

# SCIENCES PHYSIQUES

ATS – LYCÉE LOUIS ARMAND

---

## Thème 7 : Phénomènes magnétiques

### Cours

---

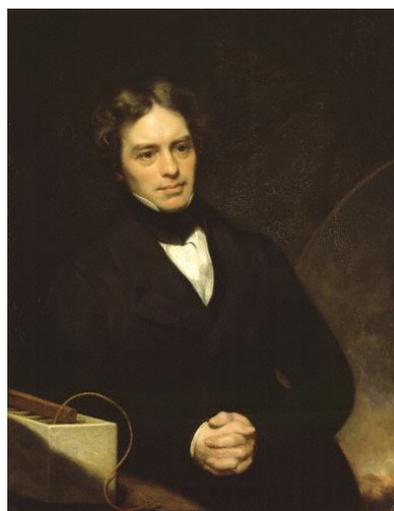


FIGURE 1 – André-Marie Ampère (1775 – 1836), mathématicien, physicien, chimiste et philosophe français et Michael Faraday (1791 – 1867), physicien et chimiste britannique, sont deux scientifiques ayant étudié les phénomènes électromagnétiques. Leurs travaux, datant essentiellement de la première moitié du dix-neuvième siècle, ont permis de comprendre et quantifier le fonctionnement du champ magnétostatique et d'expliquer les phénomènes d'induction et d'électromécanique.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Aspect macroscopique du champ magnétostatique</b>                    | <b>1</b>  |
| 1.1 Définition du champ magnétostatique                                   | 1         |
| 1.2 Topographie du champ magnétostatique                                  | 3         |
| 1.2.1 Lignes de champ   | 3         |
| 1.2.2 Symétries et antisymétries  | 6         |
| 1.3 Flux magnétostatique  | 7         |
| 1.3.1 Conservation du flux magnétostatique                                | 7         |
| 1.3.2 Écriture locale de la conservation du flux magnétostatique          | 8         |
| <b>2 Théorème d'Ampère</b>  | <b>10</b> |
| 2.1 Théorème d'Ampère   | 10        |
| 2.1.1 Énoncé  | 10        |
| 2.1.2 Utilité et étapes   | 10        |
| 2.2 Applications du théorème d'Ampère                                     | 11        |
| 2.2.1 Champ créé par un fil infini  | 11        |
| 2.2.2 Champ créé par un câble coaxial                                     | 12        |
| 2.2.3 Champ créé par un tore  | 14        |
| 2.2.4 Champ créé par un solénoïde infini                                  | 16        |
| 2.2.5 Nappe infinie « épaisse » de courants                               | 18        |
| 2.3 Relations de passage pour le champ magnétostatique                    | 20        |
| 2.4 Écriture locale du théorème d'Ampère                                  | 21        |
| 2.4.1 Du théorème d'Ampère à l'équation de Maxwell-Ampère de la statique  | 21        |
| 2.4.2 De l'équation de Maxwell-Ampère de la statique au théorème d'Ampère | 21        |
| <b>3 Bobines et inductance propre</b>                                     | <b>23</b> |
| 3.1 Phénomène d'induction   | 23        |
| 3.1.1 Observations expérimentales   | 23        |
| 3.1.2 Loi de Faraday, loi de Lenz   | 24        |
| 3.1.3 Lien avec l'équation de Maxwell-Faraday                             | 26        |
| 3.2 Auto-induction  | 27        |
| 3.2.1 Flux propre et inductance propre                                    | 27        |
| 3.2.2 Étude énergétique globale d'une bobine                              | 28        |
| 3.2.3 Densité volumique d'énergie magnétique                              | 30        |
| <b>4 Induction mutuelle</b>   | <b>31</b> |
| 4.1 Circuits couplés par induction  | 31        |
| 4.1.1 Coefficient d'inductance mutuelle                                   | 31        |
| 4.1.2 Équations électriques   | 32        |
| 4.1.3 Étude énergétique   | 34        |
| 4.2 Applications  | 35        |
| 4.2.1 Détection ampèremétrique  | 35        |
| 4.2.2 Chauffage inductif  | 37        |
| 4.2.3 Fonctionnement d'un alternateur                                     | 37        |
| <b>5 Électromécanique</b>   | <b>39</b> |
| 5.1 Rail de Laplace   | 39        |
| 5.1.1 Position du problème  | 39        |
| 5.1.2 Équations électrique et mécanique                                   | 40        |
| 5.1.3 Conversion électromécanique de puissance                            | 42        |
| 5.2 Haut-parleur électrodynamique   | 43        |
| 5.2.1 Position du problème  | 43        |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 5.2.2 | Étude énergétique . . . . .                | 44 |
| 5.2.3 | Étude en régime sinusoïdal forcé . . . . . | 45 |

# Chapitre 1 : Aspect macroscopique du champ magnétostatique

## Objectifs :

- Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme.
- Citer des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans une machine électrique, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre.
- Définir la notion de ligne de champ magnétostatique.
- Énoncer la relation donnant la force de Laplace s'exerçant sur un élément de circuit filiforme parcouru par un courant et placé dans un champ magnétostatique.
- Identifier les propriétés de symétrie d'une distribution de courant.
- Tracer l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, un fil rectiligne, une spire circulaire, une bobine longue et un tore.
- Énoncer l'équation de Maxwell relative au flux du champ magnétique.

 **Au concours ATS** : N'apparaît pas en tant que tel au concours, mais est utile pour les chapitres suivants.

## 1.1 Définition du champ magnétostatique

Tout comme deux charges interagissaient mécaniquement entre elles par l'action d'un champ électrostatique, deux fils conducteurs parcourus par des courants peuvent interagir mécaniquement entre eux par l'action d'un champ magnétostatique.

### Champ magnétostatique et force de Laplace

Soient deux conducteurs filiformes (1) et (2), respectivement parcourus par des courants constants  $I_1$  et  $I_2$ . Le conducteur (1) crée un **champ magnétostatique** total  $\vec{B}_1$ , qui crée une force élémentaire  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}^m$  sur chaque portion infinitésimale  $d\vec{\ell}_2$  (orienté dans le sens de  $I_2$ ) du conducteur (2) :

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2}^m = I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_1$$

La résultante macroscopique de ces forces est la **force de Laplace**  $\vec{F}_L^{1 \rightarrow 2}$  du conducteur (1) sur le conducteur (2) :

$$\vec{F}_L^{1 \rightarrow 2} = \int_{M \in (2)} I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_1(M)$$

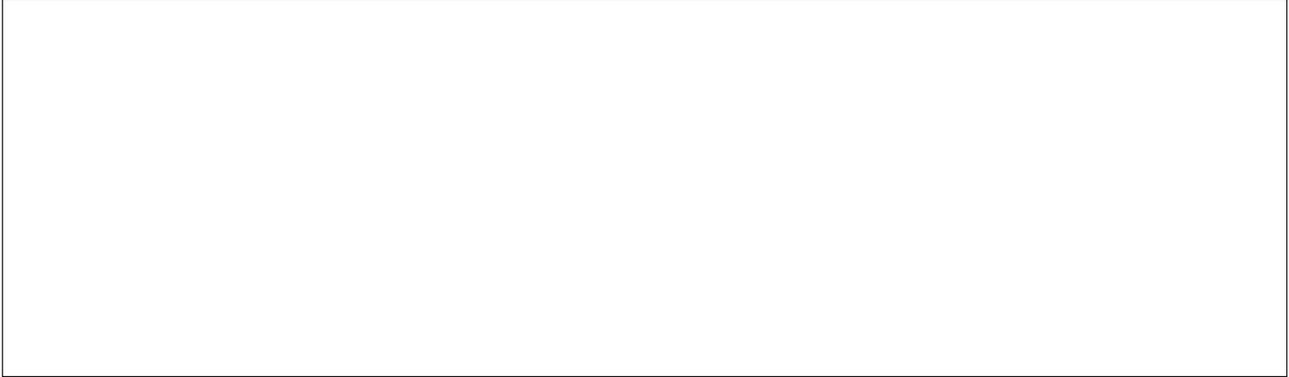
L'unité du champ magnétostatique est le tesla T.

 **Remarque** : Les façons de calculer  $\vec{B}$  seront explicitées aux chapitres suivants, à l'aide du théorème d'Ampère et de l'équation de Maxwell-Ampère.

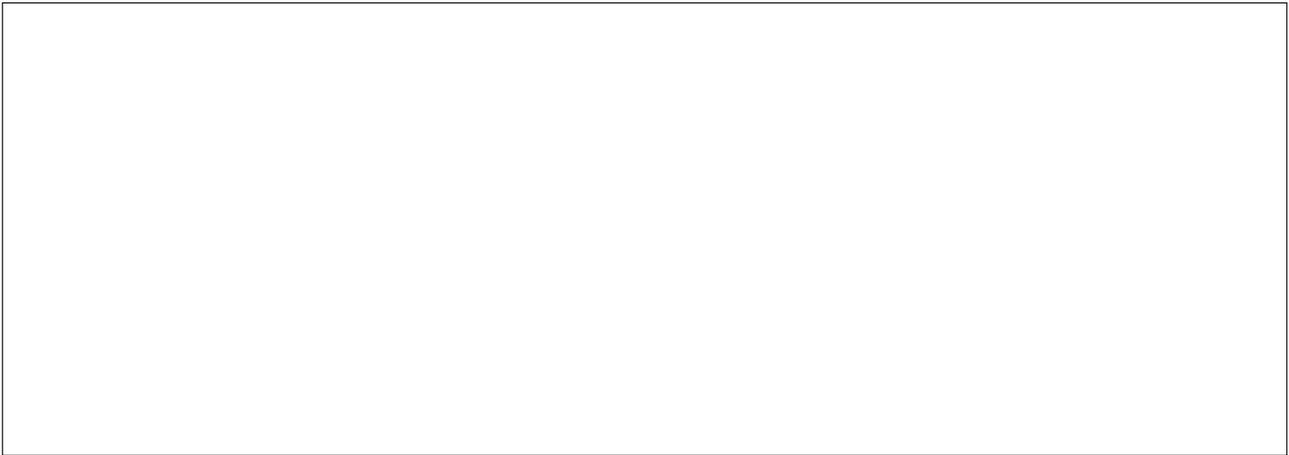
 **Remarque** : Quelques ordres de grandeurs : au contact d'un aimant permanent :  $B_{\text{aimant}} \sim 0,1 \text{ T}$  à  $1 \text{ T}$  ; dans un électro-aimant à bobinage :  $B_{\text{EA}} \sim 10 \text{ T}$  à  $100 \text{ T}$  ; dans un appareil d'IRM :  $B_{\text{IRM}} \sim 1 \text{ T}$  ; sur Terre :  $B_{\text{Terre}} \approx 5 \times 10^{-5} \text{ T}$ .

On considère que le conducteur (1) est rectiligne et infini, et on se place en coordonnées cylindriques centrées autour de ce conducteur. Le conducteur (2), de longueur  $L$ , est également rectiligne et parallèle au conducteur (1), à la distance  $d$  de celui-ci. Les conducteurs (1) et (2) sont respectivement parcourus par des courants  $I_1$  et  $I_2$ , que l'on estime constants et « dans le même sens »  $\vec{e}_z$ .

