiques reçus par la tige en prenant en compte également le transfert conducto-convectif. On note h le coefficient de transfert conducto-convectif et on rappelle la loi de Newton définissant le vecteur densité de flux thermique associé $\overrightarrow{j_{\text{cc}}} = h(T(z) - T_{\text{ext}}).\overrightarrow{u_r}$ où $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur radial associé au repérage cylindrique dessiné ci-dessus.

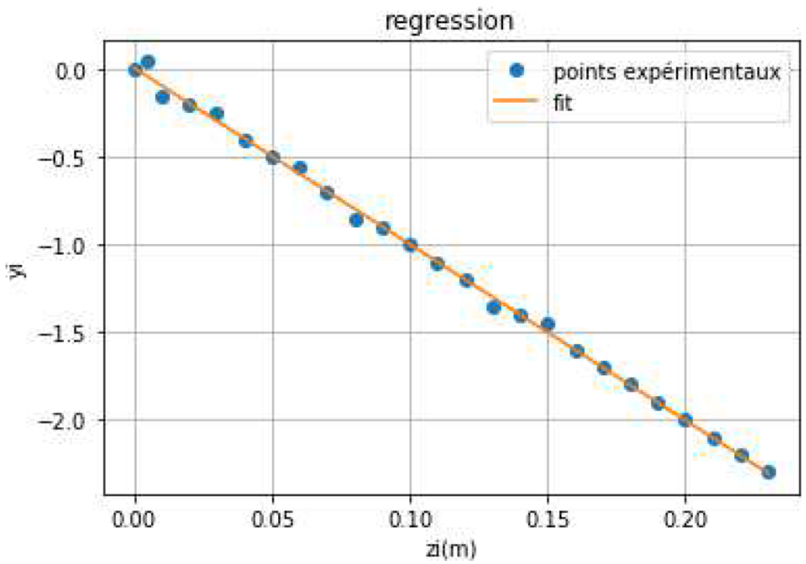
5. Effectuer un nouveau bilan enthalpique et démontrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} - \dfrac{T}{\delta^2} = -\dfrac{T_{\text{ext}}}{\delta^2}$ où $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$ représente une distance caractéristique de variation de la température T le long de la tige.

On obtient la photographie ci-dessous à l'aide d'une caméra thermique :



6. Justifier que $T(L) = T_{\text{ext}}$ et que $\delta < L$.

Dans ces conditions, on montre alors que $T(z)$ a pour expression : $T(z) \approx T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})e^{-z/\delta}$. À l'aide d'un thermocouple mis en contact avec la tige métallique, il est possible d'obtenir différentes valeurs expérimentales T_i de la température en différents points de la tige de cotes verticales z_i. On peut alors construire un graphique dans lequel on place en ordonnée les quantités $y_i = \ln\left(\dfrac{T_i - T_{\text{ext}}}{T_0 - T_{\text{ext}}}\right)$ et en abscisse les valeurs de z_i associées (en mètre).



7. Estimer, en utilisant le graphe précédent, la valeur expérimentale de δ.

Chapitre 3 : Résistance thermique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique	3.1, 3.2, 3.3

Questions de cours

- ☐ Établir qu'en régime permanent on a $\Delta T = R_{\text{th}} \times \Phi_Q$, avec R_{th} à expliciter.
- ☐ Montrer que, pour deux matériaux en série, on a $R_{\text{th,éq}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}$.
- ☐ Montrer que, pour deux matériaux en parallèle, on a $\dfrac{1}{R_{\text{th,éq}}} = \dfrac{1}{R_{\text{th},1}} + \dfrac{1}{R_{\text{th},2}}$.

Exercices

3.1 Mur isolé

Une paroi d'habitation est constituée d'un mur en brique, d'un isolant en laine de bois et d'une plaque de plâtre. Les épaisseurs et conductivités thermiques des trois matériaux sont données dans le tableau ci-dessous :

	épaisseur	conductivité thermique
mur en brique	$20\,\text{cm}$	$0{,}25\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
laine de bois		$0{,}036\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
plaque de plâtre	$13\,\text{mm}$	$0{,}33\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

1. Calculer la résistance thermique d'un mur de brique de surface égale à $1\,\text{m}^2$.
2. Calculer la résistance thermique d'une plaque de plâtre de surface égale à $1\,\text{m}^2$.
3. On souhaite isoler le mur pour que la résistance thermique totale de la paroi soit supérieure à $4\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$. Déterminer la résistance thermique minimale de l'isolant en laine de bois. En déduire l'épaisseur minimale de laine de bois à poser sur le mur de $1\,\text{m}^2$.

3.2 Comparaison d'un simple vitrage et d'un double vitrage

On se propose de comparer un simple vitrage, d'épaisseur $e = 8\,\text{mm}$, et un double vitrage constitué de deux vitres d'épaisseurs égales à $e/2$ et séparées par une lame d'air d'épaisseur $a = 1\,\text{cm}$.

La surface vitrée est de $S = 1\,\text{m}^2$ pour les deux vitrages.

Données :

— Résistance thermique d'une lame d'air d'épaisseur a : $R_{\text{th}} = 0{,}14\,\text{K}\cdot\text{W}^{-1}$;

— Conductivité thermique du verre : $\lambda = 1{,}15\,\text{SI}$;

— Température intérieure : $T_{\text{int}} = 19\,°\text{C}$.

