

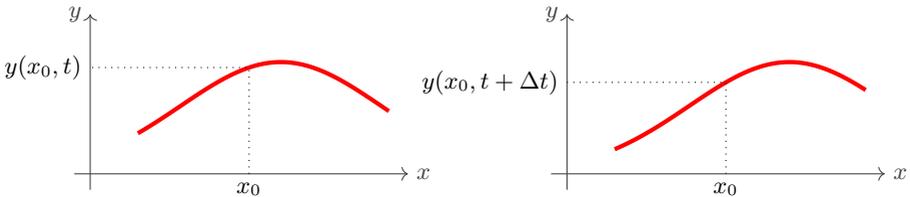
# 1 Vibration d'une corde

■ À revoir

■ Maîtrisé

## 1 Équation de d'Alembert pour la corde vibrante

On considère une corde vibrante de masse linéique (masse par unité de longueur)  $\mu$ . Au long de cette corde se propage un ébranlement. On repère par  $y(x, t)$  la hauteur de la corde à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$ .



On peut montrer que la tension de la corde  $T_0$  est uniforme. De plus,  $y(x, t)$  vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

où  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$  est la célérité des ondes se propageant le long de la corde.

## 2 Solutions de l'équation de d'Alembert

### Ondes progressives

Les solutions de l'équation de d'Alembert peuvent s'écrire :

$$y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions a priori quelconques.

- $f(x - ct)$  représente l'onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants ;
- $g(x + ct)$  représente l'onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants.

Une solution du type  $y(x, t) = f(x - ct)$  ou  $y(x, t) = g(x + ct)$  est appelée **onde progressive**.

## Ondes progressives sinusoïdales

Les **ondes progressives sinusoïdales** sont un type particulier d'ondes progressives :

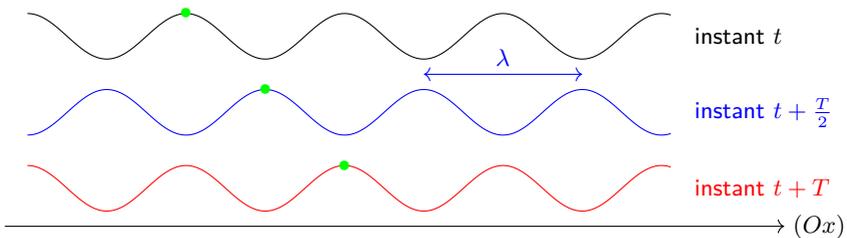
$$y(x, t) = Y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$\omega$  est la **pulsation de l'onde** (en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et  $k$  est le **nombre d'onde** (en  $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Pour une onde vérifiant l'équation de d'Alembert, on a  $\omega = kc$ .

Une onde progressive sinusoïdale possède une double périodicité :

– Sa **période temporelle**  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  est la durée minimale séparant deux valeurs identiques de l'onde en un point donné :  $y(x, t + T) = y(x, t)$  ;

– Sa **période spatiale** (ou **longueur d'onde**)  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  est la distance minimale séparant deux points où la valeur de l'onde est la même à un instant donné :  $y(x + \lambda, t) = y(x, t)$ .



## Ondes stationnaires

Une **onde stationnaire** est une onde où le temps et l'espace sont décorrélés ; une telle onde peut se mettre sous la forme :

$$y(x, t) = F(t) \times G(x)$$

Elle résulte de la somme d'une onde incidente  $f(x - ct)$  et d'une onde réfléchie  $g(x + ct)$ .

On montre alors que les seules possibilités pour  $F(t)$  et  $G(x)$  sont du type  $F(x) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$  et  $G(x) = G_0 \cos(kx + \psi)$  pour une onde vérifiant l'équation de d'Alembert.

### 3 Modes propres d'une corde fixée à ses extrémités

Soit une corde de longueur  $L$ , fixée à ses deux extrémités ( $x = 0$  et  $x = L$  : on a donc  $y(x = 0, t) = y(x = L, t) = 0 \forall t$ ).

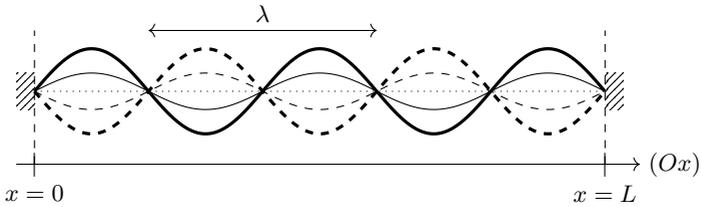
Les **conditions aux limites** de la corde (fixée à ses deux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ ) imposent que les pulsations et nombres d'ondes des ondes stationnaires la parcourant sont **quantifiées** : elles ne peuvent prendre que les valeurs

$$\omega_m = m \times \frac{\pi c}{L} \quad \text{et} \quad k_m = m \times \frac{\pi}{L}$$

où  $m$  est un entier  $\geq 1$ .

Chaque valeur de  $m$  définit un **mode propre** de la corde.

On peut tracer l'allure de la corde à différents instants pour le mode  $m = 5$  à  $t$  (gras, plein),  $t + T_5/6$  (plein),  $t + T_5/4$  (pointillés)  $t + 2T_5/6$  (traitillés) et  $t + T_5/2$  (gras, traitillés).



Un **nœud de vibration** est une position où la perturbation a une amplitude nulle; un **ventre de vibration** est une position où la perturbation a une amplitude maximale. En particulier, eux nœuds ou deux ventres de vibration successifs sont séparés d'une distance  $\frac{\lambda_m}{2}$ .

Pour la corde vibrante à extrémités liées, un mode propre  $m$  contient  $m$  ventres et  $m + 1$  nœuds. On dit alors que l'on observe  $m$  **fuseaux** (c'est-à-dire  $m$  arcs de sinusoïde).



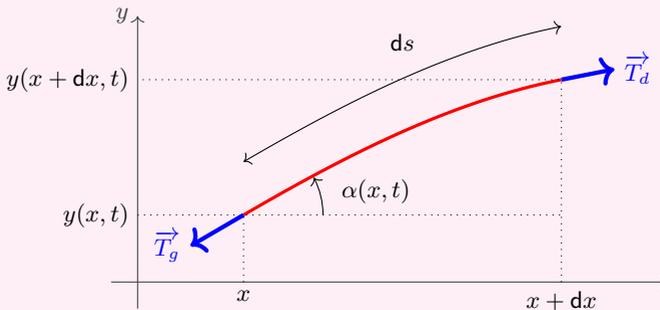
## Établissement de l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante

### Énoncé

Soit une corde de masse linéique  $\mu$  sur laquelle se propage une onde. On note  $y(x, t)$  son élévation à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$  par rapport à sa position d'équilibre,  $\alpha(x, t)$  l'angle que forme la corde par rapport à l'axe horizontal  $(O, x)$  et  $\vec{T}(x, t)$  la tension que la portion de corde à gauche de  $x$  exerce sur la portion de corde à droite de  $x$ .

On se place en particulier dans l'approximation des petits angles :  $\alpha(x, t) \ll 1$ . Le poids est par ailleurs négligé dans ce problème face aux forces de tension de la corde.

On s'intéresse à un brin compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  ; on note  $ds$  la longueur de ce brin. L'angle  $\alpha$  étant très faible, on peut approximer ce brin à un segment droit.



1. Montrer que  $\alpha(x, t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$ . En déduire que la masse  $\delta m$  du brin vaut  $\delta m \approx \mu dx$ .
2. Exprimer  $\vec{T}_g$  et  $\vec{T}_d$  en fonction de  $T(x)$ , norme du vecteur  $\vec{T}(x, t)$ , et de  $\alpha(x, t)$ . Que deviennent ces expressions dans l'approximation des petits angles ?
3. Exprimer l'accélération du brin  $\vec{a}$ . En déduire, par projection du principe fondamental appliqué au brin selon l'axe  $(O, x)$ , que l'on a  $T(x) = T_0$ , avec  $T_0$  une constante. Que représente-t-elle ?
4. En projetant l'équation du mouvement selon l'axe  $(O, y)$ , montrer que  $y(x, t)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ . Comment se nomme cette équation ? Donner l'expression de  $c$  ainsi que son interprétation physique.



