1 Conduction thermique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Flux thermique

Définitions

Le **flux thermique** Φ_Q (en W) allant d'un système « chaud » à un système « froid » correspond au coefficient de proportionnalité entre la quantité infinitésimale de chaleur échangée δQ et la durée de contact $\mathrm{d}t$:

$$\boxed{\delta Q = \Phi_Q \; \mathrm{d}t}$$

On peut associer à ce flux thermique un **vecteur densité de courant thermique** $\overrightarrow{j_Q}$ (en $\mathrm{W/m^2}$) :

$$\boxed{\Phi_Q = \iint_S \overrightarrow{j_Q} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}}$$

Loi de Fourier

La chaleur s'écoule toujours des hautes températures vers les basses températures ; ainsi, $\overrightarrow{j_Q}$ est opposé à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$. On définit alors la **conductivité thermique** λ comme étant le coefficient de proportionnalité, au signe près, entre ces deux grandeurs :

$$\boxed{\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T}$$

Cette relation est appelée **loi de Fourier**.

☛ Quelques valeurs de λ :

matériau	λ $(\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}})$
cuivre	400
marbre	$2-3$
eau	$0{,}6$
laine de verre	$0{,}04$
air	$0{,}026$

2 Équation de la chaleur

Considérons un barreau cylindrique de section droite S et de longueur L. On considère que ce barreau a une masse volumique μ, une conductivité thermique λ et une capacité thermique massique c.

Ce barreau, dont l'axe de révolution sera noté (O, x), possède une température T_A en $x = 0$ et une température $T_B < T_A$ en $x = L$.

On s'intéresse à la diffusion de la chaleur entre deux abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Le problème admet une symétrie de révolution autour de l'axe (O, x).

Un bilan d'enthalpie sur ce tronçon d'épaisseur $\mathrm{d}x$ donne alors l'**équation de la chaleur** :

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

On peut réécrire l'équation de la chaleur sous la forme : $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, où D est la **diffusivité thermique**.

D s'exprime en m^2/s. Si l'on note τ la durée, en ordre de grandeur, pour que la variation de température atteigne significativement le barreau à la distance a, On aura alors, par homogénéité, $\boxed{D \sim \dfrac{a^2}{\tau}}$.

En régime stationnaire

En régime stationnaire, l'équation de la chaleur devient $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$. On a donc un profil affine pour la température au sein d'un même matériau en régime stationnaire.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Établissement de l'équation de la chaleur

Énoncé

Soit un barreau cylindrique de section droite S et de longueur L. On considère que ce barreau a une masse volumique μ, une conductivité thermique λ et une capacité thermique massique c.

Ce barreau, dont l'axe de révolution sera noté (O, x), possède une température T_A en $x = 0$ et une température $T_B < T_A$ en $x = L$.

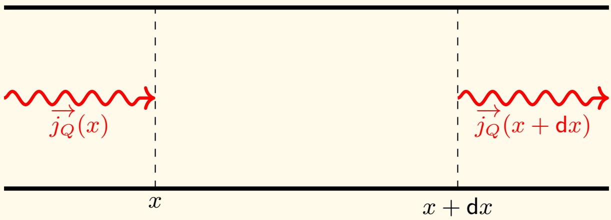
On s'intéresse à la diffusion de la chaleur entre deux abscisses x et $x + dx$. Le problème admet une symétrie de révolution autour de l'axe (O, x).

Établir l'équation de la chaleur.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Résolution



On cherche à appliquer le premier principe enthalpique au tronçon de masse $\delta m = \mu \times \delta V = \mu S \mathrm{d}x$: $\mathrm{d}H = \delta Q$.

- On a $H = mcT$, donc $\mathrm{d}H = \delta m \times c \times (T(t+\mathrm{d}t) - T(t))$. Or $\delta m = \mu S \mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}H = \mu S \mathrm{d}x \times c \times (T(t+\mathrm{d}t) - T(t))$.