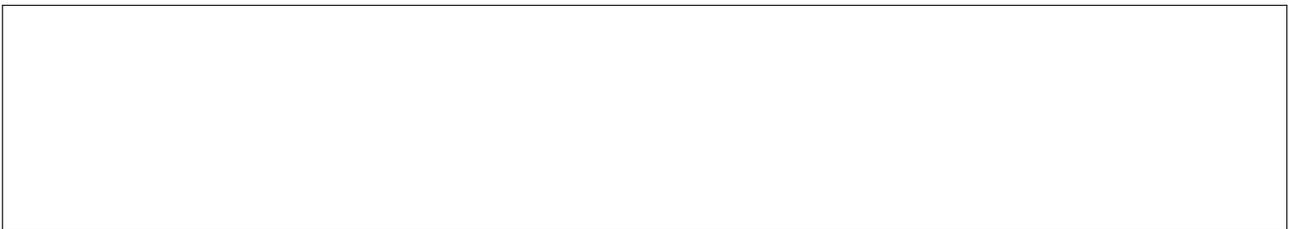
**Question 1 :** Faire un schéma du problème, en faisant apparaître notamment la base cylindrique.



**Question 2 :** On admet de plus que  $\vec{B}_1 = \frac{kI_1}{d} \vec{e}_\theta$  en tout point du conducteur (2). Que vaut la force de Laplace  $\vec{F}_L$  du conducteur (1) sur le conducteur (2) ?



**Question 3 :** À quelle condition cette force est-elle attractive ? Répulsive ?



### Et les aimants permanents ?

On connaît déjà des dispositifs permettant de créer des champs magnétiques : ce sont les aimants ! Pourtant, ceux-ci n'ont a priori pas besoin de courant électrique pour fonctionner...

En réalité, tous les électrons possèdent un *spin*, grandeur quantique que l'on peut assimiler dans l'idée à la rotation de l'électron sur lui-même. Ces mouvements internes d'électrons peuvent alors créer un champ magnétique dans un sens (*up*) ou dans l'autre (*down*).

Certaines espèces chimiques (notamment le fer Fe, le nickel Ni et le cobalt Co), possédant des électrons non appariés, peuvent créer un micro-champ magnétique en alignant leurs spins (tous dans le sens *up*, par exemple). D'un point de vue macroscopique, la somme de ces micro-champs donne un champ magnétostatique important et mesurable.

## 1.2 Topographie du champ magnétostatique

Pour avoir accès aux lignes de champ magnétostatique, on utilise en pratique de la poudre de fer, dont les propriétés magnétiques lui permettent de s'aligner selon des « courbes » de champ magnétostatique.

### 1.2.1 Lignes de champ

#### Pour un aimant droit

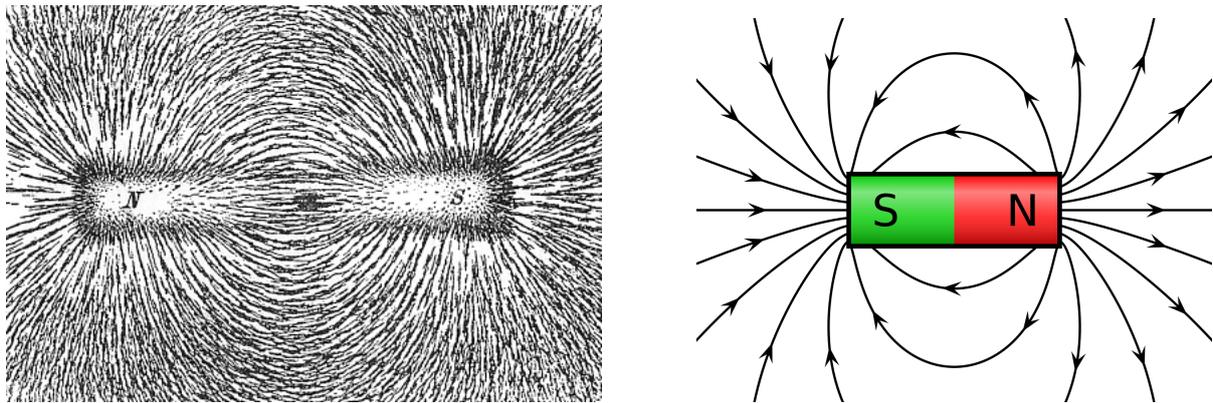


FIGURE 1.1 – Lignes de champ magnétostatique pour un aimant droit. Gauche : obtention expérimentale par de la limaille de fer (By Newton Henry Black - Newton Henry Black, Harvey N. Davis (1913) Practical Physics, The MacMillan Co., USA, p. 242, fig. 200, Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=73846>) ; droite : modélisation (By Geek3 - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10587119>).

On peut observer que, contrairement aux lignes de champ électrostatique, les lignes de champ magnétostatique ont tendance à former des boucles. Nous chercherons à exploiter cette propriété un peu plus tard.

Par ailleurs, le pôle nord d'un aimant est, par définition, celui dont fuient les lignes de champ magnétostatique. Le pôle sud d'un aimant est donc celui par lesquelles les lignes de champ magnétostatique sont attirées.

**Question 4** : Représenter un petit aimant (une boussole) sur la modélisation de la figure 1.1, en dehors de l'aimant droit. Placer alors les pôles nord et sud de cette boussole. Pourquoi peut-on dire que le « nord magnétique » et le « sud magnétique » ne sont que relatifs ?

## Pour un fil rectiligne et une spire circulaire

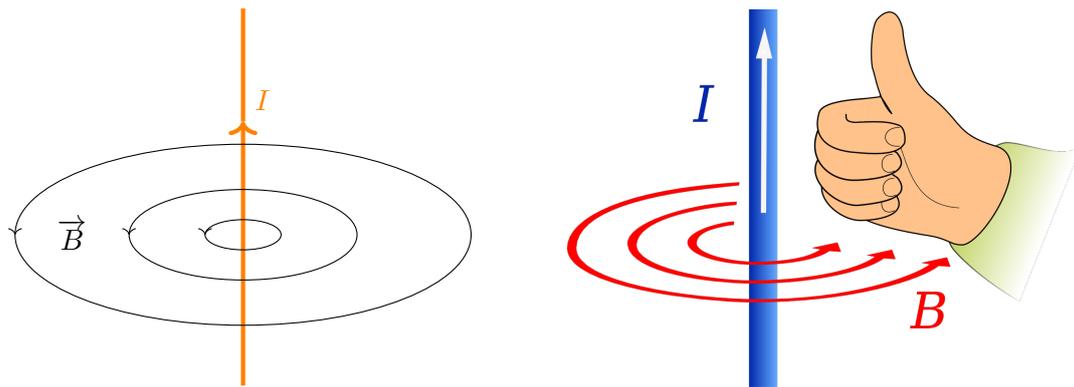


FIGURE 1.2 – Gauche : lignes de champ magnétostatique pour un fil rectiligne infini. Droite : règle du tire-bouchon (avec la main droite uniquement!) pour retenir l'orientation du champ magnétostatique selon le sens du courant (By Jfmelero - Own work, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3634402>).

À nouveau, on peut noter la propriété de « bouclage » du champ magnétostatique autour de sa source.

Pour déterminer l'allure des lignes de champ magnétostatique pour une spire circulaire (c'est-à-dire un fil que l'on a relié de bout en bout), on peut voir cette spire comme un assemblage infini de fils rectilignes élémentaires. Localement, chaque méso-fil rectiligne fait tourner le champ magnétostatique autour de lui de la même manière qu'un fil rectiligne infini.

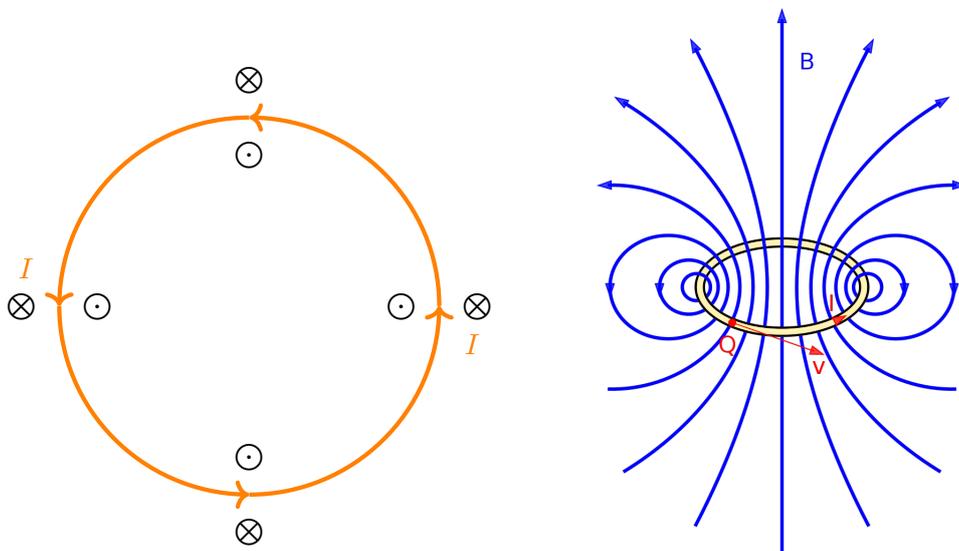


FIGURE 1.3 – Lignes de champ magnétostatique pour une spire circulaire. Gauche : vue de dessus ; droite : perspective cavalière (Par 30px MovGP0, CC BY-SA 2.0 DE <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/deed.en>, via Wikimedia Commons).

### Pour une bobine longue et un tore

On appelle bobine longue (ou solénoïde) un enchaînement de spires sur un axe rectiligne, telle que la longueur  $L$  de la bobine soit grande devant son rayon  $R$ . En pratique, on enroule un fil conducteur le long d'un cylindre jusqu'à la longueur désirée ; si le fil est suffisamment fin, on peut alors considérer que la bobine est bien composée de spires perpendiculaires à l'axe de révolution de celle-ci.

Dans cette approximation, on conserve les propriétés des spires circulaires sur la quasi-totalité de la longueur du solénoïde : le champ magnétostatique rentre dans celui-ci selon la règle du tire-bouchon, puis en ressort pour reboucler de l'autre côté (voir figure 1.4).

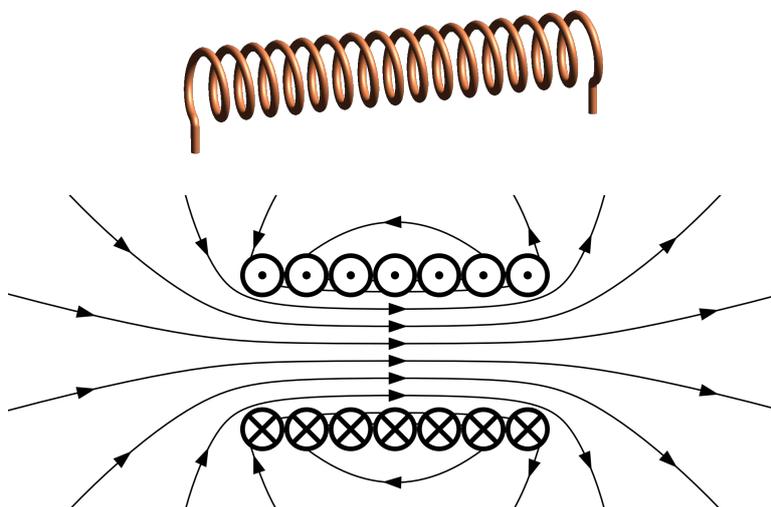


FIGURE 1.4 – Haut : solénoïde (Par Zureks — Travail personnel, Domaine public, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=17624128>). Bas : lignes de champ d'un solénoïde vu en coupe (Par Geek3 — Travail personnel, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10618762>).