## Résolution

$$1. \text{ On a } \tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{y(x + dx, t) - y(x, t)}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t).$$

Or, dans l'approximation des petits angles, on a  $\tan(\alpha) \approx \alpha$ , donc :  $\alpha(x, t) \approx \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$ .

Par ailleurs, la masse du brin est  $\delta m = \mu \times ds$ . Or :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \quad \text{par application du théorème de Pythagore} \\ &= dx^2 + (\alpha dx)^2 \\ &= dx^2 \times (1 + \alpha^2) \\ &\approx dx^2 \quad \text{car } \alpha \ll 1 \end{aligned}$$

Nécessairement :  $\delta m \approx \mu dx$ .

$$2. \text{ On a } \vec{T}_g = \begin{pmatrix} -T(x) \cos(\alpha(x, t)) \\ -T(x) \sin(\alpha(x, t)) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{T}_d = \begin{pmatrix} T(x + dx) \cos(\alpha(x + dx, t)) \\ T(x + dx) \sin(\alpha(x + dx, t)) \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\vec{u}_x, \vec{u}_y).$$

Dans l'approximation des petits angles, on a  $\cos(\alpha) \approx 1$  et  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ , donc :

$$\vec{T}_g = \begin{pmatrix} -T(x) \\ -T(x) \times \alpha(x, t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{T}_d = \begin{pmatrix} T(x + dx) \\ T(x + dx) \times \alpha(x + dx, t) \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Le déplacement est purement vertical : } \vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \vec{u}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{pmatrix}.$$

Le brin n'étant soumis qu'à  $\vec{T}_g$  et  $\vec{T}_d$ , il vient, par application du PFD, que :

$$\underbrace{\mu dx}_{\delta m} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T(x) \\ -T(x) \times \alpha(x, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T(x + dx) \\ T(x + dx) \times \alpha(x + dx, t) \end{pmatrix}$$

La projection selon  $\vec{u}_x$  donne donc que :  $0 = T(x + dx) - T(x)$ . En multipliant et divisant par  $dx$ , on en déduit que  $\frac{dT}{dx} = 0$ , et donc que  $T(x) = T_0$  avec  $T_0$  une constante.



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

4. En utilisant le fait que  $T(x) = T_0$ , la projection selon  $\vec{u}_y$  donne :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_0 \times \alpha(x, t) + T_0 \times \alpha(x + dx)$$

Si l'on divise par  $dx$ , on reconnaît dans le membre de droite une dérivée :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \times \frac{\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)}{dx} = T_0 \times \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

Or, on sait que  $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ . Il vient donc que :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Il s'agit d'une équation de d'Alembert. On a  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$  :  $c$  représente la célérité des ondes se propageant dans la corde.

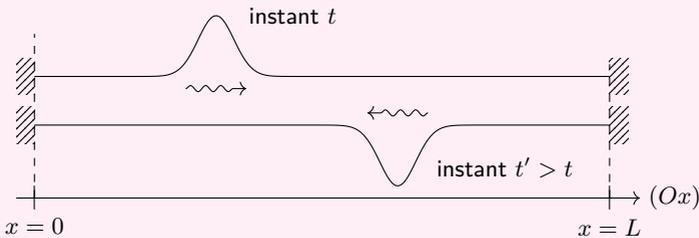


## Détermination des modes propres d'une corde fixée à ses deux extrémités

### Énoncé

Prenons l'exemple d'une corde, dont les extrémités gauche (en  $x = 0$ ) et droite (en  $x = L$ ) sont fixes :  $y(x = 0, t) = y(x = L, t) = 0$  pour tout  $t$ .

On envoie une onde incidente progressive et harmonique  $y_i(x, t) = Y_0 \cos(kx - \omega t)$  ; celle-ci revient après réflexion à un instant  $t' > t$ .



On cherche l'onde réfléchie sous la forme  $y_r(x, t) = Y_r \cos(kx + \omega t + \varphi)$ , avec  $Y_r$  et  $\varphi$  deux paramètres a priori inconnus.

1. Exprimer l'élévation totale de la corde  $y(x, t)$ . Que nous apprend la condition en  $x = 0$  quant aux expressions de  $Y_r$  et  $\varphi$  ? En déduire la nouvelle expression de  $y(x, t)$  en fonction de  $Y_i$ ,  $\omega$ ,  $t$ ,  $k$  et  $x$ .
2. On rappelle que  $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ . Montrer que  $y(x, t)$  est en réalité une onde stationnaire.
3. À l'aide de l'équation de d'Alembert, montrer que  $\omega = kc$ .
4. En utilisant la condition en  $x = L$ , montrer que  $k$  et  $\omega$  sont quantifiés. Donner leurs expressions respectives  $k_m$  et  $\omega_m$  en fonction d'un entier naturel  $m \leq 1$ .
5. Donner l'allure de la corde à différents instants pour  $m = 5$ , en faisant figurer en particulier la longueur d'onde  $\lambda_5 \triangleq \frac{2\pi}{k_5}$ .

### Résolution

1. On a  $y(x, t) = y_i(x, t) + y_r(x, t) = Y_0 \cos(kx - \omega t) + Y_r \cos(kx + \omega t + \varphi)$ .  
En  $x = 0$ , on a  $y(x = 0, t) = 0$  pour tout  $t$ . Cela signifie que, pour tout  $t$  :

$$Y_0 \cos(-\omega t) + Y_r \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Nécessairement, on a pour tout  $t$  :

$$Y_0 \cos(\omega t) = -Y_r \cos(\omega t + \varphi)$$



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

Il vient que  $Y_r = -Y_0$  et que  $\varphi = 0$ . On en déduit donc que :

$$y(x, t) = Y_0 \times [\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)]$$

2. Posons  $a = kx - \omega t$  et  $b = kx + \omega t$ ; on a donc  $\frac{a+b}{2} = kx$  et  $\frac{a-b}{2} = -\omega t$ .

Il vient alors que  $y(x, t) = -2Y_0 \times \sin(kx) \times \sin(-\omega t)$ , c'est-à-dire :

$$y(x, t) = 2Y_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$$

C'est une onde stationnaire, car elle peut s'écrire comme un produit d'une fonction spatiale  $\sin(kx)$  et d'une fonction temporelle  $\sin(\omega t)$ .

3. On a  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x, t)$  et  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y(x, t)$ . Nécessairement, l'équation de d'Alembert donne que :

$$-\omega^2 y(x, t) - c^2 \times (-k^2 y(x, t)) = 0$$

Cette équation étant vérifiée pour tout  $x$  et pour tout  $t$ , on peut simplifier par  $y(x, t)$  et en déduire que  $\omega^2 = k^2 c^2$ , c'est-à-dire que  $\omega = kc$ .

4. On a  $y(x = L, t) = 0$  pour tout  $t$ , c'est-à-dire que pour tout  $t$  :  $2Y_0 \sin(kL) \sin(\omega t) = 0$ . Cette équation étant vérifiée pour tout  $t$ , on a nécessairement  $\sin(kL) = 0$  ( $Y_0$  ne peut être nul, ou il n'existera aucune onde se propageant dans la corde). On en déduit que  $kL$  est un multiple de  $\pi$  :  $k \times L = m \times \pi$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ .

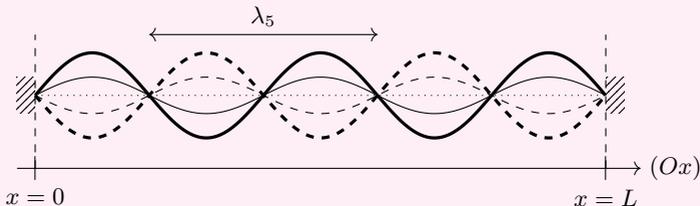
Nécessairement, seules certaines valeurs de  $k$  conviendront :

$$k_m = m \times \frac{\pi}{L}$$

De plus, on sait que  $\omega = kc$ , donc seules certaines valeurs de  $\omega$  répondent au problème :

$$\omega_m = m \times \frac{\pi c}{L}$$

5.



