SCIENCES PHYSIQUES

ATS – LYCÉE LOUIS ARMAND

Thème 8 : Thermique

Cours

FIGURE 1 – Joseph Fourier (1768 – 1830), mathématicien et physicien français, est un scientifique ayant contribué à modéliser la conduction de la chaleur. Par ses recherches, il a ouvert tout un pan des mathématiques et de la physique liée à l'analyse de Fourier.

Table des matières

Chapitre 1 : Conduction thermique

Objectifs :

— Définir et algébriser la puissance thermique échangée à travers une surface.

— Relier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens.

— Citer des ordres de grandeur de conductivité thermique pour des matériaux dans le domaine de l'habitant.

— Établir l'équation de la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel.

— Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène.

— Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion thermique au coefficient de diffusion thermique par une analyse dimensionnelle.

Au concours ATS : Aux écrits en 2020, 2019, 2018. Tombe parfois aux oraux.

1.1 Flux thermique

1.1.1 Définitions

La diffusion thermique est un phénomène de transfert thermique s'effectuant des zones de haute température vers les zones de basse température par contact direct. On se doute, intuitivement, que la quantité de chaleur fournie Q par la zone chaude à la zone froide est proportionnelle à la durée Δt de contact, ainsi qu'à la surface de contact S.

Flux thermique et densité de courant thermique

Le **flux thermique** Φ_Q allant d'un système à un autre correspond à la puissance thermique échangée. Si l'on note la quantité infinitésimale de chaleur échangée δQ et la durée de contact $\mathrm{d}t$, on a donc :

$$\delta Q = \Phi_Q \, \mathrm{d}t$$

On peut associer à ce flux thermique un **vecteur densité de courant thermique** $\overrightarrow{j_Q}$, par analogie avec l'électrocinétique ou la mécanique des fluides [a] :

$$\Phi_Q = \iint_S \overrightarrow{j_Q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

a. Où l'on a respectivement l'intensité $i = \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ et la masse $M = \iint_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.

Remarque : Le flux thermique et le vecteur densité de courant thermique dépendent bien entendu de l'espace et du temps : la chaleur ne s'écoule pas de la même manière à deux endroits ou deux instants différents. Les dépendances en M et en t ne sont ici pas affichées par souci de clarté.

Question 1 : Quelles sont les unités SI du flux thermique et du vecteur densité de courant thermique ?

1.1.2 Loi de Fourier

Question 2 : Comment le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ T$ s'oriente-t-il dans un champ de températures non-uniforme ? Que peut-on dire de $\overrightarrow{j_Q}$ par rapport à $\overrightarrow{\text{grad}}\ T$?

Loi de Fourier

La chaleur s'écoule toujours des hautes températures vers les basses températures ; ainsi, $\overrightarrow{j_Q}$ est opposé à $\overrightarrow{\text{grad}}\ T$. On définit alors la **conductivité thermique** λ comme étant le coefficient de proportionnalité, au signe près, entre ces deux grandeurs :

$$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\ \overrightarrow{\text{grad}}\ T$$

☛ *Remarque :* La loi de Fourier est une loi phénoménologique, c'est-à-dire constatée expérimentalement mais pas universellement vraie. C'est bien le signe négatif qui montre que les transferts thermiques se font des zones chaudes vers les zones froides.

Question 3 : Montrer que λ s'exprime, dans le système international, en $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Comme l'indique son nom, la conductivité thermique permet de montrer à quel point la chaleur s'écoule entre deux zones. Elle dépend essentiellement de la nature du matériau dans lequel la diffusion thermique a lieu, mais également de la température, de la pression, de l'humidité du milieu. En pratique, on considérera toujours une conductivité thermique uniquement dépendante du matériau.

matériau	λ $(\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}})$
cuivre	400
marbre	$2-3$
eau	0,6
laine de verre	0,04
air	0,026

Table 1.1 – Conductivités thermiques de quelques matériaux à pression atmosphérique et à 20 °C.

☛ *Remarque :* Attention à ne pas confondre conductivité thermique λ et capacité thermique c ! On peut avoir un matériau qui peut accumuler beaucoup d'énergie thermique (donc grande valeur de c) mais ne pas « vouloir » la restituer (donc faible valeur de λ), ou inversement.

1.2 Équation de la chaleur

1.2.1 Position du problème

Considérons un barreau cylindrique de section droite S et de longueur L. On considère que ce barreau a une masse volumique μ, une conductivité thermique λ et une capacité thermique massique c (on rappelle que pour un solide, $c_p = c_V = c$).