**Question 5 :** Afficher le pôle nord et le pôle sud du solénoïde de la figure 1.4.

Un tore magnétique consiste en l'enroulement d'une bobine de bout en bout (tout comme une spire correspond à l'enroulement d'un fil sur lui-même).

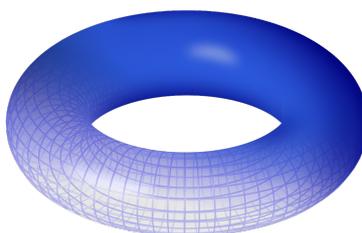


FIGURE 1.5 – Tore de révolution (By Leonid\_2 - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8643414>).

Le champ magnétostatique est théoriquement piégé dans un tore, puisqu'il ne peut pas s'échapper (il n'y a pas de sortie... ni d'entrée!). Ainsi, les lignes de champ sont des cercles contenus à l'intérieur du tore, et le champ magnétostatique extérieur est nul.

Le solénoïde et le tore sont les dispositifs les plus simple à mettre en place pour créer un champ magnétostatique uniforme en leur sein : les électro-aimants ou les tokamaks reposent sur ces technologies, à plus ou moins grande échelle.

## 1.2.2 Symétries et antisymétries

### Plans de symétrie et d'antisymétrie des courants

On dit qu'un plan  $\Pi$  est un plan de **symétrie** des courants si, lorsqu'un courant existe d'un côté de ce plan, alors un courant de même sens et de même valeur existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement au premier courant.

On dit qu'un plan  $\Pi$  est un plan d'**antisymétrie** des courants si, lorsqu'un courant existe d'un côté de ce plan, alors un courant **de signe opposé et de même valeur absolue** existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement au premier courant.

**Question 6** : Lister les plans de symétrie et d'antisymétrie des courants pour un fil rectiligne infini.

**Question 7** : Lister les plans de symétrie et d'antisymétrie des courants pour une spire circulaire.

**Question 8** : Lister les plans de symétrie et d'antisymétrie des courants pour une bobine de longueur infinie.

**Question 9** : Lister les plans de symétrie et d'antisymétrie des courants pour un tore magnétique.

**Question 10 :** Que peut-on dire du champ magnétostatique pour les plans de symétrie ?

**Question 11 :** Que peut-on dire du champ magnétostatique pour les plans d'antisymétrie ?

#### Direction du champ magnétostatique selon la symétrie des courants

Soit un point  $M$  appartenant à un plan de symétrie  $\Pi_+$  des courants. Le champ magnétostatique  $\vec{B}(M)$  est alors orthogonal à ce plan :  $\vec{B}(M) \perp \Pi_+$ .

Soit un point  $M$  appartenant à un plan d'antisymétrie  $\Pi_-$  des courants. Le champ magnétostatique  $\vec{B}(M)$  est alors contenu dans ce plan :  $\vec{B}(M) \in \Pi_-$ .

## 1.3 Flux magnétostatique

### 1.3.1 Conservation du flux magnétostatique

Reprenons l'exemple du solénoïde en figure 1.6.

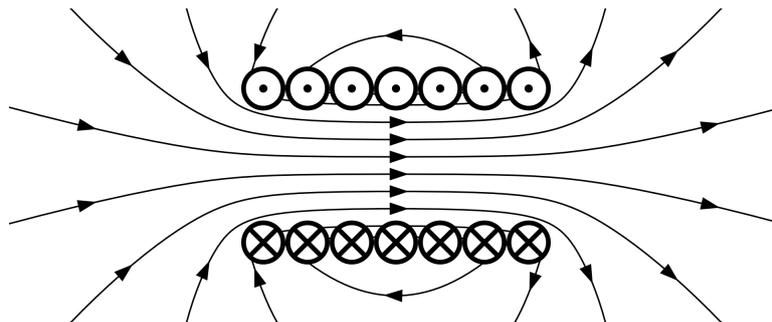
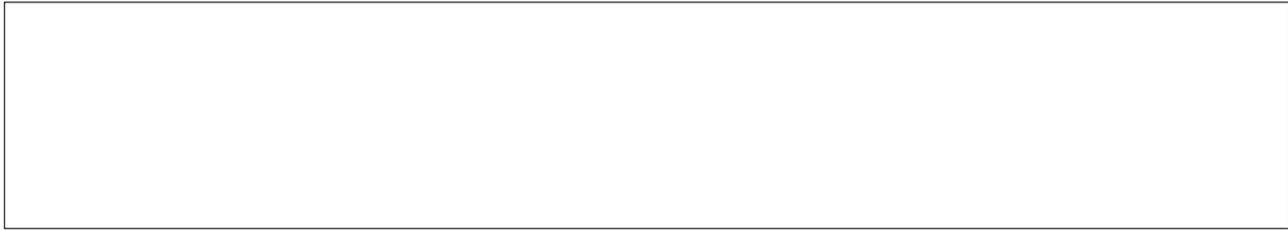


FIGURE 1.6 – Lignes de champ d'un solénoïde vu en coupe (Par Geek3 — Travail personnel, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10618762>).

**Question 12 :** Tracer en figure 1.6 deux surfaces fermées quelconques, l'une englobant le solénoïde et l'autre étant à l'extérieur. Compter les lignes de champ entrantes et sortantes de cette surface.



### Conservation du flux magnétostatique

Soit  $S$  une surface fermée. Le flux du champ magnétostatique à travers cette surface est nulle :

$$\Phi_B^S \text{ fermée} = 0$$

En d'autres termes, si l'on considère un contour fermé  $C$ , alors le flux du champ magnétostatique à travers n'importe quelle surface ouverte s'appuyant sur  $C$  est conservé :

$$\Phi_B^{\text{entrant}} = \Phi_B^{\text{sortant}}$$

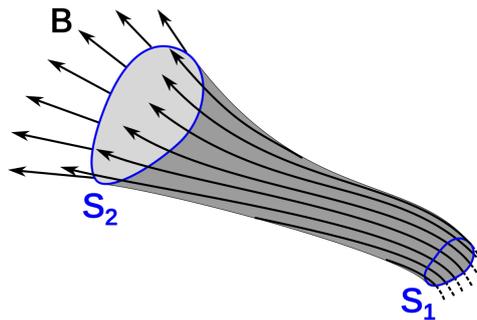


FIGURE 1.7 – Tube de flux magnétique (By Chetvorno - Own work, CC0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=81086298>). Si l'on note  $B_1$  le champ magnétostatique uniforme en entrée de section  $S_1$  et  $B_2$  le champ magnétostatique uniforme en sortie de section  $S_2$ , on a alors  $B_1 \times S_1 = B_2 \times S_2$ .

### 1.3.2 Écriture locale de la conservation du flux magnétostatique

On sait relier le flux d'un champ vectoriel à la divergence : pour un volume élémentaire  $dV$  délimité par une surface fermée  $d\vec{S}$  orientée vers l'extérieur, on a  $d\Phi_B^{\text{d}S \text{ fermée}} = \text{div } \vec{B} dV$ .

#### Équation de Maxwell-Thomson

La divergence du champ magnétostatique est nulle :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

## Questions de cours

**À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...**

- Rappeler l'expression de la force de Laplace exercée par un champ magnétique  $\vec{B}$  sur un conducteur parcouru par un courant  $I$ .
- Donner des ordres de grandeur pour le champ magnétique créé par un aimant permanent ; dans un électro-aimant à bobinage ; dans un appareil à IRM ; sur Terre.
- Tracer les lignes de champ magnétique pour un aimant droit ; pour un fil rectiligne ; pour une spire circulaire ; pour une bobine longue (ou solénoïde) ; pour un tore.
- Définir ce qu'est un plan de symétrie des courants. Que peut-on dire du champ magnétique en un point de ce plan ?
- Définir ce qu'est un plan d'antisymétrie des courants. Que peut-on dire du champ magnétique en un point de ce plan ?
- Rappeler l'équation de Maxwell-Thomson en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. Quelle est son interprétation physique ?

# Chapitre 2 : Théorème d'Ampère

## 📌 Objectifs :

- Énoncer le théorème d'Ampère.
- Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (fil infini, câble coaxial, tore, solénoïde « infini », nappe de courant supposée « infinie »).
- Énoncer les relations de passage du champ magnétostatique.
- Relier le théorème d'Ampère à l'équation de Maxwell-Ampère de la statique.

✍ **Au concours ATS** : Aux écrits en 2023, 2022. Tombe parfois aux oraux.

## 2.1 Théorème d'Ampère

### 2.1.1 Énoncé

#### Théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique  $\vec{B}$  le long d'un contour fermé  $\mathcal{C}$  orienté est proportionnelle aux courants enlacés par ce contour, comptés positivement s'ils sont orientés dans le même sens et négativement sinon :

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_M^{\text{selon } \mathcal{C}} = \mu_0 \times I_{\text{enlacés par } \mathcal{C}}$$

où  $\mu_0 = 1,26 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  est la **perméabilité magnétique du vide**.

### 2.1.2 Utilité et étapes

L'utilité principale du théorème d'Ampère est de pouvoir exprimer le champ magnétostatique  $\vec{B}(M)$  en tout point  $M$ , si suffisamment de symétries permettent de simplifier le problème. Pour cela :

1. On recense les invariances dues aux répartitions des courants : on en déduit **les variables** du champ  $\vec{B}$  ;
2. On choisit un point  $M$  dans l'espace, et on identifie les plans de symétrie et/ou d'antisymétrie passant par ce point : on en déduit **la direction** du champ  $\vec{B}(M)$  ;
3. On choisit un **contour d'Ampère**, que l'on oriente, qui passe par le point  $M$ , et le long duquel le champ  $\vec{B}$  est uniforme : l'expression de la circulation du champ magnétostatique se simplifie ;
4. On compte les courants intérieurs au contour d'Ampère, avec un + si les deux ont la même orientation (selon la règle du tire-bouchon) ou avec un - sinon ;
5. On applique le théorème d'Ampère pour déterminer  $B(M)$ , puis  $\vec{B}(M)$ .

## 2.2 Applications du théorème d'Ampère

### 2.2.1 Champ créé par un fil infini

Considérons un fil infini et vertical, parcouru par un courant  $I$  allant vers le haut.

On fixe un point  $M$  quelconque dans l'espace contenu au-dehors du fil.

**Question 1** : Faire un schéma du problème. Quelles invariances observe-t-on ? En déduire les variables du champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

**Question 2** : Quel plan passant par  $M$  est de symétrie par rapport aux courants ? En déduire la direction du champ magnétostatique en  $M$ .

**Question 3** : Quel contour d'Ampère va-t-on choisir ici ? Exprimer sa circonférence et simplifier l'expression de la circulation magnétostatique.