## 2 Circuits électriques et ondes électriques

■ À revoir

■ Maîtrisé

### 1 Équations de Maxwell

Les phénomènes électromagnétiques sont régis par quatre équations, appelées **équations de Maxwell** :

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(Maxwell-Gauss)
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	(Maxwell-Faraday)
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	(Maxwell-Thomson)
$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	(Maxwell-Ampère)

♥ L'**équation de Maxwell-Gauss** est une écriture locale du théorème de Gauss.

♥ L'**équation de Maxwell-Faraday** est une écriture locale de la loi de Faraday. Elle justifie également l'existence du **potentiel électrique**  $V$  tel que  $\vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ .

♥ L'**équation de Maxwell-Thomson** (ou équation de Maxwell relative au flux) est une écriture locale de la conservation du flux magnétique. Elle justifie également l'existence du **potentiel magnétique**  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ .

♥ L'**équation de Maxwell-Ampère** est une écriture locale du théorème d'Ampère, en régime stationnaire. Elle justifie également la conservation de la charge en régime variable.

### 2 Lois de Kirchhoff en régime variable

#### Approximation des régimes quasi-stationnaires

L'**approximation des régimes quasi-stationnaires** (ou ARQS) consiste à considérer comme négligeable le temps de propagation  $\Delta t$  des ondes électromagnétiques devant la période du signal  $T$  :  $\Delta t \ll T$ .

Si l'on note  $L$  la longueur caractéristique d'un circuit électrique et  $\lambda$  la longueur d'onde du signal, l'ARQS peut se traduire par :  $L \ll \lambda$ .

✚ Pour le réseau EDF français ( $c \approx 2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ), on a  $f = 50 \text{ Hz}$  pour les lignes à haute tension donc  $\lambda \approx 4000 \text{ km}$  : on ressent les effets de retard à partir de  $\sim 1000 \text{ km}$ , ce qui correspond à la taille du territoire français métropolitain.

✚ Pour un circuit électrique en salle de TP avec  $f = 200 \text{ kHz}$ , on a  $\lambda \approx 1 \text{ km}$  : les effets de retard sont bien négligeable sur un montage de longueur  $L \sim 1 \text{ m}$ .

## Retour sur la loi des nœuds

L'ARQS a pour conséquence de négliger le courant de déplacement  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  face au courant de conduction  $\vec{j}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \left\| \vec{j} \right\|$$

L'équation de Maxwell-Ampère devient donc :  $\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$ .

L'ARQS a donc pour conséquence de considérer la divergence du courant de conduction nulle :  $\text{div } \vec{j} = 0$ .

De ce fait, le courant est à flux conservatif, et la loi des nœuds est toujours valable dans cette approximation.

## Retour sur la loi des mailles

Dans l'ARQS, la loi des maille est toujours valable si l'on modélise les effets d'auto-induction par un dipôle d'auto-inductance égale à l'auto-inductance totale du circuit.

## 3 Ondes thermiques

■ À revoir

■ Maîtrisé

## 1 Classification des ondes

Soit une onde se propageant selon la direction et le sens du vecteur unitaire  $\vec{u}$ . Le **vecteur d'onde**  $\vec{k}$  est défini par :

$$\vec{k} = k \cdot \vec{u}$$

où  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , avec  $\lambda$  la longueur d'onde.

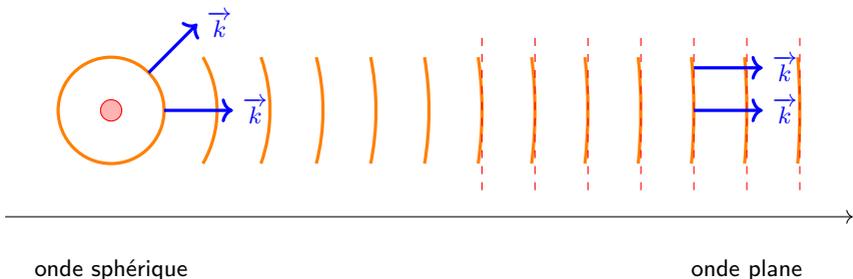
Les **fronts d'onde** correspondent alors à des surface auxquelles le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est orthogonal en tout point.

✚ Une onde issue d'un point-source  $O$  émettra *a priori* dans toutes les directions de la même manière. On aura donc  $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_r$  en coordonnées sphériques ; les fronts d'onde seront alors des sphères centrées en  $O$ .

## Onde plane

Une **onde plane** est une onde dont les fronts d'onde sont des plans infinis. Nécessairement, le vecteur d'onde  $\vec{k}$  d'une onde plane est uniforme :  $\vec{k} = \vec{k}_0$ .

Une onde plane n'a pas de réalité physique, car elle transporterait une énergie infinie sur tout son front d'onde (infini). Il ne s'agit que d'une « simplification locale » de l'onde sphérique (c'est-à-dire si l'on est « suffisamment loin » de la source et si l'on étudie une surface « suffisamment petite »).



✚ Si l'on a par exemple  $\vec{k} = k_0 \cdot \vec{u}_z$  (avec  $\vec{u}_z$  un vecteur uniforme), il vient que  $\mathcal{A}(M, t)$  est une onde plane si et seulement si cette onde ne dépend spatialement que de  $z$  :  $\mathcal{A}(M, t) = \mathcal{A}(z, t)$ .

## Onde plane progressive harmonique

On dit qu'une onde  $\mathcal{A}(M, t)$  est une **onde plane progressive harmonique** (OPPH) si et seulement si :

- Elle est plane :  $\mathcal{A}(M, t) = \mathcal{A}(z, t)$  ;
  - Elle est progressive et sinusoïdale :  $\mathcal{A}(M, t) = A_0 \cos(kz \pm \omega t + \varphi)$ .
- ♥ On n'a pas forcément  $\omega = kc$  pour une OPPH.

## 2 Utilisation des OPPH dans le cas de l'équation de la chaleur

Soit une onde thermique se propageant dans le sens des  $z$  croissants (l'axe  $(O, z)$  est orienté vers le bas). On considère que cette onde thermique est une OPPH :

$$T(x, t) = T_0 \cos(kz - \omega t)$$

On montre, en injectant cette solution (sous forme complexe  $\underline{T} = T_0 e^{j\omega t} e^{-jkz}$ ) dans l'équation de la chaleur  $\frac{\partial T}{\partial t} - D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ , que  $k$  est nécessairement un nombre complexe  $\underline{k} = k' + jk''$ .

♥ En particulier, on remarque ici que  $\omega \neq kc$  ! Cette propriété est typique de la propagation d'une onde dans un milieu autre que le vide.

Il vient alors que  $T(x, t) = T_0 \cos(k'z - \omega t) e^{-k''z}$  : la solution est en réalité bien une onde plane sinusoïdale, mais elle n'est pas progressive.

♥ On retient que, même si l'on recherche une solution sous la forme d'une OPPH, il ne s'agit que d'une recherche : cela ne signifie pas que la solution sera bien en réalité une OPPH...



## Détermination du champ des températures suite à une excitation plane et sinusoïdale

### Énoncé

Considérons une onde thermique provenant du sol ( $z = 0$ ) et se propageant en profondeur (dans le sens des  $z$  croissants;  $(O, z)$  est donc l'axe vertical descendant).

L'onde à la surface est sinusoïdale : elle varie selon le cycle journalier. On a donc  $T(z = 0, t) = T_{\text{moy}} + T_0 \cos(\omega t)$  avec  $T_{\text{moy}} = 15^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 5^\circ\text{C}$  et  $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ jour}}$ .

On pose alors  $\theta(z, t) = T(z, t) - T_{\text{moy}}$ , et on cherche cette fonction sous la forme d'une onde plane progressive harmonique :  $\theta(z, t) = T_0 \cos(\omega t - kz)$ . La seule inconnue est alors  $k$ .

$\theta(z, t)$  vérifie l'équation de la chaleur :  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$  où  $D = \frac{\lambda}{\mu c} = 5,4 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  est la diffusivité thermique du sol, constitué principalement de béton.