  Il vient donc que $\mathrm{d}H = \mu S \mathrm{d}x \times c \times \dfrac{T(t+\mathrm{d}t) - T(t)}{\mathrm{d}t} \times \mathrm{d}t = \mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} \times S \mathrm{d}x \mathrm{d}t$.

- Puisque la chaleur s'écoule de la gauche vers la droite, l'énergie reçue en x est $\delta Q_e = \Phi_Q(x,t) \times \mathrm{d}t$ et celle cédée en $x + \mathrm{d}x$ est $\delta Q_s = -\Phi_Q(x+\mathrm{d}x) \times \mathrm{d}t$.

  On en déduit que la chaleur totale accumulée est :

$$\begin{aligned}
\delta Q &= \delta Q_e + \delta Q_s \\
&= (\Phi_Q(x,t) - \Phi_Q(x+\mathrm{d}x)) \times \mathrm{d}t \\
&= (j_Q(x,t)S - j_Q(x+\mathrm{d}x)S)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left(j_Q(x+\mathrm{d}x) - j_Q(x)\right) S\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}\mathrm{d}x S \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

  Or on sait que $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda \, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x} . \overrightarrow{e_x}$ ici (le transfert de chaleur se fait uniquement de la gauche vers la droite). Il vient donc que $j_Q = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$, et alors $\dfrac{\partial j_Q}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

  Nécessairement, $j_Q(x+\mathrm{d}x) - j_Q(x) = -\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\mathrm{d}x$.

  On en déduit alors que $\delta Q = -\left(-\lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\mathrm{d}x\right) S\mathrm{d}t = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} S \mathrm{d}x \mathrm{d}t$.

- Le premier principe enthalpique donne alors que $\mu c \dfrac{\partial T}{\partial t} \times \cancel{S \mathrm{d}x \mathrm{d}t} = \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cancel{S \mathrm{d}x \mathrm{d}t}$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Utilisation de la diffusivité thermique

Énoncé

La cuisson d'un œuf de poule à la coque dure trois minutes. Un oeuf moyen a une masse de $50\,\mathrm{g}$ *à* $60\,\mathrm{g}$.

Le but est de déterminer quelle serait la durée pour faire cuire à la coque un œuf d'autruche, sachant que la masse de celui-ci est comprise entre $1{,}2\,\mathrm{kg}$ *et* $1{,}8\,\mathrm{kg}$.

1. *Justifier que* $D_{\text{poule}} \approx D_{\text{autruche}}$ *où* D *est la diffusivité thermique.*
2. *Évaluer l'ordre de grandeur de* $\dfrac{V_{\text{autruche}}}{V_{\text{poule}}}$ *où* V *représente le volume de chaque œuf.*
3. *Répondre alors à la problématique.*

Résolution

1. On a, par définition, $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$. On peut supposer que les deux œufs sont constitués de matériaux assez similaires, ce qui implique que les valeurs de λ, c et μ sont également similaires. Nécessairement, $D_{\text{poule}} \approx D_{\text{autruche}}$.
2. $\dfrac{V_{\text{autruche}}}{V_{\text{poule}}} = \dfrac{m_{\text{autruche}}/\mu}{m_{\text{poule}}/\mu} \sim \dfrac{1{,}5\,\mathrm{kg}}{50\times 10^{-3}\,\mathrm{kg}} = 30.$
3. On sait que $D \sim \dfrac{a^2}{\tau}$ avec τ une durée pour que la chaleur atteigne significativement la distance a.

   D'après la première question, on en déduit que $\dfrac{a^2_{\text{autruche}}}{\tau_{\text{autruche}}} \sim \dfrac{a^2_{\text{poule}}}{\tau_{\text{poule}}}$. Nécessairement, $\tau_{\text{autruche}} \sim \tau_{\text{poule}} \times \left(\dfrac{a_{\text{autruche}}}{a_{\text{poule}}}\right)^2$.