Ce barreau, dont l'axe de révolution sera noté (O, x), possède une température T_A en $x = 0$ et une température $T_B < T_A$ en $x = L$.

On s'intéresse à la diffusion de la chaleur entre deux abscisses x et $x + \mathrm{d}x$; ce système sera noté, dans le reste du cours, Σ. Le problème admet une symétrie de révolution autour de l'axe (O, x).

Question 4 : Faire un schéma du barreau entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$, et y faire figurer les vecteurs $\overrightarrow{j_Q}(x)$ et $\overrightarrow{j_Q}(x + \mathrm{d}x)$.

1.2.2 Mise en équation

Variation d'enthalpie du système

Question 5 : Exprimer la masse δm de Σ en fonction des données de l'énoncé.

Question 6 : En déduire la variation d'enthalpie $\mathrm{d}H$ du système lorsqu'il passe de la température $T(t)$ à la température $T(t + \mathrm{d}t)$ en fonction des données du problème.

Question 7 : En « multipliant et divisant par dt », montrer que dH est finalement proportionnelle à $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

Chaleur échangée par le système

Question 8 : Exprimer simplement $\Phi_Q(x,t)$ en fonction de $j_Q(x,t)$ et de S.

Question 9 : Quelle est l'énergie δQ_e reçue en x par Σ pendant une durée infinitésimale dt ? Et l'énergie δQ_s cédée en $x + \mathrm{d}x$? En déduire que l'énergie thermique totale δQ reçue par Σ vaut :

$$\delta Q = -\left(j_Q(x+\mathrm{d}x,t) - j_Q(x,t)\right) S\mathrm{d}t$$

Question 10 : En « multipliant et divisant par dx », montrer que δQ est proportionnelle à $\dfrac{\partial j_Q}{\partial x}$.

Question 11 : En utilisant la loi de Fourier, montrer que $j_Q(x,t) = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$. En déduire l'expression finale de δQ.

Application du premier principe de la thermodynamique

Question 12 : Y a-t-il des travaux utiles apportés au ou cédés par le système Σ ? En déduire une équation liant δQ et $\mathrm{d}H$, puis l'expliciter et la simplifier.

Équation de la chaleur à une dimension

Le bilan thermique associé à la loi de Fourier permettent de donner une équation portant uniquement sur la température T du système :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

La résolution de cette équation permet de déterminer le champ de températures au sein du barreau à chaque position x et à chaque instant t.

1.2.3 Analyse de l'équation

L'équation de la chaleur n'est pas une équation différentielle, mais une équation aux dérivées partielles, mélangeant l'aspect spatial et temporel de la température. En particulier, on peut remarquer que la diffusion thermique n'est pas réversible dans le temps : si l'on fait la transformation $t \leftarrow -t$, la dérivée temporelle change de signe, et donc l'équation est différente.

Il existe de nombreuses façons pour résoudre cette équation, qui ne sont cependant pas explicitement au programme d'ATS ; nous verrons cependant dans le chapitre sur les ondes thermiques, plus tard dans l'année, une façon de traiter le problème pour des phénomènes périodiques.

On peut réécrire l'équation de la chaleur sous la forme : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, où D est la diffusivité thermique.

Question 13 : Quelle est la dimension de D ?

Temps et longueur caractéristiques

Notons τ la durée, en ordre de grandeur, pour que la variation de température atteigne significativement le barreau à la distance a. On aura alors, en utilisant l'équation de la chaleur, $D \sim \dfrac{a^2}{\tau}$.

Question 14 : Soit un sol argileux de diffusivité thermique $D = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. Montrer qu'il faut environ une demi-saison pour que les variations de températures se ressentent à une profondeur de $2{,}4\,\mathrm{m}$ sous la surface du sol.

1.2.4 Résolution de l'équation en régime permanent

Plaçons-nous en régime permanent : T ne dépend plus du temps t.

Question 15 : Que devient l'équation de la chaleur ? Déterminer alors l'expression $T(x)$ en fonction de x et de deux constantes arbitraires C_1 et C_2.

Question 16 : Que valent $T(x = 0)$ et $T(x = L)$? En déduire les expressions de C_1 et C_2, puis celle de $T(x)$.