- On utilise la notation complexe :  $\underline{\theta}(z, t) = \theta_0 e^{j(kz - \omega t)}$ . Réécrire alors l'équation de la chaleur pour la fonction complexe  $\underline{\theta}(z, t)$ . En déduire une relation entre  $k$ ,  $\omega$  et  $D$ ; montrer que  $k$  est en réalité un nombre complexe, que l'on notera désormais  $\underline{k}$ .
- En utilisant le fait que  $j = e^{j\pi/2}$ , montrer que les valeurs possibles pour  $\underline{k}$  sont  $\underline{k}^+ = +\frac{1+j}{\delta}$  et  $\underline{k}^- = -\frac{1+j}{\delta}$ . Donner l'expression de  $\delta$  en fonction de  $\omega$  et  $D$ . Quelle est sa dimension ? et sa valeur numérique ?
- Montrer que la solution de l'équation de la chaleur est alors du type :

$$\underline{\theta}(z, t) = A e^{j(z/\delta - \omega t)} e^{-z/\delta} + B e^{-j(z/\delta + \omega t)} e^{z/\delta}$$

avec  $A$  et  $B$  deux constantes. En déduire alors l'expression de  $\theta(z, t)$  en fonction notamment de  $A$  et  $B$ .

- Justifier que  $B$  est nécessairement nul pour obtenir une solution physiquement réaliste. En déduire l'expression de  $T(z, t)$  en fonction des paramètres du problème.

### Résolution

- On a  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = -j\omega \underline{\theta}$  et  $\frac{\partial \theta}{\partial z} = (jk)^2 \underline{\theta} = -k^2 \underline{\theta}$ .

On en déduit, en réinjectant ces expressions dans l'équation de la chaleur, que :  $-j\omega \underline{\theta} = D \times (-k^2) \underline{\theta}$ . En simplifiant par  $\underline{\theta}$ , il vient alors que :

$$k^2 = j \frac{\omega}{D}$$

Le membre de droite étant un nombre imaginaire pur, on en déduit que  $k$  doit en réalité être un nombre complexe, noté  $\underline{k}$ .



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

2. On a  $\underline{k}^2 = e^{j\pi/2} \frac{\omega}{D}$ , donc  $\underline{k} = \pm e^{j\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{D}}$ .

Or  $e^{j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$ , donc  $\underline{k} = \pm(1+j) \times \sqrt{\frac{\omega}{2D}}$ . En posant  $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ ,

on en déduit que  $\underline{k} = \pm \frac{1+j}{\delta}$ .

La dimension de  $\delta$  est l'inverse de celle de  $k$  (qui s'exprime en  $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$  dans le système international), donc  $[\delta] = L$ . L'application numérique donne  $\delta = 0,12 \text{ m}$ .

3. On cherchait une solution sous la forme  $\theta(z, t) = \theta_0 \exp(j(kz - \omega t))$ , et on a trouvé deux valeurs de  $\underline{k}$  vérifiant cette forme. Par principe de superposition, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \theta(z, t) &= A \exp(j(\underline{k}^+ z - \omega t)) + B \exp(j(\underline{k}^- z - \omega t)) \\ &= A \exp\left(j\left(\frac{1+j}{\delta} z - \omega t\right)\right) + B \exp\left(j\left(-\frac{1+j}{\delta} z - \omega t\right)\right) \\ &= A \exp\left(j\frac{z}{\delta} - j\omega t - \frac{z}{\delta}\right) + B \exp\left(-j\frac{z}{\delta} - j\omega t + \frac{z}{\delta}\right) \\ &= A e^{j(z/\delta - \omega t)} e^{-z/\delta} + B e^{-j(z/\delta + \omega t)} e^{z/\delta} \end{aligned}$$

En notation réelle (et en utilisant le fait que le cosinus est pair), on a donc :

$$\theta(z, t) = A \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) e^{-z/\delta} + B \cos\left(\frac{z}{\delta} + \omega t\right) e^{z/\delta}$$

4. La deuxième partie de la solution possède un terme en  $\frac{z}{\delta} + \omega t$  : il correspond donc à une onde thermique se propageant dans le sens des  $z$  décroissants... ce qui est impossible, car le milieu d'étude est homogène : la réflexion de l'onde incidente ne peut arriver. On en déduit que l'on a nécessairement  $B = 0$ .

Il vient que  $\theta(z, t) = A \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) e^{-z/\delta}$ , et alors que

$T(z, t) = T_{\text{moy}} + A \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) e^{-z/\delta}$ . On peut déterminer l'expression de  $A$  à l'aide de la condition  $T(z = 0, t) = T_{\text{moy}} + T_0 \cos(\omega t)$  : il vient que  $T_{\text{moy}} + A \cos\left(\frac{0}{\delta} - \omega t\right) e^{-0/\delta} = T_{\text{moy}} + T_0 \cos(\omega t)$ , c'est-à-dire que  $A = T_0$ .

On a nécessairement :

$$T(z, t) = T_{\text{moy}} + T_0 \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) e^{-z/\delta}$$

## 4 Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

■ À revoir

■ Maîtrisé

### 1 Équation de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

En électromagnétisme, le **vide** (ou « **vide de courants et de charges** ») correspond à une absence de matière : on a donc  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ .

Des ondes électromagnétiques peuvent cependant s'y propager :  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont *a priori* non-nuls.

Le champ électrique et le champ magnétique se propagent dans le vide en suivant l'équation de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{B} = \vec{0}}$$

La vitesse de propagation de ces ondes électrique et magnétique est  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  : c'est la vitesse de la lumière dans le vide.

♥ La lumière est en réalité une onde électromagnétique, c'est-à-dire une onde associée à un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$ .

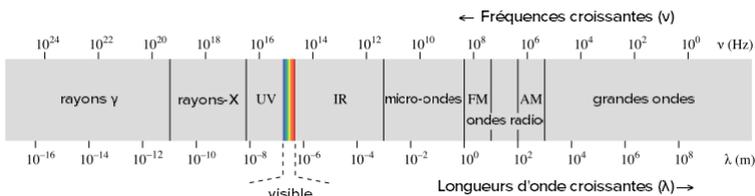
### 2 Polarisation d'une onde électromagnétique

La **polarisation** d'une onde électromagnétique correspond à la direction du champ électrique  $\vec{E}$ . Elle peut *a priori* dépendre du temps.

♥ Connaître la polarisation d'une onde électromagnétique suffit à la décrire, car on peut déterminer le champ  $\vec{B}$  à partir de l'équation de Maxwell-Ampère ou de celle de Maxwell-Faraday.

Une onde électromagnétique se propageant dans le vide est partiellement décrite par la donnée de sa longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .

Le spectre des ondes électromagnétique est composé de différentes régions. Le visible est contenu entre les longueurs d'onde  $\lambda_V = 400 \text{ nm}$  et  $\lambda_R = 800 \text{ nm}$ , ce qui correspond respectivement aux fréquences  $f_R = 4 \times 10^{14} \text{ Hz}$  et  $f_V = 8 \times 10^{14} \text{ Hz}$ .



♥ On peut citer des applications techniques et scientifiques pour chacune des régions : imagerie médicale et médecine nucléaire pour les rayons  $\gamma$  et  $X$ , luminothérapie et désinfection pour les UV, spectroscopie et thermographie pour les IR, radars et fours pour les micro-ondes, communication pour les ondes radio.

On dit qu'une onde électromagnétique se propageant selon le vecteur d'onde  $\vec{k}$  cette OPPM est **polarisée rectilignement** si on peut l'écrire sous la forme :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)$$

où le vecteur  $\vec{E}_0$  ne dépend ni de l'espace, ni du temps.