**Question 4 :** Que vaut  $I_{\text{enlacés}}$  ? En déduire l'expression de  $B$  puis de  $\vec{B}$ .

### 2.2.2 Champ créé par un câble coaxial

On considère un câble coaxial, constitué de deux cylindres conducteurs imbriqués l'un dans l'autre, mais n'étant pas en contact. Les deux axes de révolution sont identiques.

Le premier cylindre conducteur, plein, a un rayon  $R_1$ . Entre  $R_1$  et  $R_2$  se situe un isolant, puis l'ensemble est entouré par le deuxième conducteur contenu entre les rayons  $R_2$  et  $R_3$  (voir figure 2.1).

Le conducteur central (« l'âme ») est parcouru par un courant total  $I$  orienté dans le même sens que l'axe  $(O, z)$ . Le conducteur externe est parcouru par un courant total  $I$  orienté dans le sens opposé à l'axe  $(O, z)$ .

On fixe un point  $M$  quelconque dans l'espace isolant ou en dehors du câble coaxial.

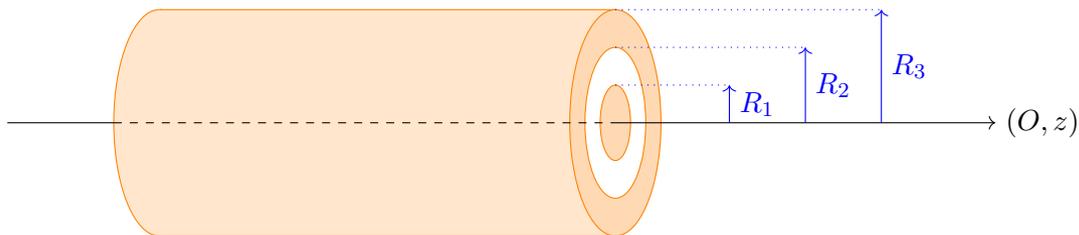


FIGURE 2.1 – Modélisation d'un câble coaxial.

**Question 5 :** Quelles invariances observe-t-on ? En déduire les variables du champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

**Question 6 :** Quels plans passant par  $M$  sont de symétrie par rapport aux courants ? En déduire la direction du champ magnétostatique en  $M$ .

**Question 7 :** Quel contour d'Ampère va-t-on choisir ici? Exprimer sa circonférence et simplifier l'expression de la circulation magnétostatique.

**Question 8 :** Si  $R_1 < r < R_2$ , que vaut  $I_{\text{enlacés}}$ ? En déduire l'expression de  $B$  puis de  $\vec{B}$ .

**Question 9 :** Mêmes questions si  $r > R_3$ .

### 2.2.3 Champ créé par un tore

On considère un tore de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2$ . Un fil conducteur est bobiné autour de ce tore, de telle façon que l'on a  $N$  tours de fil (assimilés à des spires jointives) le long du tore (voir figure 2.2). On note  $I$  le courant parcourant le conducteur.

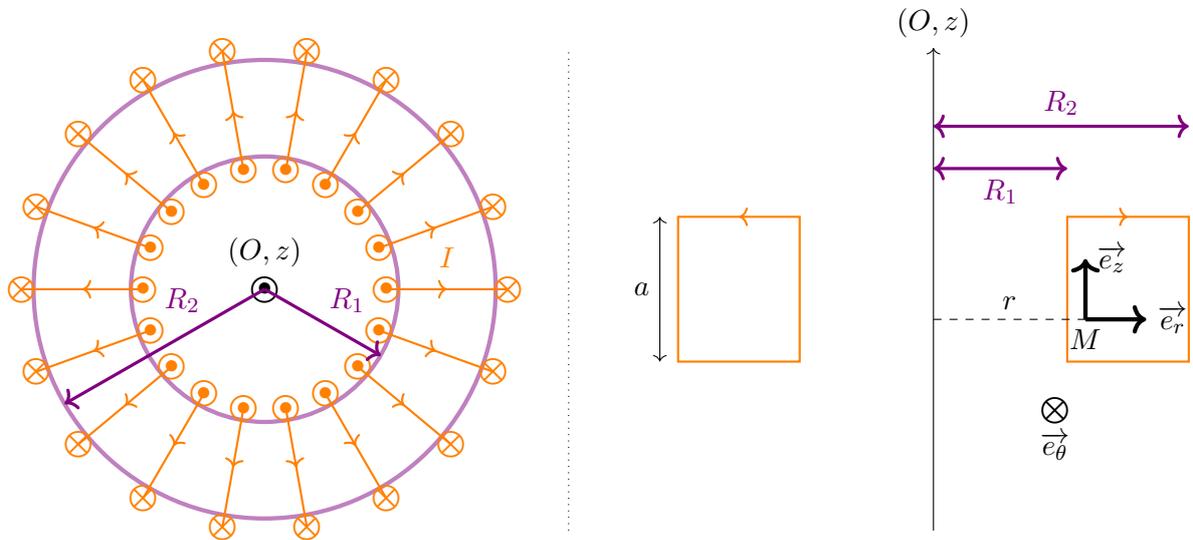


FIGURE 2.2 – Modélisation d'un tore bobiné (à gauche : vue de dessus ; à droite : vue en coupe). Toutes les spires ne sont pas représentées, par souci de lisibilité.

**Question 10 :** Quelles invariances observe-t-on ? En déduire les variables du champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

**Question 11 :** Quels plans passant par  $M$  sont de symétrie par rapport aux courants ? En déduire la direction du champ magnétostatique en  $M$ .

**Question 12 :** Quel contour d'Ampère va-t-on choisir ici ? Exprimer sa circonférence et simplifier l'expression de la circulation magnétostatique.

**Question 13 :** Si  $r < R_1$ , que vaut  $I_{\text{enlacés}}$  ? En déduire l'expression de  $B$  puis de  $\vec{B}$ .

**Question 14 :** Mêmes questions si  $R_1 < r < R_2$ .

**Question 15 :** Mêmes questions si  $r > R_2$ .

### 2.2.4 Champ créé par un solénoïde infini

On considère un solénoïde de rayon  $R$  et de longueur  $L \gg R$ . Il y a au total  $N$  spires jointives ; on note  $n \triangleq \frac{N}{L}$  la densité de spires par unité de longueur. Un courant  $I$  circule dans les spires.

On **admet** que le champ magnétostatique au-dehors du solénoïde est **nul**.

On fixe un point  $M$  quelconque dans l'espace contenu au-dehors du fil.

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

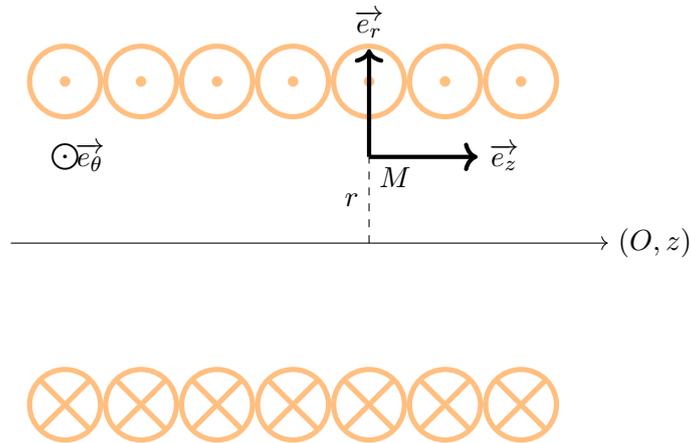


FIGURE 2.3 – Modélisation d'un solénoïde infini.

**Question 16 :** Quelles invariances observe-t-on ? En déduire les variables du champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

**Question 17 :** Quel plan passant par  $M$  est de symétrie par rapport aux courants ? En déduire la direction du champ magnétostatique en  $M$ .

**Question 18** : Expliquer pourquoi un contour d'Ampère adapté consiste à prendre en compte un segment parallèle à l'axe du solénoïde et au-dehors de celui-ci.

**Question 19** : Exprimer le périmètre du contour d'Ampère et simplifier l'expression de la circulation magnétostatique.

**Question 20** : Si  $r < R$ , que vaut  $I_{\text{enlacés}}$  ? En déduire l'expression de  $B$  puis de  $\vec{B}$ . Quel commentaire peut-on faire ?

### 2.2.5 Nappe infinie « épaisse » de courants

Considérons une densité volumique de courant uniforme, sous la forme  $\vec{j} = j_0 \cdot \vec{e}_x$ , uniquement présente entre les plans  $z = -a/2$  et  $z = a/2$  (voir figure 2.4). On choisit un point  $M$  à la cote  $z > a/2$ , c'est-à-dire au-dessus du plan infini.

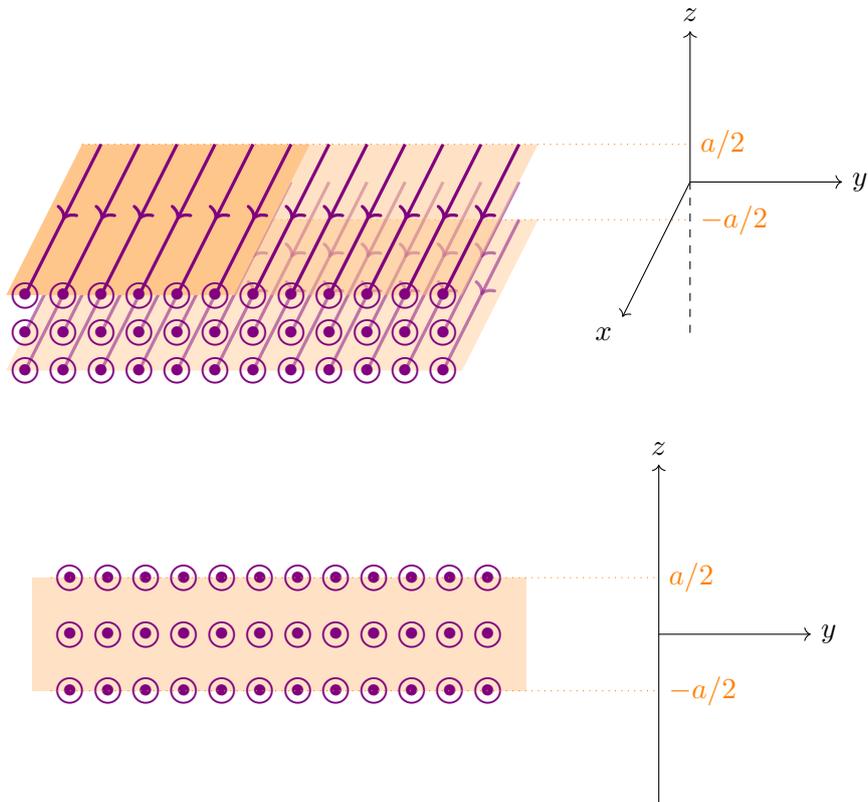


FIGURE 2.4 – Nappe infinie de courants en perspective cavalière (haut) et en coupe (bas).

**Question 21 :** Quelles invariances observe-t-on ? En déduire les variables du champ magnétostatique  $\vec{B}$ .

**Question 22 :** Quel plan passant par  $M$  est de symétrie par rapport aux courants ? En déduire la direction du champ magnétostatique en  $M$ .