1. Calculer la résistance thermique du simple vitrage.
2. Calculer la résistance thermique du double vitrage.
3. En déduire les puissances thermiques dissipées par un simple puis un double vitrage pour une température extérieure $T_{\text{ext}} = 8\,°\text{C}$.
4. Commenter l'intérêt d'un double vitrage.

3.3 Bilan thermique dans un appartement

Un appartement a une surface au sol $S = 70\,\mathrm{m}^2$ avec une hauteur sous plafond $h = 2{,}5\,\mathrm{m}$. La température intérieure est $T_i = 19\,°\mathrm{C}$; la température extérieure est $T_e = 2\,°\mathrm{C}$.

Données :

— Capacité thermique massique à pression constante de l'air : $c_p = 1000\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$;

— Masse volumique de l'air : $\mu = 1{,}29\,\mathrm{kg/m}^3$.

1. Le volume d'air est renouvelé une fois toutes les deux heures par ventilation mécanique contrôlée. Calculer l'énergie nécessaire pour réchauffer cet air renouvelé et la puissance nécessaire correspondante.
2. Les parois donnant sur l'extérieur ont les caractéristiques suivantes :

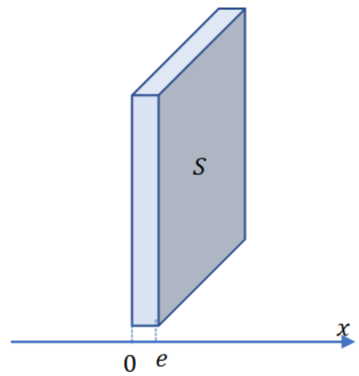
	murs	ouvertures
surface (m^2)	34,6	12,2
résistance thermique ($\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$)	0,036	0,023

   Calculer la puissance thermique transmise par les différentes parois de l'appartement.
3. En déduire la puissance du chauffage nécessaire pour maintenir la température constante dans l'appartement.
4. Le chauffage étant électrique, calculer l'énergie (exprimée en $\mathrm{kW \cdot h}$) dans cet appartement en une journée. En déduire le coûte pour cette journée de chauffage, si le kilowatt-heure revient à 17 centimes d'euro.

Problème

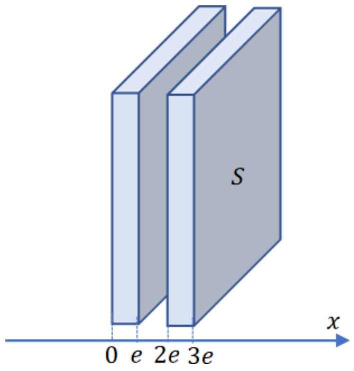
Loi de Fourier

On considère une lame de verre d'épaisseur e, de surface S et de conductivité thermique λ_v uniforme. On suppose que le champ des températures T dans cette lame ne dépend spatialement que de la variable x. On impose une température $T(0)$ en $x = 0$ et une température $T(e) < T(0)$ en $x = e$. On suppose dans toute la suite que le régime stationnaire est atteint et on néglige le transfert conducto-convectif. On note $\vec{j}$ le vecteur densité de flux thermique.



1. Énoncer la loi de Fourier et justifier que $\vec{j} = j(x).\vec{u_x}$. On donnera l'expression de $j(x)$.
2. Exprimer la puissance thermique $\mathcal{P}_{\mathrm{th}}(x)$ mesurée à la cote x $(0 \leq x \leq e)$ et traversant la surface S de la lame de verre en fonction de S, λ_v et $\dfrac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}$.
3. Justifier que la puissance $\mathcal{P}_{\mathrm{th}}$ soit indépendante de x.
4. En déduire alors que $T(0) - T(e) = R_{\mathrm{th}}\mathcal{P}_{\mathrm{th}}$. On donnera l'expression de R_{th} en fonction de e, λ_v et S.

Un double vitrage est constitué de deux lames de verre identiques de conductivité thermique λ_v, d'épaisseur e et de surface S séparées par une épaisseur e de gaz de conductivité λ_{gaz} de même surface S.



5. Donner l'expression de la résistance thermique équivalente $R_{\text{éq}}$.

5. On a $\lambda_{\text{gaz}} \ll \lambda_v$. Donner une expression approchée de la résistance thermique équivalente. Interpréter le résultat obtenu.

Isolation thermique d'une maison

Le tableau ci-dessous donne les conductances surfaciques avant puis après rénovation d'une maison :

	Avant rénovation	Après rénovation	Surface
Murs	$1\,\mathrm{W/K/m^2}$	$0{,}5\,\mathrm{W/K/m^2}$	$100\,\mathrm{m^2}$
Toiture	$0{,}5\,\mathrm{W/K/m^2}$	$0{,}1\,\mathrm{W/K/m^2}$	$100\,\mathrm{m^2}$
Fenêtres	$5\,\mathrm{W/K/m^2}$	$1\,\mathrm{W/K/m^2}$	$20\,\mathrm{m^2}$
Portes	$2\,\mathrm{W/K/m^2}$	$1\,\mathrm{W/K/m^2}$	$10\,\mathrm{m^2}$

Soit $\mathcal{P}_{\text{th, avant}}$ la puissance thermique échangée par l'ensemble de la maison avec l'extérieur avant rénovation et $\mathcal{P}_{\text{th, après}}$ la puissance thermique échangée par l'ensemble de la maison avec l'extérieur après rénovation.

6. Donner la valeur numérique du rapport $\dfrac{\mathcal{P}_{\text{th, avant}}}{\mathcal{P}_{\text{th, après}}}$ et interpréter la valeur obtenue.