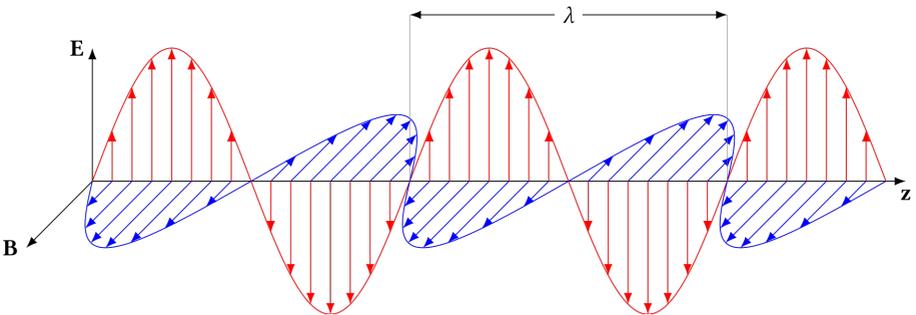
### 3 Structure d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique et polarisée rectilignement

Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique et polarisée rectilignement est **transverse** : si la direction de propagation est selon la direction  $\vec{k}$ , alors  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  seront orthogonaux à cette direction.

Par ailleurs, le champ électrique  $\vec{E}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  associés à une onde électromagnétique se propageant selon  $\vec{k}$  sont orthogonaux :  $\vec{B} \perp \vec{E}$ .

Il vient donc, si l'on rajoute la propriété de transversalité, que  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  est une base orthogonale directe. En particulier, en notation complexe pour une OPPM polarisée rectilignement :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$



♥ La relation  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$  n'est pas valable si l'onde n'est pas une OPPM polarisée rectilignement ! Il faut donc vérifier cette hypothèse avant d'appliquer la formule.



## Établissement de l'équation de d'Alembert pour le champ électrique

## Énoncé

1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide de courants et de charges. Préciser également leurs noms respectifs.
2. En utilisant l'identité vectorielle  $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \vec{\Delta} \vec{A}$ , établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\vec{E}$ .
3. En déduire la célérité  $c$  des ondes électromagnétiques dans le vide; faire l'application numérique. On rappelle que  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ .

## Résolution

1. Le vide de courants et de charges signifie que  $\rho = 0$  et  $\vec{j} = \vec{0}$ . On a donc :

$$\text{div} \vec{E} = 0 \quad (\text{Maxwell-Gauss})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Faraday})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{Maxwell-Thomson})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwell-Ampère})$$

2. • D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \vec{\Delta} \vec{E} \\ &= \vec{\text{grad}} 0 - \vec{\Delta} \vec{E} \quad \text{par M-G} \\ &= -\vec{\Delta} \vec{E} \end{aligned}$$

- D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= \vec{\text{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad \text{par M-F} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{par M-A} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

- On en déduit que  $\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ .

3. Il vient alors que  $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \vec{\Delta} \vec{E} = \vec{0}$  avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ .

L'application numérique donne :  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## 5 Énergie d'une onde électromagnétique dans le vide

■ À revoir

■ Maîtrisé

### 1 Conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide

On appelle **densité volumique d'énergie électromagnétique** la quantité :

$$u_{\text{em}} = u_e + u_m = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

♥ On a  $\vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\|^2 \triangleq A^2$ .

On définit par ailleurs le **vecteur de Poynting** par :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

♥ Le vecteur de Poynting est également parfois noté  $\vec{R}$  ou  $\vec{S}$ .

♥ Cette relation n'est valable que pour des champs réels : elle n'est pas du tout valable pour des champs complexes !

Le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$  représente localement la densité surfacique de puissance électromagnétique rayonnée.

Ainsi, la puissance rayonnée sur une surface quelconque  $S$  est égale au flux du vecteur de Poynting à travers cette même surface :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

On en déduit que le vecteur de Poynting s'exprime en  $\text{W}/\text{m}^2$ .

L'**équation locale de Poynting** décrit alors à l'échelle mésoscopique la conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide :

$$\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0$$

À l'échelle macroscopique, elle devient  $\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = -\mathcal{P}_{\text{ray}}$  : un système perd de l'énergie électromagnétique ( $\frac{dU_{\text{em}}}{dt} < 0$ ) s'il émet un rayonnement vers l'extérieur ( $\mathcal{P}_{\text{ray}} > 0$ ).

## 2 Observation d'une onde électromagnétique

Un capteur photométrique, qu'il s'agisse d'un œil ou d'une photodiode, possède un temps de réponse qui ne dépasse généralement pas la nanoseconde.

Il vient que le vecteur de Poynting effectif (c'est-à-dire : le vecteur de Poynting que l'on ressent effectivement) est égal à la moyenne temporelle du vecteur de Poynting pour des signaux lumineux :

$$\vec{\Pi}^{\text{eff}} = \langle \vec{\Pi}(t) \rangle$$

Nécessairement, la puissance rayonnée effective est égale à :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}}^{\text{eff}} = \iint_S \vec{\Pi}^{\text{eff}} \cdot d\vec{S}$$

La norme de  $\vec{\Pi}^{\text{eff}}$  est appelée **éclairage énergétique** ou **irradiance**  $\mathcal{E}_e$ .

♥ On peut citer sa valeur pour le rayonnement solaire au sommet de l'atmosphère :  $\mathcal{E}_e = 1361 \text{ W/m}^2$  ; pour le rayonnement solaire au niveau du sol :  $\mathcal{E}_e \approx 1000 \text{ W/m}^2$  ; pour un pointeur laser  $\mathcal{E}_e \approx 100 \text{ W/m}^2$ .



## Étude énergétique d'une onde électromagnétique dans le vide

### Énoncé

Soit une onde électromagnétique plane, progressive, monochromatique se propageant dans le vide et dans le sens des  $x$  croissants. On note  $k$  son nombre d'onde,  $\omega$  sa pulsation et  $E_0$  son amplitude.

1. Donner l'expression du champ électrique réel  $\vec{E}(M, t)$  associé à l'onde électromagnétique, sachant que cette onde est polarisée rectilignement selon l'axe  $(O, y)$ . En déduire l'expression complexe  $\underline{\vec{E}}(M, t)$  de ce champ.
2. Que vaut le vecteur d'onde  $\vec{k}$  de cette onde ? En déduire alors l'expression du champ magnétique complexe  $\underline{\vec{B}}(M, t)$ , puis son expression réelle  $\vec{B}(M, t)$ . On rappelle que  $\omega = kc$  dans le vide.
3. Exprimer le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}(M, t)$  associé à l'onde électromagnétique. Commenter son sens et sa direction.
4. L'onde électromagnétique est émise par un laser, dont le faisceau a un diamètre  $d$ . Exprimer la puissance moyenne  $\mathcal{P}$  rayonnée par ce laser sur une surface orthogonale à sa direction de propagation.

### Résolution

1. On a  $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{u}_y$ , et donc  $\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \cdot \vec{u}_y$ .
2. L'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants, donc  $\vec{k} = k \cdot \vec{u}_x$ .  
Puisque l'onde est une OPPH polarisée rectilignement, il vient que :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{B}} &= \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \\ &= \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(kx - \omega t)} \cdot \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \\ &= \frac{E_0}{c} e^{i(kx - \omega t)} \cdot \vec{u}_z \end{aligned}$$

Nécessairement, on a  $\vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \cdot \vec{u}_z$ .



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

3. On a :

$$\begin{aligned}
 \vec{\Pi}(M, t) &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\
 &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kx - \omega t) \cdot \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z \\
 &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kx - \omega t) \cdot \vec{u}_x
 \end{aligned}$$

On remarque que  $\vec{\Pi}(M, t)$  est dirigé selon  $+\vec{u}_x$  : l'énergie se propage donc dans la même direction que l'onde (en effet,  $\vec{k} = k \cdot (+\vec{u}_x)$ ).

4. La puissance moyenne rayonnée est  $\mathcal{P} = \iint_{\text{section du faisceau}} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$ .

Or  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \underbrace{\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle}_{1/2} \cdot \vec{u}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \cdot \vec{u}_x$  qui est un vecteur uniforme sur la section droite du faisceau.

Il vient donc, puisque  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{u}_x$ , que  $\mathcal{P} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \times \pi \frac{d^2}{4}$ .

## 6 Réflexion des ondes électromagnétiques sur les conducteurs

■ À revoir

■ Maîtrisé

### 1 Champs dans un conducteur parfait

On dit qu'un milieu est un **conducteur parfait** si l'on a une conductivité  $\gamma$  qui tend vers l'infini :  $\boxed{\gamma \rightarrow \infty}$ .