**Question 23 :** Quel lien existe entre  $\vec{B}(z)$  et  $\vec{B}(-z)$  ? Entre  $B(z)$  et  $B(-z)$  ?

On choisit comme contour d'Ampère un rectangle orthogonal à la direction  $x$ , de longueur  $L$  selon la direction  $y$ , et de hauteur allant entre les cotes  $-z$  et  $z$  (on rappelle que  $z > a/2$ ). On oriente le contour positivement selon la direction  $x$ .

**Question 24 :** Exprimer la circulation du champ magnétostatique le long du contour d'Ampère précédent.

**Question 25 :** Montrer alors, par le théorème d'Ampère, que  $\vec{B}(z) = -\mu_0 j_0 \frac{a}{2} \cdot \vec{e}_y$ .

## 2.3 Relations de passage pour le champ magnétostatique

Reprenons l'exemple de la nappe de courants. Supposons que l'on se place à altitude  $z$  très élevée :  $z \gg a$ . De ce point de vue, la distribution de courant semble n'être contenue que dans un plan d'épaisseur infinitésimale : il s'agit donc d'une densité de courant surfacique  $\vec{j}_s$ .

☛ *Remarque* : La densité surfacique de courant n'est qu'une approximation physique : en réalité, tout courant a une épaisseur car les porteurs de charges ont une taille. On pourrait faire la même remarque pour la densité linéique de courant (ou de charge)...

**Question 26** : Exprimer  $j_s$ , norme de la densité surfacique de courant, dans notre cas.

La partie précédente nous permet de dire que  $B(z) - B(-z) = \mu_0 j_0 a = \mu_0 j_s$ . Cherchons à généraliser cette formule :

1. L'espace  $z > a/2$  correspond à un milieu différent de l'espace  $z < -a/2$ , qui est délimité par une frontière surfacique  $z = 0$ , vue de loin ;
2. Le champ magnétostatique est orienté selon  $\vec{e}_y$  ;
3. Le plan  $z = 0$  a pour vecteur normal  $\vec{e}_z$  ;
4. Les courants surfaciques sont orientés selon  $\vec{e}_x$ .

On peut donc écrire que  $\vec{B}(z) - \vec{B}(-z) = \mu_0 \cdot \vec{j}_s \wedge \vec{e}_z$ .

### Relations de passage pour le champ magnétostatique

Soient deux milieux (1) et (2) séparés par une interface de densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$ .  $\vec{B}_1$  représente le champ magnétostatique dans le milieu (1) juste avant l'interface, et  $\vec{B}_2$  le champ magnétostatique dans le milieu (2) juste après l'interface.

Les **relations de passage** pour le champ magnétostatique à travers l'interface sont les suivantes :

- La composante normale du champ magnétostatique est conservée ;
- Les composantes tangentielles du champ magnétostatique ne sont pas conservées.

On peut les résumer vectoriellement *via* la relation :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \cdot \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

où  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  est le vecteur normal à l'interface, orienté du milieu (1) vers le milieu (2).

## 2.4 Écriture locale du théorème d'Ampère

### 2.4.1 Du théorème d'Ampère à l'équation de Maxwell-Ampère de la statique

Le théorème d'Ampère relie la circulation d'un champ magnétostatique sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  aux courants enlacés par ce contour :  $\oint_{M \in \mathcal{C}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}_M = \mu_0 \times I_{\text{enlacés par } \mathcal{C}}$ .

Prenons un contour infinitésimal fermé et orienté  $d\mathcal{C}$ , et notons  $d\vec{S}$  l'aire orientée de la surface infinitésimale ainsi formée. Nous avons montré dans le chapitre traitant de l'aspect local du champ électrostatique que la circulation  $d\mathcal{C}$  du champ magnétostatique  $\vec{B}$  vaut :  $d\mathcal{C} = \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ .

De plus, grâce à la partie précédente, nous avons montré que  $I_{\text{enlacés par } d\mathcal{C}} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ , où  $\vec{j}$  représente la densité volumique de courant dans l'espace tout entier.

Il vient donc que  $\vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}$ , pour toute surface infinitésimale  $d\vec{S}$ .

#### Équation de Maxwell-Ampère de la statique

Le rotationnel du champ magnétostatique est localement proportionnel à la densité volumique de courants :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

☛ *Remarque* : Nous verrons plus tard dans l'année que cette équation n'est valable qu'en régime stationnaire, c'est-à-dire totalement indépendant du temps  $t$ . Pour un régime dépendant du temps, le deuxième terme changera...

Cette équation représente physiquement le fait que le champ  $\vec{B}$  tourne autour des courants. C'est ce que l'on avait déjà vu en traçant les lignes du champ magnétostatique !

### 2.4.2 De l'équation de Maxwell-Ampère de la statique au théorème d'Ampère

#### Théorème de Stokes

Soit  $\mathcal{C}$  un contour fermé et  $\mathcal{S}$  une surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ . Le théorème de Stokes relie la circulation champ vectoriel le long de  $\mathcal{C}$  et son rotationnel :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

**Question 27** : Démontrer le théorème d'Ampère à partir de l'équation de Maxwell-Ampère de la statique.

## Questions de cours

**À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...**

- Énoncer le théorème d'Ampère en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives.
- Déterminer en tout point de l'espace l'expression du champ magnétostatique créé par un fil infini parcouru par un courant  $I$ .
- Déterminer en tout point de l'espace l'expression du champ magnétostatique créé par un câble coaxial de rayon intérieur  $R_1$  parcouru par un courant  $I$  et de rayon extérieur  $R_2$  parcouru par un courant  $-I$ .
- Déterminer au sein du tore l'expression du champ magnétostatique créé par un tore à section carrée de rayon intérieur  $R$  et de rayon extérieur  $R + a$  parcouru par un courant  $I$ .
- Déterminer l'expression du champ magnétostatique créé par un solénoïde infini comportant  $n$  spires par unité de longueur parcourues par un même courant  $I$ , en admettant que le champ magnétostatique extérieur est nul.
- Énoncer les relations de passage pour le champ magnétostatique.
- Rappeler l'équation de Maxwell-Ampère de la statique en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. Quelle est son interprétation physique ? À l'aide du théorème de Stokes, en déduire le théorème d'Ampère.

# Chapitre 3 : Bobines et inductance propre

## Objectifs :

- Évaluer le flux magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.
- Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.
- Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'alébrisation.
- Évaluer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur, le champ magnétique créé par la bobine étant admis comme équivalent à celui déterminé en régime stationnaire.
- Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
- Définir la notion de densité volumique d'énergie magnétique à l'aide de l'exemple du solénoïde infini.

 **Au concours ATS** : Aux écrits en 2019 et 2020. Tombe parfois aux oraux.

## 3.1 Phénomène d'induction

### 3.1.1 Observations expérimentales

Ampère, à l'aide de son théorème, avait pu constater qu'un courant électrique pouvait être à l'origine d'un champ magnétique. Faraday, au dix-neuvième siècle, a pu observer une sorte de réciproque au théorème d'Ampère : les champs magnétiques semblent pouvoir créer des courants.

Son expérience (figure 3.1) était la suivante : une pile est reliée à un solénoïde, créant ainsi un champ magnétique en son sein. Lorsque le solénoïde est mis en mouvement à l'intérieur de l'autre bobinage, un courant électrique, détecté par le galvanomètre, circule dans ce dernier.

Cependant, lorsque le petit cylindre est immobile dans le grand cylindre, aucun courant électrique n'est détecté. Ainsi, sans que les solénoïdes ne soient en contact, le **mouvement** du premier bobinage **induit** un courant électrique dans le deuxième bobinage.

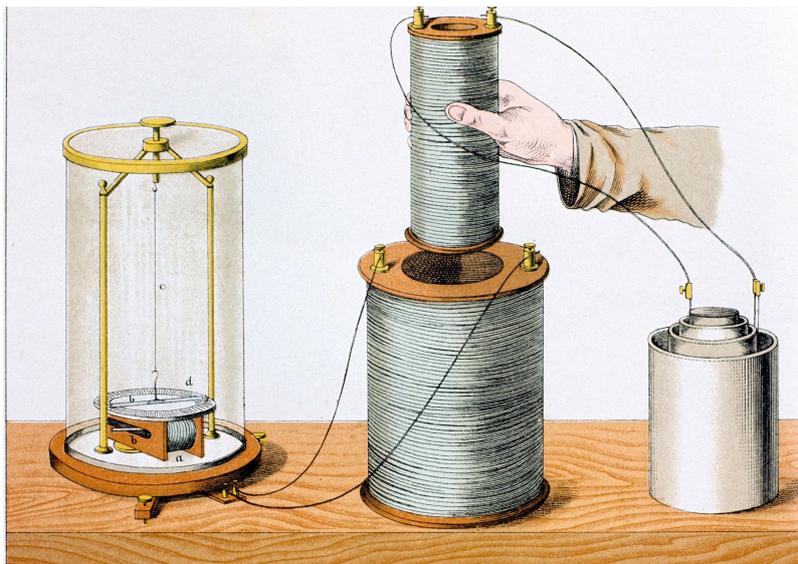


FIGURE 3.1 – Expérience de Faraday. À gauche : galvanomètre (équivalent d'un ampèremètre) ; à droite : pile ; en haut et en bas : solénoïdes.

## 3.1.2 Loi de Faraday, loi de Lenz

## Loi de Faraday

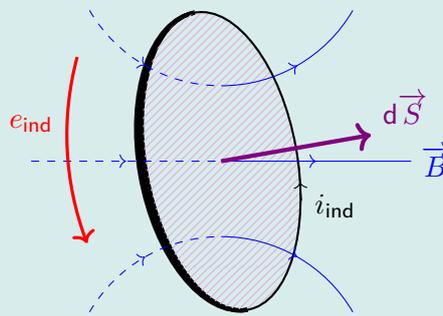
Soit un contour fermé  $\mathcal{C}$  orienté et constitué d'un matériau conducteur, et  $\mathcal{S}$  une surface quelconque « s'appuyant » sur  $\mathcal{C}$  et dirigée dans le même sens que  $\mathcal{C}$  ( $d\vec{S}$  est donc dirigé selon  $\mathcal{C}$  selon la règle du tire-bouchon).

Notons  $\Phi_B \triangleq \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$  le flux du champ magnétique à travers la surface  $\mathcal{S}$ .

Si le flux magnétique varie au cours du temps, une force électromotrice <sup>a</sup>  $e_{\text{ind}}$  est induite dans le circuit fermé, orientée de la même manière que  $\mathcal{C}$ , telle que :

$$e_{\text{ind}} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

De cette tension induite découle un courant induit  $i_{\text{ind}}$  orienté dans le même sens que  $\mathcal{C}$  et  $e_{\text{ind}}$ .



a. C'est-à-dire une tension électrique.

☛ *Remarque* :  $\vec{B}$  est le plus souvent donné par l'énoncé ; le sens de  $d\vec{S}$  dépend en revanche du sens choisi pour l'orientation de  $\mathcal{C}$ , selon la règle du tire-bouchon (à faire avec la main droite). Il n'y a pas de bonne ou de mauvaise façon d'orienter le contour ; il faut en revanche rester sur la même convention le long du problème, car le sens de  $e_{\text{ind}}$  et de  $i_{\text{ind}}$  dépend directement de celui de  $\mathcal{C}$  !