☛ *Remarque :* Lorsque l'on utilise les valeurs de T en différentes positions de températures connues pour déterminer C_1 et C_2, on ne parle pas de conditions initiales (le temps n'intervient pas ici !) mais de **conditions aux limites**.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Énoncer la loi de Fourier. Donner sa signification physique. Donner des ordres de grandeur pour la conductivité thermique (métal, eau, air).
- ☐ Établir l'équation de propagation de la chaleur par conduction.
- ☐ Soit un sol argileux de diffusivité thermique $D = 1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Combien de temps faut-il pour que les variations de température se ressentent à une profondeur de $5\,\mathrm{m}$ sous la surface du sol ?
- ☐ Montrer, par étude d'une tranche $\mathrm{d}x$ entre t et $t + \mathrm{d}t$, que le flux thermique est uniforme en régime stationnaire. En déduire que la température est une fonction affine de x. Est-ce cohérent avec l'équation de la chaleur ?

Chapitre 2 : Conducto-convection thermique

Objectifs :

— Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs en régime stationnaire.

Au concours ATS : Aux écrits en 2022, 2021, 2020. Tombe parfois aux oraux.

2.1 Loi de Newton

Prenons l'exemple d'une plaque horizontale de surface S, portée à la température uniforme T. On suppose « qu'assez loin » de la plaque, l'air ambiant est à la température $T_a < T$. La question est de savoir comment la plaque échange de la chaleur avec son environnement.

Expérimentalement (voir figure 2.1), on peut remarquer que le champ de température suit trois régimes selon la zone d'étude :

— Au niveau de la plaque, la température est bien évidemment égale à T ;

— Assez loin de la plaque, on retrouve une température T_a ;

— Entre les deux se situe une zone de transition thermique, qu'on appelle *couche limite thermique*. Cette couche limite est de faible épaisseur face aux dimensions transverses de la plaque (quelques millimètres, voire centimètres).

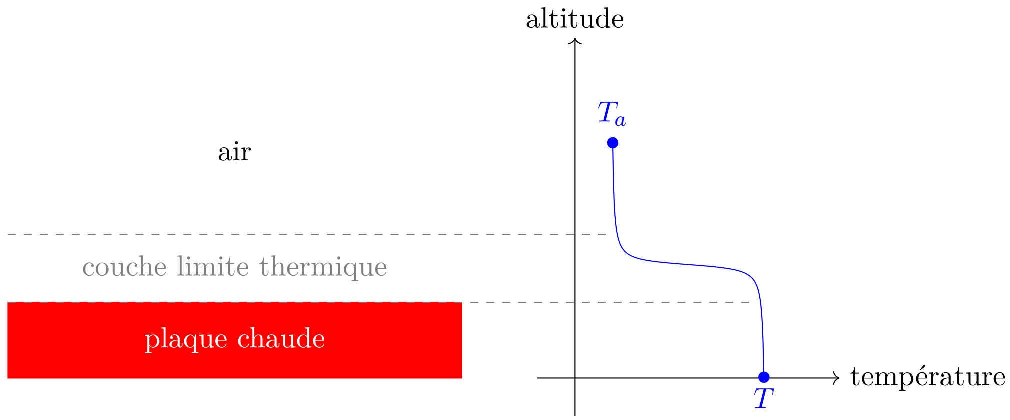


FIGURE 2.1 – Profil de température près d'une plaque chaude.

Il ne s'agit pas purement d'un phénomène de conduction : l'air réchauffé au contact de la plaque va s'éloigner pour être remplacé par de l'air plus frais, grâce à des mouvements de convection. On parle ainsi d'échanges conducto-convectifs entre la plaque et l'air.

Loi de Newton

Soit un corps de température T plongé dans un fluide à la température T_a. On note la surface de contact S.
Le flux thermique reçu par le corps de la part du fluide environnant s'écrit :

$$\Phi_Q = -h \times S \times (T - T_a)$$

Le coefficient de proportionnalité h est le **coefficient de transfert thermique**, s'exprimant en $\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Il quantifie la propension qu'a la chaleur à s'évacuer par conducto-convection.

☛ *Remarque :* Le coefficient de transfert dépend notamment de la vitesse du flux d'air à la surface du corps chaud. Ainsi, si l'air s'écoule rapidement autour de ce corps, il sera vite remplacé par un air plus frais, et la chaleur s'écoulera d'autant plus facilement : c'est pour cela que l'on souffle sur une cuillère de soupe chaude pour la refroidir...

Question 1 : Analyser le signe négatif dans l'expression du flux thermique de la loi de Newton.