On peut reformuler cette condition : un milieu est un conducteur parfait si sa résistivité  $\frac{1}{\gamma}$  est nulle :  $\boxed{\frac{1}{\gamma} \rightarrow 0}$ .

Une onde électromagnétique ne peut se propager dans un conducteur parfait :

- Le champ électrique de l'onde est nul :  $\boxed{\vec{E}_{\text{onde}} = \vec{0}}$  ;
- Le champ magnétique de l'onde est nul :  $\boxed{\vec{B}_{\text{onde}} = \vec{0}}$  ;
- Il n'y a pas de variation locale de la charge électrique :  $\boxed{\rho_{\text{onde}} = 0}$  ;
- Il n'y a pas de variation locale du courant électrique :  $\boxed{\vec{j}_{\text{onde}} = \vec{0}}$  .

On montre par ailleurs qu'il ne peut exister une densité surfacique de charges  $\sigma$  à la surface du conducteur parfait ; il peut cependant y exister une densité surfacique de courants  $\vec{j}_s$ .

### 2 Onde électromagnétique réfléchie sur un conducteur parfait

Si une OPPH polarisée rectilignement se propage jusqu'à un conducteur parfait, elle sera totalement réfléchie car l'énergie électromagnétique est nécessairement nulle en son sein.

Si l'on rajoute l'hypothèse que l'onde électromagnétique incidente (de vecteur d'onde  $\vec{k}$ ) est orthogonale à la surface du conducteur parfait, on peut démontrer que l'onde réfléchie aura un vecteur d'onde  $-\vec{k}$  et une polarisation opposée à celle de l'onde incidente.

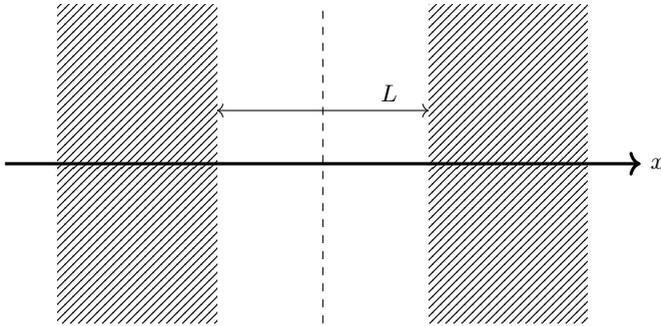
♥ On peut démontrer que, par continuité de la composante tangentielle du champ électrique, l'amplitude du champ électrique est toujours nulle au contact du métal. Celle du champ magnétique y est quant à elle toujours maximale, en valeur absolue.

Il résulte alors de la somme des ondes incidente et réfléchie que le champ électromagnétique en dehors du conducteur est celui d'une onde stationnaire.

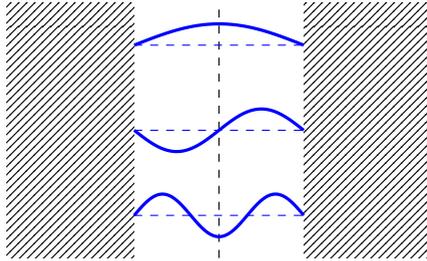
En particulier, la valeur moyenne du vecteur de Poynting est nulle dans le vide car l'onde incidente et l'onde réfléchie transportent la même énergie mais dans deux sens différents.

### 3 Application aux cavités unidimensionnelles

Considérons deux conducteurs parfaits séparés d'une distance  $L$ . Le premier occupe le demi-espace  $x < -L/2$ ; le deuxième occupe le demi-espace  $x > L/2$ .



Une onde électromagnétique confinée dans un espace limité  $L$  est forcément quantifiée : seules certains nombres d'ondes  $k_m = m \frac{\pi}{L}$  et certaines pulsations  $\omega_m = m \frac{\pi c}{L}$  sont accessibles.



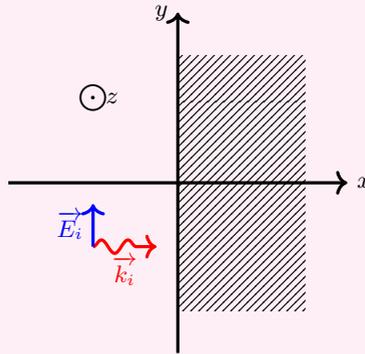


## Étude de la réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait

### Énoncé

Soit un milieu conducteur parfait correspond au demi-espace  $x > 0$ ; le demi-espace  $x < 0$  correspond au vide.

On considère une onde incidente arrivant perpendiculairement à la surface du milieu conducteur :  $\vec{k}_i = k \cdot \vec{u}_x$ . Cette onde incidente est une OPPH polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_y$ ; en notation complexe, on a :  $\underline{\vec{E}}_i = E_i e^{i(\omega t - kx)} \cdot \vec{u}_y$ .



1. Rappeler la définition d'un conducteur parfait; en déduire la valeur de  $\vec{E}(x > 0, t)$ .
2. On cherche une onde réfléchie sous la forme  $\underline{\vec{E}}_r = E_r e^{i(\omega' t + k' x)} \cdot \vec{u}_y$ . Montrer, à l'aide du théorème de Coulomb appliqué en  $x = 0$ , que l'on a  $E_r = -E_i$  et  $\omega = \omega'$ . En déduire que  $k' = k$ .
3. Déterminer alors le champ électrique réel  $\vec{E}(x < 0, t)$  dans le vide.
4. Déterminer les champs magnétiques complexes  $\underline{\vec{B}}_i$  et  $\underline{\vec{B}}_r$  respectivement associés aux ondes électromagnétiques incidente et réfléchie. En déduire le champ magnétique réel  $\vec{B}(x < 0, t)$  dans le vide.
5. Montrer que la valeur moyenne du vecteur de Poynting  $\langle \vec{\Pi}(x < 0, t) \rangle$  est nulle dans le vide; interpréter.



## Résolution

1. Un conducteur parfait est un conducteur de conductivité  $\gamma$  infinie. Par la loi d'Ohm locale dans le conducteur, on a donc  $\vec{E}(x > 0) = \underbrace{\frac{1}{\gamma}}_{\rightarrow 0} \cdot \vec{j}(x > 0) = \vec{0}$ .

2. Le théorème de Coulomb dit qu'à l'interface de deux milieux (1) et (2), on a  $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  avec  $\sigma$  la densité surfacique de charges à l'interface.

Considérons que le milieu (1) correspond au demi-espace  $x > 0$  (le conducteur) et le milieu (2) au demi-espace  $x < 0$  (le vide). Or :

- $\vec{E}_1 = \vec{0}$  d'après la question précédente ;
- $\vec{E}_2 = \vec{E}_i(x = 0^-, t) + \vec{E}_r(x = 0^-, t) = E_i e^{i(\omega t - k \times 0)} \cdot \vec{u}_y + E_r e^{i(\omega' t + k' \times 0)} \cdot \vec{u}_y$  ;
- $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{u}_x$ .

Il vient donc que l'on a :

$$\left( E_i e^{i\omega t} + E_r e^{i\omega' t} \right) \cdot \vec{u}_y = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{u}_x$$

En projetant cette équation selon  $\vec{u}_y$ , on trouve alors que  $E_i e^{i\omega t} = -E_r e^{i\omega' t}$ . Nécessairement, on a  $E_r = -E_i$  et  $\omega' = \omega$ .

Par ailleurs, on sait que, dans le vide, on a  $\omega' = k'c$  et  $\omega = kc$  donc  $k' = k$ .