☛ *Remarque* : Deux grands cas ont lieu pour provoquer de l'induction. Le circuit peut être fixe dans un champ magnétique qui varie dans le temps :  $\vec{B} = \vec{B}(t)$ , ou bien le circuit peut se déplacer et se déformer dans un champ magnétique constante :  $d\vec{S} = d\vec{S}(t)$ . Dans ce chapitre, nous allons plutôt nous intéresser au premier cas.

☛ *Remarque* : Si l'on note  $(O, z)$  l'axe de la spire, on dira que le courant est **orienté selon**  $\pm \vec{u}_z$  et que la surface est **dirigé par**  $\pm \vec{u}_z$ .

Prenons l'exemple d'une spire fixe de rayon  $R$  et d'axe de révolution  $(O, x)$ , plongée dans un champ magnétique variable et uniforme  $\vec{B}(t) = B_0 \frac{t}{T} \vec{e}_x$ .

**Question 1** : Exprimer  $\Phi_B$  en fonction des données de l'énoncé. En déduire  $e_{\text{ind}}$ .

**Question 2** : Faire un schéma électrique du circuit équivalent, en supposant que la spire a une résistance  $r$ . En déduire le courant induit  $i$ .

**Question 3** : Qualitativement, que peut-on dire du sens du champ magnétique induit  $\vec{B}_{\text{ind}}$  par le courant  $i$  ?

#### Loi de modération de Lenz

De par le signe négatif de la loi de Faraday, une augmentation du flux magnétique induit une force électromotrice négative, et donc un courant négatif, qui créera un champ magnétique s'opposant au champ initial.

Cette loi qualitative de modération s'énonce souvent ainsi : « *Les courants induits tendent, par leurs conséquences, à s'opposer à la cause qui leur a donné naissance* ».

☛ **Remarque** : Cette loi de modération, assez empirique, est valable dans de nombreux domaines de la physique et de la chimie : elle permet de justifier le fait que l'on n'observe pas « d'emballement » de phénomènes, mais plutôt une douce atténuation des causes par les conséquences.

### 3.1.3 Lien avec l'équation de Maxwell-Faraday

**Question 4 :** Montrer que le terme de droite de la loi de Faraday peut s'écrire  $-\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ .

**Question 5 :** La force électromotrice induite  $e_{\text{ind}}$  étant une tension, elle peut s'écrire comme la circulation d'un champ électrique  $\vec{E}$  sur le contour  $\mathcal{C}$  fermé :  $e_{\text{ind}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ . À l'aide du théorème de Stokes, déterminer une équation portant sur le rotationnel de  $\vec{E}$ .

#### Équation de Maxwell-Faraday

Le rotationnel du champ électrique dépend des variations temporelles du champ magnétique :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

☛ *Remarque :* Si l'on revient dans les chapitres précédents, on avait montré que l'existence du potentiel  $V$  était assurée par le fait que  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ , ce qui est vrai en statique... Cette nouvelle équation signifie-t-elle que le potentiel électrique n'existe pas lorsque les phénomènes électromagnétiques dépendent du temps ?

Heureusement, l'équation de Maxwell-Thomson, toujours valable en régime variable, impose que  $\text{div } \vec{B} = 0$ . Il est simple de montrer<sup>1</sup> que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle :  $\text{div } \text{rot } \vec{A} = 0$ . La réciproque est également vraie, mais plus complexe à démontrer : si  $\text{div } \vec{B} = 0$ , alors il existe un champ  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B}$  s'écrit sous forme de rotationnel :  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ .

Si l'on revient à l'équation de Maxwell-Faraday, on a donc  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} = -\text{rot } \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ . Cela donne donc que  $\text{rot } \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$ . Or, si le rotationnel d'un champ est nul, cela signifie qu'il peut

1. Voir un ancien TD.

s'écrire sous forme de gradient :  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} V$ , d'où :

$$\vec{E} = \underbrace{-\vec{\text{grad}} V}_{\text{champ électrique créé par le potentiel électrique } V} + \underbrace{-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\text{champ électrique créé par le potentiel magnétique } \vec{A}}$$

La tension  $U_{XY} \triangleq \int_X^Y \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  entre deux points  $X$  et  $Y$  est alors égale à :

$$U_{XY} = \underbrace{\int_X^Y -\vec{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell}}_{V_X - V_Y} + \underbrace{\int_X^Y -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}}_{e_{XY}^{\text{ind}}}$$

En particulier, on peut remarquer que si le régime est stationnaire, on retrouve bien  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$  et  $U_{XY} = V_X - V_Y$ .

## 3.2 Auto-induction

### 3.2.1 Flux propre et inductance propre

Mettons pour l'instant de côté l'idée de circuits différents pouvant être en influence entre eux. Le cas le plus simple à imaginer est celui d'un bobinage alimenté et parcouru par un courant  $i_0$ . Ce courant est à l'origine d'un champ magnétique  $\vec{B}_0$ , dont on peut calculer le flux  $\Phi_0$  à travers cette bobine. Si ce flux varie au cours du temps, on créera donc un courant induit  $i_1$  dans le bobinage qui s'ajoutera au courant de départ  $i_0$ , ce qui créera un nouveau champ magnétique  $\vec{B}_1$  et donc un nouveau flux  $\Phi_1$ , etc.

Considérons, pour simplifier, un solénoïde « infini de longueur  $\ell$  » possédant  $n \triangleq \frac{N}{\ell}$  spires par unité de longueur et parcouru par un courant total  $i = i_0 + i_1 + \dots$ . On note  $\vec{B}$  le champ magnétique total et  $\Phi_B$  son flux dans la totalité de la bobine. Le rayon du solénoïde sera noté  $r$ .

**Question 6** : Rappeler l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  d'un solénoïde infini. En déduire  $\varphi_B$ , flux magnétique à travers une spire, puis  $\Phi_B$ .

#### Inductance propre

Un circuit peut créer un champ magnétique induisant en lui-même des courants électriques. Si l'on note  $\Phi_{\text{propre}}$  le **flux magnétique propre** au circuit à travers lui-même, et  $i$  l'intensité le parcourant, on s'aperçoit que les deux grandeurs sont proportionnelles :

$$\Phi_{\text{propre}} = L \times i$$

où  $L$  est le coefficient d'**inductance propre** du circuit, qui s'exprime en henry H et ne dépend que de la géométrie du circuit.

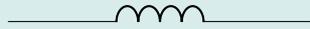
**Question 7 :** Donner la valeur de l'inductance propre d'un solénoïde de longueur  $\ell = 10$  cm, de diamètre  $D = 1$  cm et possédant 5 spires/cm.

### 3.2.2 Étude énergétique globale d'une bobine

**Question 8 :** Exprimer la force électromotrice induite  $e_{\text{ind}}$  en fonction du courant débité  $i$  dans le circuit.

#### Modélisation d'une bobine en électrocinétique

Une bobine est un dipôle constitué d'un enroulement de fils (des spires) autour d'un même axe. Son symbole, en électrocinétique, est le suivant :



La tension  $u$  aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée temporelle de l'intensité  $i$  la traversant. En convention récepteur, on a donc :

$$u = L \frac{di}{dt}$$

☛ *Remarque :* En pratique, les inductances varient typiquement entre 10 mH et 1 H.

☛ *Remarque :* Ce que nous venons de modéliser n'est en fait pas une bobine réelle, mais ce que l'on appelle une bobine idéale. En effet, une bobine étant un enroulement de fils de longueur non négligeable, il s'avère qu'une bobine réelle est en fait modélisée par une bobine idéale  $L$  et un résistor  $r$  en série (voir figure 3.2). La résistance ajoutée correspond à celle des fils de l'enroulement.

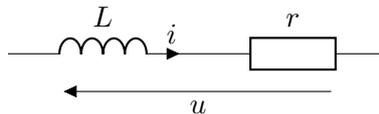


FIGURE 3.2 – Modélisation d'une bobine réelle.

Considérons un circuit constitué d'un générateur de tension  $E$  constante, d'une bobine idéale d'inductance  $L$  et d'un résistor de résistance  $R$  (voir figure 3.3).

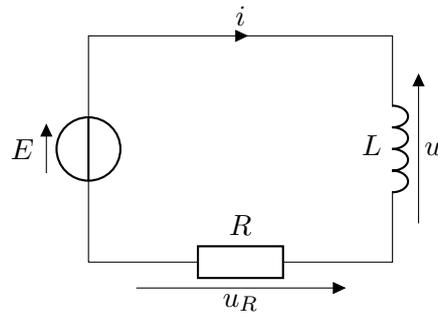


FIGURE 3.3 – Circuit RL.

**Question 9 :** Déterminer l'équation électrique portant sur  $i$  à l'aide de la loi des mailles.

**Question 10 :** Multiplier cette équation par  $i$ . Montrer que la puissance du générateur est convertie en effet joule et en puissance inductive, dont l'énergie associée est  $\frac{1}{2}Li^2$ .

### Énergie emmagasinée par une bobine

L'énergie  $\mathcal{E}_L$  stockée dans une bobine d'inductance  $L$  traversée par un courant  $i$  est :

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$$

On en déduit que *le courant* parcourant une bobine ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

### 3.2.3 Densité volumique d'énergie magnétique

Revenons sur le cas du solénoïde infini de longueur  $\ell$ .

**Question 11** : Après avoir exprimé  $i$  en fonction de  $B$ , montrer que  $\mathcal{E}_L = u_m \times V$  avec  $V$  le volume intérieur de la bobine.

#### Densité volumique d'énergie magnétique

Soit un champ magnétique  $\vec{B}$  régnant dans l'espace. On associe à ce champ magnétique une **densité volumique  $u_m$  d'énergie magnétique** (en  $\text{J/m}^3$ ) :

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

L'énergie électrique totale contenue dans l'espace est donc  $\mathcal{E}_m = \iiint u_m dV$ .

### Questions de cours

**À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...**

- Énoncer la loi de Faraday (en donnant la définition du flux magnétique). Comment est déterminé le sens du champ magnétique  $\vec{B}$  ? Celui du vecteur  $d\vec{S}$  ? Celui de la force électromotrice induite  $e_{\text{ind}}$  ? Celui du courant induit  $i_{\text{ind}}$  ?
- Énoncer la loi de modération de Lenz. Expliquer en quoi on la retrouve dans la loi de Faraday.
- Rappeler la définition de l'inductance propre d'un circuit parcouru par un courant  $i$ . On explicitera chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. En admettant que le champ magnétique créé par un solénoïde en son sein est  $B = \mu_0 n i$ , avec  $n$  le nombre de spires par unité de longueur, déterminer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de longueur  $\ell = 30 \text{ cm}$ , de rayon  $R = 2 \text{ cm}$  et possédant  $n = 10 \text{ spires/cm}$ . On rappelle que  $\mu_0 \approx 1,26 \times 10^{-6} \text{ SI}$ .
- Quelle est la relation intensité-tension pour une bobine, en convention récepteur ? Donner des ordres de grandeur pour les inductances propres des bobines utilisées en travaux pratiques.
- Quelle est l'expression de l'énergie emmagasinée par une bobine ? En prenant l'exemple du solénoïde infini de longueur  $\ell$  (champ magnétique uniforme  $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$  en son sein), retrouver l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique.