2.2 Applications

2.2.1 Refroidissement d'un corps homogène dans un fluide

On considère une sphère homogène de rayon R, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Elle est initialement à une température $T_0 = 50\,°\mathrm{C}$.

La sphère baigne dans l'air, à la température constante $T_{\text{air}} = 15\,°\mathrm{C}$; des échanges conducto-convectifs de coefficient $h = XXX$ ont lieu entre la sphère et l'air, qui contribuent à refroidir la sphère au cours du temps. On note $T(t)$ sa température.

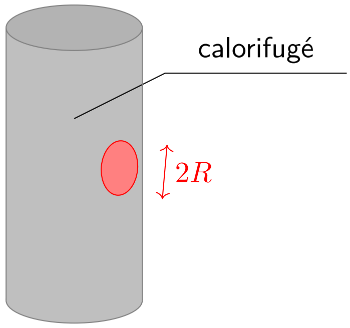
Question 2 : Déterminer la variation d'enthalpie dH de la sphère durant un instant infinitésimal dt.

Question 3 : Quelle est la chaleur δQ reçue par le corps au cours de cette durée ? En déduire, par application du premier principe enthalpique, l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$.

Question 4 : Mettre l'équation sous forme canonique. Quelle est la durée nécessaire pour atteindre le régime permanent ? Commenter.

2.2.2 Ailettes de refroidissement

Soit un corps chaud de température constante T_0, plongé dans un fluide à la température T_a. Il possède une surface de contact πR^2 (disque de rayon R) avec l'extérieur.



On soude à cette surface de contact une ailette cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$ (voir figure 2.2). L'objectif est de déterminer les différences de flux thermique en régime permanent avec ou sans l'ailette. Pour cela, on s'intéresse à une tranche de longueur dx de ladite ailette ; on notera ce système d'étude Σ. L'axe (O, x) sera l'axe de révolution de l'ailette, avec $x = 0$ correspondant à la jonction entre cette dernière et le corps ; $T(x)$ représente la température de l'ailette à l'abscisse x.

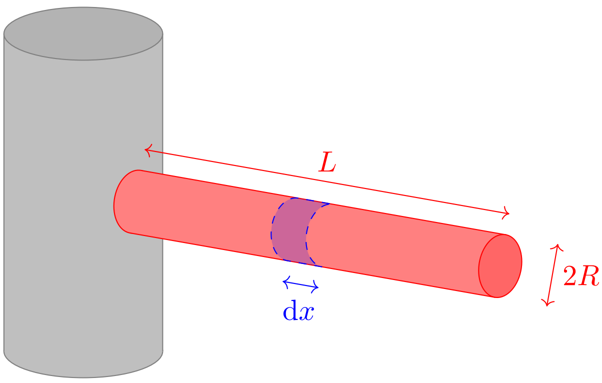


FIGURE 2.2 – Jonction de l'aile de refroidissement au corps chaud.

Question 5 : En régime permanent, que vaut la variation d'enthalpie dH de Σ ? Justifier.

Question 6 : Donner les expressions de δQ_e, quantité de chaleur arrivant par la droite par conduction, δQ_s, quantité de chaleur sortant par la gauche par conduction, et δQ_c, quantité de chaleur s'échappant latéralement par conducto-convection.

Question 7 : Que vaut la somme des δQ ? Simplifier l'expression obtenue en utilisant notamment la loi de Fourier.

Question 8 : Montrer alors que l'on obtient une équation différentielle pouvant se mettre sous la forme : $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{1}{\ell^2}T(x) = -\dfrac{1}{\ell^2}T_a$. Donner l'expression et la dimension de ℓ.

Question 9 : Résoudre l'équation différentielle à l'aide de deux constantes arbitraires A et B, que l'on ne cherchera pour l'instant pas à déterminer.

Question 10 : La température peut-elle être infinie lorsque $x \to \infty$? En déduire la valeur d'une des deux constantes, puis l'expression de la deuxième constante à l'aide d'une condition aux limites.

Question 11 : On considère que le corps chaud et l'ailette sont constitués d'acier de conductivité thermique $\lambda = 50\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, avec une ailette de rayon $R = 0{,}5\,\mathrm{cm}$ en convection naturelle avec l'air ($h = 10\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$). Que vaut ℓ ? Comment pourrait-on diminuer cette valeur ?

Question 12 : Donner l'expression finale de $T(x)$. Que vaut $\Phi_1 \triangleq \Phi_Q(x = 0)$, flux émis par le corps chaud à l'ailette ?