3. On a :

$$\begin{aligned} \vec{E}(x < 0, t) &= \vec{E}_i + \vec{E}_r \\ &= E_i e^{i(\omega t - kx)} \cdot \vec{u}_y + E_r e^{i(\omega t + kx)} \cdot \vec{u}_y \\ &= E_i e^{i\omega t} \times (e^{-ikx} - e^{ikx}) \vec{u}_y \quad \text{car } E_r = -E_i \\ &= E_i e^{i\omega t} \times -2i \sin(kx) \cdot \vec{u}_y \\ &= -2E_i e^{i(\omega t + \pi/2)} \sin(kx) \cdot \vec{u}_y \quad \text{car } i = e^{i\pi/2} \end{aligned}$$

On en déduit donc, en prenant la partie réelle et en utilisant le fait que  $\cos(\omega t + \pi/2) = -\sin(\omega t)$ , que :

$$\boxed{\vec{E}(x < 0, t) = 2E_i \sin(\omega t) \sin(kx) \cdot \vec{u}_y}$$



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

4. On a  $\vec{k}_i = +k \cdot \vec{u}_x$  (onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants) et  $\vec{k}_r = -k \cdot \vec{u}_x$  (onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants).

Puisque chacune des ondes incidente et réfléchie sont des OPPM (mais leur somme ne l'est pas!), il vient que :  $\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{E_i}{c} e^{i(\omega t - kx)} \cdot \vec{u}_z$  et  $\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_r}{\omega} = \frac{E_i}{c} e^{i(\omega t + kx)} \cdot \vec{u}_z$ .

On en déduit que  $\vec{B}(x < 0, t) = \frac{E_i}{c} e^{i\omega t} (e^{-ikx} + e^{ikx}) \cdot \vec{u}_z = 2 \frac{E_i}{c} e^{i\omega t} \cos(kx) \cdot \vec{u}_z$ , et donc :

$$\vec{B}(x < 0, t) = 2 \frac{E_i}{c} \cos(\omega t) \cos(kx) \cdot \vec{u}_z$$

5. On a :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(x < 0, t) &= \frac{\vec{E}(x < 0, t) \wedge \vec{B}(x < 0, t)}{\mu_0} \\ &= 4 \frac{E_i^2}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx) \cos(\omega t) \cos(kx) \cdot \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z \\ &= \frac{E_i^2}{\mu_0 c} \times 2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \times 2 \cos(kx) \sin(kx) \cdot \vec{u}_x \\ &= \frac{E_i^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \sin(2kx) \cdot \vec{u}_x \end{aligned}$$

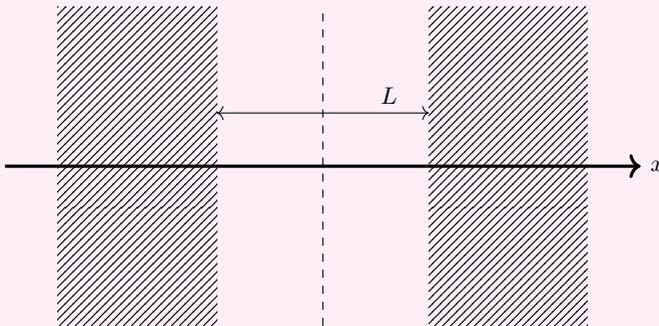
Or  $\langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$ , donc  $\langle \vec{\Pi}(x < 0, t) \rangle = \vec{0}$ . Ce résultat représente le fait que l'onde incidente et l'onde réfléchie transportent la même énergie mais dans deux sens différents.



## Détermination des modes propres d'une cavité

### Énoncé

Considérons deux conducteurs parfaits séparés d'une distance  $L$ . Le premier occupe le demi-espace  $x < -L/2$  ; le deuxième occupe le demi-espace  $x > L/2$ .



Une onde électromagnétique se propage normalement aux surfaces des deux métaux. On note  $E(x, t) = E_0 \sin(\omega t) \sin(kx + \psi)$  l'amplitude du champ électrique dans la cavité.

1. Que vaut le champ électrique en  $x = L/2$  ? En déduire la valeur de  $\psi$  et la nouvelle expression de  $E(x, t)$ .
2. Que vaut le champ électrique en  $x = -L/2$  ? En déduire que  $k$  est quantifié pour permettre la propagation et la réflexion de l'onde dans la cavité ; donner l'expression de  $k_m$ , nombre d'onde associé au mode propre  $m$ .

### Résolution

1. Au contact du métal, le champ électrique est nul. On en déduit que  $E_0 \sin(\omega t) \sin(k\frac{L}{2} + \psi) = 0$  pour tout  $t$ , et donc que  $k\frac{L}{2} + \psi = 0$ . Nécessairement,  $\psi = -k\frac{L}{2}$ .  
Il vient alors que  $E(x, t) = E_0 \sin(\omega t) \sin(k(x - \frac{L}{2}))$ .
2. Au contact du métal, le champ électrique est nul. On en déduit que  $E_0 \sin(\omega t) \sin(k(-\frac{L}{2} - \frac{L}{2})) = 0$  pour tout  $t$ , et donc que  $kL = m \times \pi$  avec  $m$  un entier.  
Nécessairement,  $k_m = m \times \frac{\pi}{L}$ .

## 7 Interférences lumineuses

■ À revoir

■ Maîtrisé

## 1 Interférences de deux ondes lumineuses

## Modèle scalaire de l'onde lumineuse

Une onde électromagnétique telle que la lumière est décrite à l'aide de son vecteur d'onde  $\vec{k}$ , de son champ électrique  $\vec{E}$  et de son champ magnétique  $\vec{B}$ .

Or, connaissant  $\vec{k}$  et  $\vec{E}$ , on peut facilement déterminer  $\vec{B}$  pour une OPPH. On décide alors de s'intéresser uniquement, pour simplifier les calculs, à l'amplitude du champ électrique  $\vec{E}$ , notée  $s(M, t)$  : c'est l'**amplitude scalaire** de l'onde lumineuse.

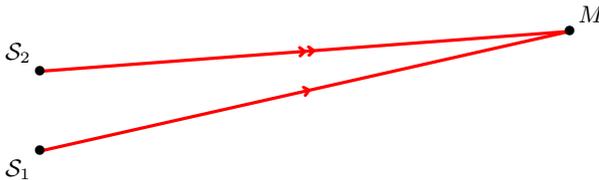
Si l'on note  $O$  la position de la source lumineuse, on a donc :

$$s(M, t) = S_0 \cos \left( \omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} \right)$$

## Intensité résultant de l'interférence de deux ondes lumineuses cohérentes

Supposons que deux ondes  $s_1$  et  $s_2$  partent de deux sources cohérentes (c'est-à-dire de même longueur d'onde et de même pulsation)  $S_1$  et  $S_2$ .

Ces deux ondes, de même amplitude  $S_0$ , vont de leurs origines respectives vers un point  $M$ .



L'**intensité lumineuse** correspond à la valeur moyenne temporelle du carré de l'amplitude scalaire d'une onde lumineuse :

$$I(M) = \langle s^2(M, t) \rangle$$

En notant  $I_0$  l'intensité lumineuse de chaque source, on trouve que l'intensité lumineuse en  $M$  vaut alors :

$$I(M) = 2I_0 \times \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) \right) \right]$$

où  $\delta(M) = S_1M - S_2M$  est la **différence de marche** entre les deux ondes au point  $M$ .

On appelle alors **différence de phase** la grandeur :  $\Phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)$ .

## Interférences constructives et interférences destructives

Deux ondes cohérentes interfèrent si on peut les retrouver en un même lieu et à un même instant.

- On dit que les interférences sont **constructives** en un point  $M$  si l'onde résultante y a une amplitude maximale : cela correspond au cas où les deux ondes sont en phase, et  $\Phi(M) = 2m \times \pi$  avec  $m$  un entier. On a alors  $\delta(M) = m \times \lambda$  : la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde.
- On dit que les interférences sont **destructives** en un point  $M$  si l'onde résultante y a une amplitude minimale : cela correspond au cas où les ondes sont en opposition de phase, et  $\Phi(M) = (2m + 1)\pi$  avec  $m$  un entier. On a alors  $\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda$  : la différence de marche est un multiple demi-entier de la longueur d'onde.