# Chapitre 4 : Induction mutuelle

## 📌 Objectifs :

- Différencier le flux propre des flux extérieurs.
- Définir les flux mutuels. Indiquer l'égalité des inductances mutuelles.
- Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction et d'induction mutuelle en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
- Définir le couplage parfait de deux circuits.
- Expliquer le principe du chauffage inductif, le principe d'une détection ampèremétrique, le fonctionnement d'un alternateur.

✍ **Au concours ATS** : Aux écrits en 2020. Tombe parfois aux oraux.

## 4.1 Circuits couplés par induction

### 4.1.1 Coefficient d'inductance mutuelle

Dans un chapitre antérieur, nous avons vu, sans entrer dans les détails, qu'un circuit pouvait induire une force électromotrice dans un autre circuit. Étudions de manière plus précise ce phénomène.

Considérons deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  assimilés à des spires respectivement parcourues par des courants  $i_1$  et  $i_2$ . On note  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  les champs magnétiques créés par ces deux spires.

**Question 1** : Justifier le fait que l'on puisse écrire  $\vec{B}_1 = i_1 \cdot \vec{b}_1$  et  $\vec{B}_2 = i_2 \cdot \vec{b}_2$ , avec  $\vec{b}_1$  et  $\vec{b}_2$  deux champs (pas magnétiques, au vu de leurs dimensions !) dépendant uniquement de la géométrie de chacun des circuits et pas des intensités  $i_1$  et  $i_2$ .

**Question 2** : Exprimer le flux  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  du champ magnétique  $\vec{B}_2$  à travers le circuit  $C_1$  en fonction de  $i_2$  et d'un paramètre dépendant uniquement de la géométrie du circuit  $C_2$  et de son orientation par rapport au circuit  $C_1$ .

### Coefficients d'inductance mutuelle

Soient deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  parcourus respectivement par des courants  $i_1$  et  $i_2$ , qui créent des champs magnétiques  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ .

Si l'on note  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  le flux de  $\vec{B}_2$  à travers  $C_1$ , on peut montrer qu'il y a proportionnalité entre  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  et  $i_2$  :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} \times i_2$$

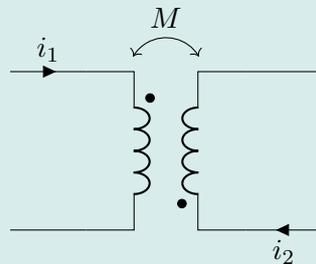
De même, si l'on note  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  le flux de  $\vec{B}_1$  à travers  $C_2$ , on peut montrer qu'il y a proportionnalité entre  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  et  $i_1$  :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} \times i_1$$

Les coefficients  $M_{1 \rightarrow 2}$  et  $M_{2 \rightarrow 1}$  sont en réalité égaux, et notés  $M$  :

$$M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$$

Ce coefficient  $M$ , positif ou négatif, est appelé **coefficient d'inductance mutuelle** des deux circuits. Schématiquement, on représente alors cette interaction de la sorte :



### Couplage parfait de deux circuits

Le coefficient d'inductance mutuelle  $M$  vérifie toujours <sup>a</sup> l'inégalité suivante :

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

On dit que les deux circuits sont **parfaitement couplés** dans le cas d'égalité :  $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$ . Cela signifie physiquement que les flux magnétiques de chaque circuit sont maximisés.

<sup>a</sup>. Démonstration en TD.

#### 4.1.2 Équations électriques

À partir de cette partie, on supposera les circuits fixes l'un par rapport à l'autre.

**Question 3** : Quel est le flux magnétique total  $\Phi_1$  capté par le circuit  $C_1$  ? L'exprimer en fonction notamment de  $L_1$ , inductance propre du circuit  $C_1$ , et de  $M$ .

**Question 4 :** En déduire la force électromotrice  $e_{\text{ind},1}$  induite dans le circuit  $C_1$ . Par analogie, faire le même travail pour la force électromotrice  $e_{\text{ind},2}$  induite dans le circuit  $C_2$  d'inductance propre  $L_2$ .

**Question 5 :** On suppose que le circuit  $C_1$  est composé d'un générateur de fém  $E$  et de résistance totale  $R_1$  ; le circuit  $C_2$  n'est qu'un récepteur de résistance totale  $R_2$ . Faire un schéma électrique du problème, et en déduire des expressions de  $e_{\text{ind},1}$  et  $e_{\text{ind},2}$  par la loi des mailles.

**Question 6 :** En déduire un système d'équations différentielles portant sur  $i_1$  et  $i_2$ .

### 4.1.3 Étude énergétique

#### Détermination de l'équation énergétique en électrocinétique

Afin d'aborder d'un point de vue énergétique un problème d'électrocinétique, il faut multiplier l'équation électrique (issue de la loi des mailles) par l'intensité du courant.

**Question 7 :** Multiplier l'équation électrique du circuit  $C_1$  par  $i_1$ , puis celle du circuit  $C_2$  par  $i_2$ . Retrouver la puissance fournie par le générateur, les puissances dissipées par effet Joule et les puissances emmagasinées par les inductances propres des circuits.

**Question 8 :** Sommer les deux équations, et déterminer l'expression de la puissance emmagasinée par l'induction mutuelle entre les deux circuits. En déduire une énergie électrique de mutuelle induction.

#### Énergie électrique de mutuelle induction

Soient deux circuits respectivement parcourus par un courant  $i_1$  et un courant  $i_2$ . Ces deux circuits sont magnétiquement couplés, et on note  $M$  le coefficient de mutuelle induction. L'énergie  $\mathcal{E}_M$  emmagasinée par cette mutuelle induction est :

$$\mathcal{E}_M = M \times i_1 \times i_2$$

## 4.2 Applications

### 4.2.1 Détection ampèremétrique



La pince ampèremétrique, aussi appelée capteur de courant sans contact, est un type d'ampèremètre permettant de mesurer l'intensité du courant électrique circulant dans un fil conducteur sans avoir à ouvrir le circuit pour y placer un ampèremètre classique (voir figure 4.1).

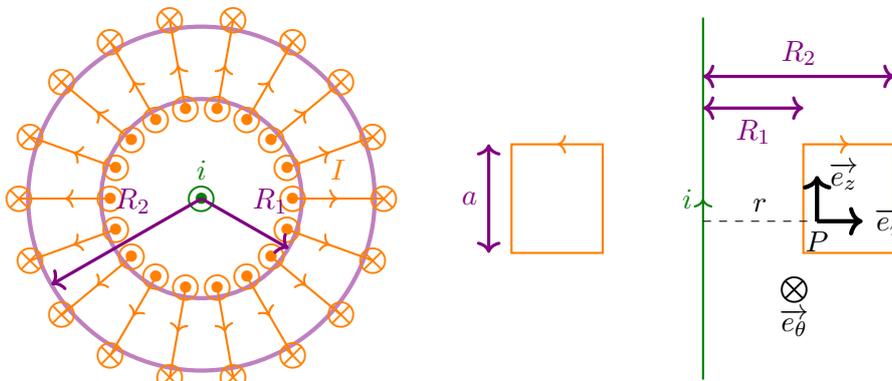
Le fonctionnement de la pince ampèremétrique se base sur la mesure indirecte du courant circulant dans un conducteur à partir du champ magnétique ou du champ électrique que génère cette circulation de courant.

En effet, la tension induite dans la pince ampèremétrique est proportionnelle à la dérivée du flux magnétique du fil d'étude, lui même proportionnel à l'intensité électrique du courant parcourant le fil. Ainsi, via quelques opérations mathématiques, on peut aisément remonter à la valeur du courant.

FIGURE 4.1 – Pince ampèremétrique. Par Pano38 — Travail personnel, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=47203181>

Soit un fil d'axe  $(O, z)$  (orienté vers le haut) dans lequel circule un courant  $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$  orienté selon  $\vec{e}_z$ . Le but est de déterminer la valeur de  $i_0$ .

On place autour de ce fil un tore à section rectangulaire de rayon intérieur  $R_1$ , de rayon extérieur  $R_2$  et de hauteur  $a$ ; l'axe du tore est également  $(O, z)$ . Le tore possède un total de  $N$  spires jointives, parcourues par un courant  $I(t)$  **induit** par le fil.



On rappelle que le champ créé par le fil s'écrit  $\vec{B}_{\text{fil}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\theta$ , et que celui créé par le tore en son sein est  $\vec{B}_{\text{tore}} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\theta$ .

**Question 9 :** On note  $\vec{B}$  le champ magnétique total au sein du tore. Exprimer le flux  $\varphi_B$  de  $\vec{B}$  à travers une spire du tore.

**Question 10 :** En déduire le flux total  $\Phi_B$  dans le bobinage. Montrer que l'on peut l'écrire  $\Phi_B = M \times i + L_{\text{bobinage}} \times I$  avec  $M$  et  $L$  à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

**Question 11 :** On suppose que le bobinage possède une résistance  $\mathcal{R}$ . Montrer, par la loi des mailles sur le bobinage, que l'on a  $L_{\text{bobinage}} \frac{dI}{dt} + \mathcal{R}I = -M \frac{di}{dt}$ . Comment peut-on déterminer  $i_0$  ?

### 4.2.2 Chauffage inductif

Si un conducteur **non filiforme** est soumis à un champ magnétique variable, il va être le siège de courants électriques **volumiques** qui, par effet Joule, vont avoir tendance à l'échauffer. On appelle ces courants volumiques **courants de Foucault** : ce sont ces courants qui permettent le chauffage par induction.

Cet échauffement n'est pas forcément souhaitable : il s'agit d'une perte énergétique considérable pour un transformateur électrique par exemple ! On les évite en feuilletant le matériau conducteur, c'est-à-dire en empilant des tôles de conducteur séparées par une fine couche de vernis isolant (voir figure 4.2).

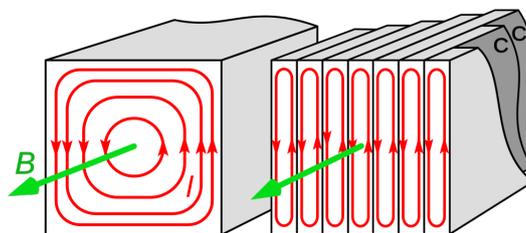


FIGURE 4.2 – Feuilletage d'un noyau d'acier pour limiter les courants de Foucault. *C* désigne le vernis (*coating*, en anglais). Par Chetvorno — Travail personnel, CC0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=46764443>

### 4.2.3 Fonctionnement d'un alternateur

Un alternateur est un dispositif permettant de convertir de l'énergie mécanique en énergie électrique sous forme de courant alternatif.

En pratique, on utilise souvent un aimant dont l'axe nord-sud tourne à une fréquence angulaire  $\omega$ . Si l'on place une spire conductrice près de cet aimant permanent, le flux magnétique  $\Phi_B$  à travers la spire va alors être sinusoïdal de période  $T \triangleq \frac{2\pi}{\omega}$ .