Question 13 : Si l'ailette n'était pas présente (c'est-à-dire en considérant uniquement de la conducto-convection), que vaudrait $\Phi_2 \triangleq \Phi_Q^{\text{sans ailette}}(x=0)$? Exprimer le rapport $\dfrac{\Phi_1}{\Phi_2}$, puis calculer sa valeur. Quel est l'intérêt de l'ailette ?

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Énoncer la loi thermique de Newton. Commenter le signe.
- ☐ Soit un corps homogène de capacité thermique C et de surface S, initialement à la température T_0. Ce corps baigne dans un fluide de température T_{ext}, et seuls des échanges conducto-convectifs (coefficient de transfert thermique h) ont lieu entre le corps et le fluide. Déterminer l'équation de $T(t)$, température du corps au cours du temps.

Chapitre 3 : Résistance thermique

Objectifs :

— Définir la résistance thermique.

— Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique.

Au concours ATS : Aux écrits en 2019. Tombe parfois aux oraux.

3.1 Analogie électrique

Soit un conducteur électrique soumis à une différence de potentiel $\Delta V = V_2 - V_1$ (que l'on appelle également tension U). Le déplacement d'électrons, et donc l'intensité i, est proportionnel à cette différence de potentiel. Ce coefficient de proportionnalité est noté R, appelé résistance électrique du conducteur, et on a alors : $U = R \times i$.

Question 1 : Lors de la diffusion thermique, quel phénomène est à l'origine de l'écoulement de la chaleur ? Quel est alors l'analogue du potentiel électrique V ?

Question 2 : De même, quel est l'analogue de l'intensité i ? En déduire par quelle formule on pourrait définir une résistance thermique R_{th}.

Question 3 : Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'en régime permanent, on a $T(x) = T_A - \dfrac{T_A - T_B}{L}x$, où T_A est la température « chaude » à gauche et T_B la température « froide » à droite. Exprimer j_Q, norme du vecteur densité de courant thermique, en fonction de $\Delta T = T_A - T_B > 0$, L et λ.

Question 4 : En déduire alors l'expression de la résistance thermique en fonction de λ, L et de la section S du conducteur thermique.

Résistance thermique

Soit un conducteur thermique de conductivité thermique λ, de longueur L et de section S, soumis à une différence de température ΔT. Il en résulte un flux thermique Φ_Q proportionnel à ΔT :

$$\Delta T = R_{\text{th}} \times \Phi_Q$$

Le coefficient de proportionnalité $R_{\text{th}} \triangleq \dfrac{L}{\lambda S}$ est la résistance thermique du matériau.

☛ *Remarque :* Cette expression de la résistance thermique est très proche de celle de la résistance électrique... allez donc vérifier dans le thème précédent !

Question 5 : Quelle est la dimension de la résistance thermique ?

Question 6 : Analyser l'expression de la résistance thermique.

3.2 Association de matériaux

3.2.1 Matériaux en série

Considérons un mur constitué d'une partie en brique et d'une partie en laine de verre. On note T_{ext} la température à l'extérieur, T_{int} la température à l'intérieur et T' la température à la jonction entre les briques et la laine de verre (voir figure 3.1).

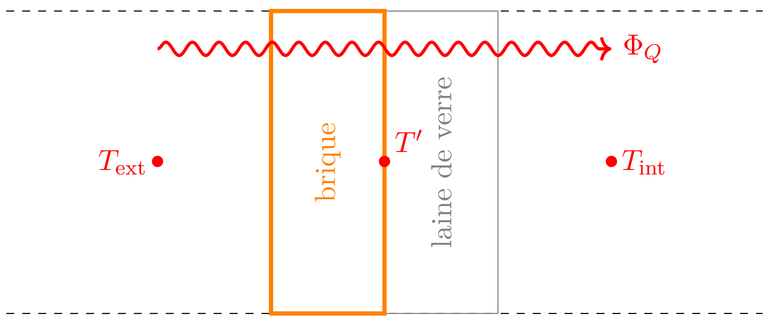


FIGURE 3.1 – Matériaux en série.

Supposons, pour simplifier l'étude, que la température extérieure est supérieure à la température intérieure. On note Φ_Q le flux thermique s'écoulant de l'extérieur vers l'intérieur [1].

Question 7 : Exprimer $T_{\text{ext}} - T'$ en fonction de R_{brique} et de Φ_Q. De même, exprimer $T' - T_{\text{int}}$ en fonction de R_{laine} et de Φ_Q.