   Ici, en supposant les œufs sphériques (c'est une assez bonne approximation), on a $a \sim V^{1/3}$, donc $\left(\dfrac{a_{\text{autruche}}}{a_{\text{poule}}}\right)^2 \sim \left(\dfrac{V_{\text{autruche}}}{V_{\text{poule}}}\right)^{2/3} \approx 10.$

   Il vient donc que la durée nécessaire pour cuire un œuf d'autruche à la coque est : $\tau_{\text{autruche}} \sim 30\,\mathrm{min}$.

2 Conducto-convection thermique

■ À revoir ■ Maîtrisé

Soit un corps de température T plongé dans un fluide à la température T_a. On note la surface de contact S.

Le flux thermique reçu par le corps de la part du fluide s'écrit :

$$\boxed{\Phi_Q = -h \times S \times (T - T_a)}$$

Le coefficient de proportionnalité h est le **coefficient de transfert thermique**, s'exprimant en $\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Il quantifie la propension qu'a la chaleur à s'évacuer par conducto-convection.

♥ Le coefficient de transfert thermique dépend notamment de la vitesse du fkuide à la surface du corps chaud.

♥ Le signe négatif du flux thermique représente le fait que, si le corps est plus chaud que son environnement ($T > T_a$), le corps perd de la chaleur en le cédant vers l'extérieur ($\Phi_Q < 0$).

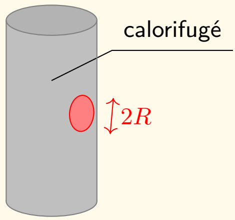
Exercice résolu

- À revoir
- Maîtrisé

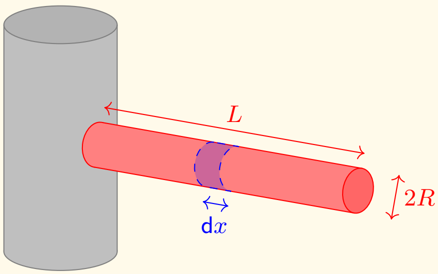
Intérêt des ailettes de refroidissement

Énoncé

Soit un corps chaud de température constante T_0, plongé dans un fluide à la température T_a. Il possède une surface de contact πR^2 (disque de rayon R) avec l'extérieur.



On soude à cette surface de contact une ailette cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$. On s'intéresse à une tranche de longueur dx de ladite ailette ; on notera ce système d'étude Σ. L'axe (O, x) sera l'axe de révolution de l'ailette, avec $x = 0$ correspondant à la jonction entre cette dernière et le corps ; $T(x)$ représente la température de l'ailette à l'abscisse x. On se place en régime stationnaire.



1. Quel serait le flux thermique Φ_0 transmis du corps chaud vers l'extérieur en l'absence de l'ailette ?
2. Donner les expressions de δQ_e, quantité de chaleur arrivant par la droite par conduction, δQ_s, quantité de chaleur sortant par la gauche par conduction, et δQ_c, quantité de chaleur s'échappant latéralement par conducto-convection.
3. Effectuer un bilan d'enthalpie à Σ. En déduire une équation différentielle portant sur $T(x)$; on notera ℓ une longueur caractéristique.
4. Résoudre alors l'équation portant sur $T(x)$ en fonction des paramètres du problème.
5. Comparer $\Phi_1 \triangleq \Phi_Q(x = 0)$, flux émis par le corps chaud à l'ailette, à Φ_0 ; on donne $h = 5\,\text{SI}$, $\lambda = 100\,\text{SI}$ et $R = 2\,\text{cm}$. Conclure sur l'intérêt de l'ailette.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Résolution