L'**ordre d'interférence** est défini par le rapport :

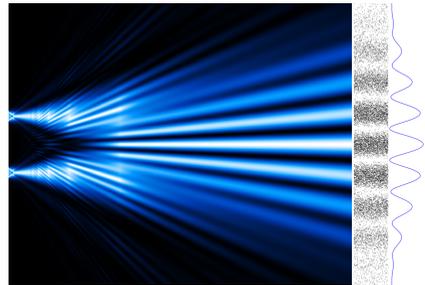
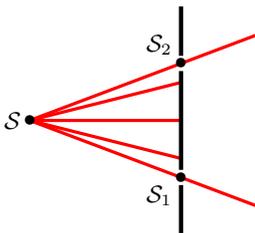
$$p = \frac{\delta}{\lambda}$$

Il s'agit d'un nombre sans dimension. En particulier :

- Il y a interférences constructives si  $p$  est un entier  $m$  ;
- Il y a interférences destructives si  $p$  est un demi-entier  $m + \frac{1}{2}$ .

## 2 Expérience des fentes de Young

En 1801, Thomas Young a mis en œuvre une expérience faisant interférer de la lumière avec elle-même. Il a alors aperçu que la somme de deux ondes lumineuses ne donnait pas une onde « deux fois plus lumineuse », mais une succession de franges brillantes et sombres.



Expérimentalement, on peut observer des interférences lumineuses en plaçant un laser derrière deux fentes très fines et rapprochées. Ainsi, les sources  $S_1$  et  $S_2$  sont « créées » par la source  $S$  réelle du laser.

On peut alors montrer mathématiquement que l'intensité lumineuse consiste effectivement en une succession de taches lumineuses espacées successivement d'une distance  $i = \frac{\lambda D}{a}$ , appelée **interfrange**, où  $D$  représente la distance entre  $S_1$  et  $S_2$  et l'écran d'observation ;  $a$  l'écart entre  $S_1$  et  $S_2$  ;  $\lambda$  la longueur d'onde du laser.



## Intensité résultant de l'interférence de deux ondes lumineuses cohérentes

### Énoncé

Soient deux ondes  $s_1$  et  $s_2$  partent de deux sources cohérentes (émettant dans toutes les directions de façon identique)  $S_1$  et  $S_2$ .

Ces deux ondes, de même amplitude  $S_0$ , vont de leurs origines respectives vers un point  $M$ .

On a donc  $s_1(M, t) = S_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M\right)$  et  $s_2(M, t) = S_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_2 M\right)$ .

Montrer que l'intensité lumineuse au point  $M$  est :

$$I(M) = 2I_0 \times \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(S_2 M - S_1 M)\right) \right]$$

avec  $I_0$  l'intensité lumineuse de chacune des deux sources.

On utilisera notamment la relation :  $\cos(a) \times \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$ .

### Résolution

L'amplitude scalaire totale au point  $M$  est  $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$   
 $= S_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M\right) + S_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_2 M\right)$ .

Or on sait que l'intensité lumineuse au point  $M$  est définie par :  $I(M) = \langle s^2(M, t) \rangle$ .  
 Calculons le carré de  $s(M, t)$  :

$$\begin{aligned} s^2(M, t) &= S_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M\right) + S_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_2 M\right) \\ &\quad + 2S_0^2 \times \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M\right) \times \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_2 M\right) \\ &= S_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M\right) + S_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_2 M\right) \\ &\quad + 2S_0^2 \times \frac{\cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(S_1 M + S_2 M)\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(S_2 M - S_1 M)\right)}{2} \end{aligned}$$



## Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

En utilisant le fait que  $\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2}$  et que  $\langle \cos(2\omega t + \psi) \rangle = 0$ , on a donc :

$$\begin{aligned}
 I(M) &= \overbrace{S_0^2}^{I_0} \times \frac{1}{2} + \overbrace{S_0^2}^{I_0} \times \frac{1}{2} \\
 &+ \overbrace{S_0^2}^{2I_0} \times \left[ \left\langle \cos \left( 2\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (\mathcal{S}_1 M + \mathcal{S}_2 M) \right) \right\rangle + \left\langle \overbrace{\cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (\mathcal{S}_2 M - \mathcal{S}_1 M) \right)}^{\text{indépendant du temps}} \right\rangle \right] \\
 &= 2I_0 + 2I_0 \times \left[ 0 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (\mathcal{S}_2 M - \mathcal{S}_1 M) \right) \right] \\
 &= 2I_0 \times \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} (\mathcal{S}_2 M - \mathcal{S}_1 M) \right) \right]
 \end{aligned}$$

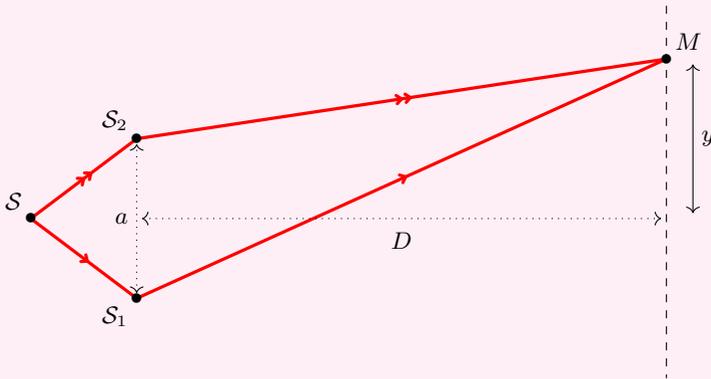
Ce qui est le résultat attendu.



## Détermination de l'interfrange dans l'expérience des trous de Young

### Énoncé

La distance entre les deux sources est  $S_1S_2 = a$ , et on note  $D$  la distance entre le plan des sources et celui contenant le point  $M$ , d'ordonnée  $y$ . Les sources sont très rapprochées :  $a \ll D$ . Le point  $M$  auquel on observe les interférences lumineuses est situé « assez loin » des sources :  $y \ll D$ .



1. Justifier que la différence de marche entre les deux ondes issues du point  $S$  et parvenant en  $M$  peut s'écrire :  $\delta(M) = S_1M - S_2M$ .
2. Lorsque  $u \ll 1$ , on a  $(1+u)^\alpha \approx 1 + \alpha \times u$ . Donner les expressions de  $S_1M$  et de  $S_2M$  en utilisant cette approximation ; en déduire l'expression simplifiée de la différence de marche  $\delta(M)$ .
3. Montrer alors que la figure d'interférences est constituée de franges rectilignes sombres et brillantes. Quelle est la distance  $i$  entre deux franges brillantes successives ?



## Résolution

1. On a  $\delta(M) = (SS_1M) - (SS_2M) = SS_1 + S_1M - SS_2 - S_2M$ . Or  $SS_1 = SS_2$ , donc  $\delta(M) = S_1M - S_2M$ .
2. Exprimons la distance  $S_1M$  dans l'approximation de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
 S_1M &= \sqrt{D^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2} \quad \text{par le théorème de Pythagore} \\
 &= D \times \sqrt{1 + \left(\frac{y + \frac{a}{2}}{D}\right)^2} \\
 &\approx D \times \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{y + \frac{a}{2}}{D}\right)^2\right) \quad \text{car } y + \frac{a}{2} \ll D \\
 &= D + \frac{1}{2D} \times \left(y^2 + \frac{a^2}{4} + ay\right)
 \end{aligned}$$

De même, on peut démontrer que  $S_2M = D + \frac{1}{2D} \times \left(y^2 + \frac{a^2}{4} - ay\right)$ .

On en déduit que l'expression de la différence de marche est :

$$\delta(M) = \frac{ay}{D}$$

3. On a des interférences constructives (et donc un lieu brillant) en  $M$  si  $\delta(M) = m \times \lambda$ , avec  $m \in \mathbb{Z}$ . On en déduit alors qu'il y a des interférences constructives si  $y = m \times \frac{\lambda D}{a}$  ; à lire : si  $y$  est un multiple entier de  $\frac{\lambda D}{a}$ .

Les interférences constructives ont donc lieu à  $y$  constant, ce qui constitue une frange brillante rectiligne. L'argument est généralisable aux interférences destructives, qui sont localisés sur des franges sombres rectilignes.

La distance  $i$  entre deux franges brillantes successives est alors la différence entre deux ordonnées successives brillantes :  $i = (m + 1) \times \frac{\lambda D}{a} - m \times \frac{\lambda D}{a}$ . Il vient donc que :

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$