Question 8 : Sommer les deux équations ; en déduire la résistance thermique équivalente entre l'extérieur et l'intérieur.

Question 9 : Quelle est l'analogie électrique que l'on peut ici faire ?

1. Φ_Q ne dépend pas de la position, comme nous l'avons vu précédemment ; il s'agit donc d'une constante, où que l'on se trouve dans le problème

3.2.2 Matériaux en parallèle

Considérons à présent un mur constitué de briques, possédant une fenêtre en son centre. On note T_{ext} la température à l'extérieur, T_{int} la température à l'intérieur ; comme précédemment, on suppose la température extérieure plus élevée que la température intérieure : $\Delta T \triangleq T_{\text{ext}} - T_{\text{int}} > 0$.

On note $R_{\text{brique},1}$ la résistance thermique du premier pan de mur ; $R_{\text{brique},2}$ la résistance thermique du deuxième pan de mur ; $R_{\text{fenêtre}}$ la résistance thermique de la fenêtre. De façon similaire, on note $\Phi_{\text{brique},1}$ le flux thermique s'écoulant à travers le premier pan de mur ; $\Phi_{\text{brique},2}$ celui s'écoulant à travers le deuxième pan de mur ; $\Phi_{\text{fenêtre}}$ celui s'écoulant à travers la fenêtre (voir figure 3.2).

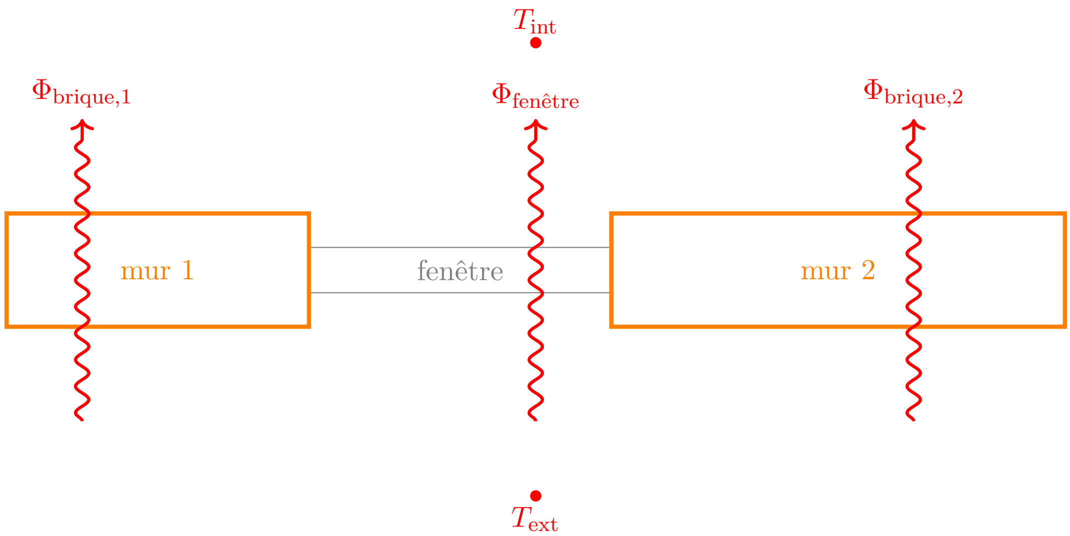


FIGURE 3.2 – Matériaux en parallèle.

Question 10 : Pour quelle raison a-t-on $R_{\text{brique},1} \neq R_{\text{brique},2}$?

Question 11 : Exprimer ΔT de trois façons différentes.

Question 12 : Notons $\Phi_Q = \Phi_{\text{brique},1} + \Phi_{\text{fenêtre}} + \Phi_{\text{brique},2}$ le flux thermique total entrant dans le bâtiment. Exprimer Φ_Q en fonction de ΔT et des différentes résistances thermiques. En déduire l'expression de l'inverse de la résistance équivalente.

Question 13 : Quelle est l'analogie électrique que l'on peut ici faire ?

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Établir qu'en régime permanent on a $\Delta T = R_{\text{th}} \times \Phi_Q$, avec R_{th} à expliciter.
- ☐ Montrer que, pour deux matériaux en série, on a $R_{\text{th,éq}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}$.
- ☐ Montrer que, pour deux matériaux en parallèle, on a $\dfrac{1}{R_{\text{th,éq}}} = \dfrac{1}{R_{\text{th},1}} + \dfrac{1}{R_{\text{th},2}}$.