1. On a $\Phi_0 = h \times \pi R^2 \times (T_0 - T_a)$.
2.
   - $\delta Q_e = j_Q(x) \times \pi R^2 \mathrm{d}t = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x) \times \pi R^2 \mathrm{d}t$;
   - $\delta Q_s = -j_Q(x+\mathrm{d}x) \times \pi R^2 \mathrm{d}t = \lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x+\mathrm{d}x) \times \pi R^2 \mathrm{d}t$;
   - $\delta Q_c = -h \times \underbrace{2\pi R}_{\text{surface latérale}} \mathrm{d}x \times (T(x) - T_a)\mathrm{d}t$.
3. On a $H(t+\mathrm{d}t) - H(t) = \delta Q_e + \delta Q_s + \delta Q_c$ avec $H(t+\mathrm{d}t) = H(t)$ car on est en régime stationnaire.
   Il vient que :
   $$0 = \underbrace{-\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x) \times \cancel{\pi} R^{\cancel{2}} \cancel{\mathrm{d}t}}_{\delta Q_e} \underbrace{+\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x+\mathrm{d}x) \times \cancel{\pi} R^{\cancel{2}} \cancel{\mathrm{d}t}}_{\delta Q_s} \underbrace{-h \times 2\cancel{\pi R}\mathrm{d}x \times (T(x) - T_a)}_{\delta Q_c}\cancel{\mathrm{d}t}$$
   On peut réécrire cette équation sous la forme :
   $$0 = \lambda \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x+\mathrm{d}x) - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x) \right) R - 2h(T(x) - T_a)\mathrm{d}x$$
   En divisant par $\mathrm{d}x$ et en gardant les termes en T du même côté, on a donc $\lambda R \dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + 2hT = 2hT_a$, c'est-à-dire :
   $$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{\ell^2} T = \frac{1}{\ell^2} T_a$$
   avec $\ell = \sqrt{\dfrac{\lambda R}{2h}} = 44{,}7\,\mathrm{cm}$.
4. Il vient que $T(x) = T_a + Ae^{x/\ell} + Be^{-x/\ell}$.
   La température ambiante est plus froide que la température du corps chaud : il est impossible que la température croisse avec la distance. On a donc $A = 0$.
   De plus, on sait que $T(x=0) = T_0$, donc $T_a + A = T_0$. On en déduit que $A = T_0 - T_a$, et donc que $T(x) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-x/\ell}$.
5. $\Phi_Q(x=0) = j_Q(x=0) \times \pi R^2$ avec $j_Q(x=0) = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x=0)$.
   Or $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = (T_0 - T_a) \times \dfrac{-1}{\ell} \times e^{-x/\ell}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(x=0) = -\dfrac{T_0 - T_a}{\ell}$ et alors $\Phi_1 = \lambda \dfrac{T_0 - T_a}{\ell} \times \pi R^2$.
   On en déduit que $\dfrac{\Phi_1}{\Phi_0} = \dfrac{\lambda \dfrac{T_0 - T_a}{\ell} \times \pi R^2}{h \times \pi R^2 \times (T_0 - T_a)} = \dfrac{\lambda}{\ell h} \approx 44{,}7$. On a donc $\Phi_1 \approx 44{,}7 \times \Phi_0$: l'ailette aide à dissiper environ 45 fois plus de chaleur que normalement.

3 Résistance thermique

■ À revoir ■ Maîtrisé

Soit un conducteur thermique de conductivité thermique λ, de longueur L et de section S, soumis à une différence de température ΔT. Il en résulte un flux thermique Φ_Q proportionnel à ΔT :

$$\boxed{\Delta T = R_{\text{th}} \times \Phi_Q}$$

Le coefficient de proportionnalité $\boxed{R_{\text{th}} \triangleq \dfrac{L}{\lambda S}}$ est la **résistance thermique** du matériau.

♥ Pour deux matériaux en série (la chaleur se propageant par l'un, puis par l'autre) de résistances thermiques $R_{\text{th},1}$ et $R_{\text{th},2}$, on a une résistance thermique équivalente telle que $R_{\text{th, éq}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}$.

♥ Pour deux matériaux en parallèle (la chaleur se propageant par les deux en même temps) de résistances thermiques $R_{\text{th},1}$ et $R_{\text{th},2}$, on a une résistance thermique équivalente telle que $\dfrac{1}{R_{\text{th, éq}}} = \dfrac{1}{R_{\text{th},1}} + \dfrac{1}{R_{\text{th},2}}$.