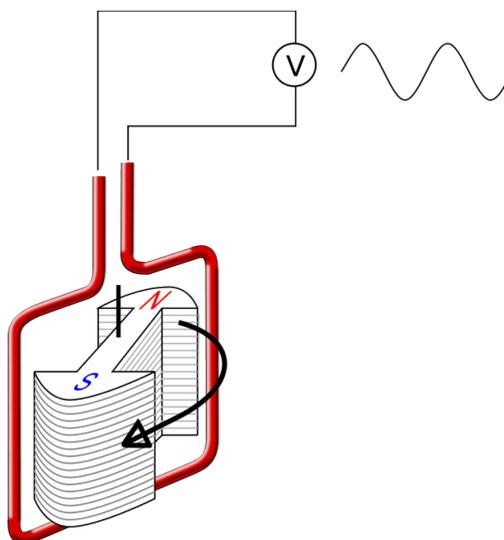


FIGURE 4.3 – Schéma d'un alternateur simple composé d'un noyau magnétique tournant (le rotor) et d'une spire immobile (le stator). La flèche noire représente la rotation du noyau magnétique. By Egmason - Own work, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=10250453>

Par la loi de Faraday, on en déduit qu'une fém sinusoïdale sera induite dans le circuit, et donc un courant sinusoïdal par la loi d'Ohm.

## Questions de cours

**À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...**

- Soient deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  parcourus respectivement par des courants  $i_1$  et  $i_2$ , qui créent des champs magnétiques  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ .

Donner les expressions des flux mutuels en fonction du coefficient d'inductance mutuelle  $M$  et des courants. Quelle inégalité peut-on établir entre  $M$ ,  $L_1$  (inductance propre de  $C_1$ ) et  $L_2$  (inductance propre de  $C_2$ ) ? Quand arrive le cas d'égalité ?

- Expliquer le principe du chauffage inductif.
- Expliquer le principe d'une détection ampèremétrique.
- Expliquer le fonctionnement d'un alternateur.

# Chapitre 5 : Électromécanique

## 📌 Objectifs :

- Interpréter qualitativement les phénomènes observés dans le cas du rail de Laplace.
- Établir des équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe.
- Établir et interpréter la relation entre la puissance de la force de Laplace et la puissance électrique.
- Effectuer un bilan énergétique.
- Expliquer le fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique.
- Effectuer une étude en régime sinusoïdal forcé du haut-parleur électrodynamique.

✍ **Au concours ATS** : Aux écrits en 2023, 2019. Tombe parfois aux oraux.

## 5.1 Rail de Laplace

### 5.1.1 Position du problème

Considérons un circuit fermé constitué d'un câble conducteur fixe et d'une baguette conductrice et rectiligne de masse  $m$  pouvant se mouvoir librement selon la direction  $x$ . On note  $R$  la résistance totale du circuit, considérée comme constante au cours de l'expérience.

Le circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme et statique  $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_z$ , où  $z$  représente la direction perpendiculaire au circuit et  $B_0 > 0$ .

$x(t)$  désignera la position de la baguette au cours du temps selon l'axe  $(O, x)$ , et  $v(t) \triangleq \dot{x}(t)$  sa vitesse. La dimension du circuit selon la direction  $y$  sera notée  $a$ . Le circuit étant posé sur une surface horizontale, le poids sera compensé par la réaction du support.

Tout phénomène d'auto-induction sera négligé.

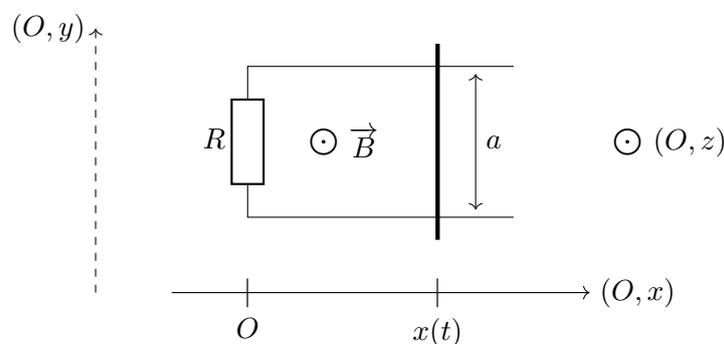


FIGURE 5.1 – Rail de Laplace vu de dessus.

### 5.1.2 Équations électrique et mécanique

**Question 1** : Citer l'ensemble des phénomènes électriques et mécaniques qui se produisent.

**Question 2** : Que permet de prédire la loi de Lenz quant au mouvement de la baguette ?

**Question 3** : Recopier le circuit électrique correspondant au rail de Laplace ; orienter le circuit en choisissant un sens pour la fém induite  $e_{\text{ind}}$  aux bornes de la baguette. En déduire le sens pour l'intensité  $i$  le parcourant. Préciser le sens de l'axe  $(O, y)$ .

**Question 4** : Exprimer  $e_{\text{ind}}$  en fonction de notamment  $B_0$  et  $v$ .

**Question 5 :** En déduire l'expression de  $i$  par la loi des mailles. Que peut-on dire du champ magnétique créé par  $i$  ?

**Question 6 :** Exprimer la force de Laplace  $\vec{F}_L$  subie par la baguette. Est-elle en accord avec la loi de Lenz ?

**Question 7 :** En utilisant le PFD, déterminer alors l'équation du mouvement de la baguette.

**Question 8 :** En injectant l'expression de  $i$  issue de la loi des mailles dans celle de l'équation du mouvement, montrer que l'on a  $\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = 0$ . Donner l'expression de  $\tau$ .

**Question 9** : Résoudre l'équation différentielle en utilisant la condition initiale  $\vec{v}(t=0) = v_0 \cdot \vec{e}_x$ . En déduire l'expression de  $i(t)$ .

### 5.1.3 Conversion électromécanique de puissance

**Question 10** : Rappeler les expressions de  $F_L$  et de  $e_{\text{ind}}$  en fonction de  $B_0$ ,  $a$ ,  $v$  et  $i$ . Multiplier la première expression par  $v$ ; la deuxième par  $i$ . Qu'observe-t-on ?

#### Conversion électromécanique de puissance

Lorsqu'un circuit est en mouvement dans un champ magnétique, il se produit deux phénomènes simultanés : le circuit reçoit une puissance mécanique  $\mathcal{P}_L$  de la force de Laplace, et une puissance électrique  $\mathcal{P}_{\text{ind}}$  de la fém induite.

Ces puissances sont liées par la loi de conversion électromécanique :

$$\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_{\text{ind}} = 0$$

avec  $\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v}_{\text{circuit}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{ind}} = e_{\text{ind}} \times i_{\text{circuit}}$ .

## 5.2 Haut-parleur électrodynamique

### 5.2.1 Position du problème

On considère un haut-parleur électrodynamique (figure 5.2) constitué d'un aimant permanent (A) possédant une symétrie de révolution autour de l'axe  $(O, z)$ .

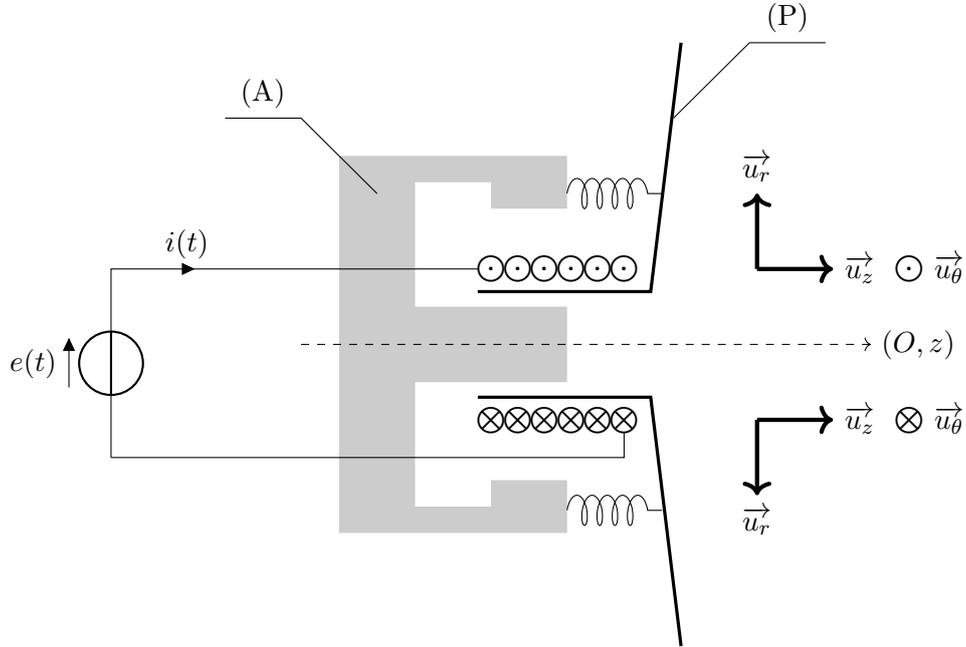


FIGURE 5.2 – Schéma en coupe d'un haut-parleur électrodynamique.

Dans l'entrefer de l'aimant (zone entre le centre et l'extrémité) règne un champ magnétique radial et uniforme  $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_r$ . Le pavillon (P), solidaire du bobinage, se déplace alors selon l'axe  $(O, z)$  : on note  $z \cdot \vec{u}_z$  la position de son centre de masse. On note  $m$  la masse du pavillon et du bobinage.

Sur le pavillon s'exerce donc une force de Laplace  $\vec{F}_L = \int_{\text{bobinage}} i d\ell \cdot \vec{u}_\theta \wedge B_0 \cdot \vec{u}_r = -i B_0 \ell \cdot \vec{u}_z$  avec  $\ell$  la longueur totale du bobinage. Le pavillon est également relié à l'aimant par des liaisons élastiques pouvant se résumer sous la forme  $-kz \cdot \vec{u}_z$  ( $z = 0$  représente donc la position d'équilibre du pavillon).

On en déduit, en prenant en compte une force dissipative  $-h\dot{z} \cdot \vec{u}_z$  assimilable aux phénomènes de frottements fluides et à la puissance dissipée sous forme d'ondes sonores, que l'équation du mouvement est :

$$m\ddot{z} = -h\dot{z} - kz - B_0 \ell i$$

Le bobinage est assimilable à une inductance  $L$  en série avec une résistance  $R$  ; il est alimenté par une tension  $e(t)$ . On **admet** que la tension induite  $e_{\text{ind}}$  peut alors s'écrire sous la forme :  $e_{\text{ind}} = B_0 \dot{z} \ell$  (la loi de Faraday, toujours valable ici, est trop complexe à mettre en œuvre au vu de la géométrie du système). On peut alors résumer le fonctionnement électrique du haut-parleur sous la forme du schéma électrique (figure 5.3) :

L'équation électrique provenant de la loi des mailles est alors :

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} - B_0 \dot{z} \ell$$

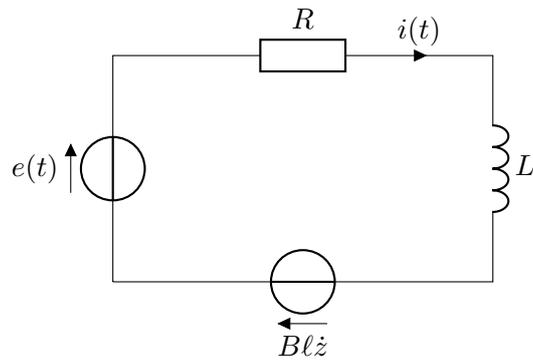


FIGURE 5.3 – Schéma électrique correspondant au haut-parleur.

### 5.2.2 Étude énergétique

**Question 11** : Déterminer les équations mécanique et électrique en puissance. Montrer que l'on a alors une équation du type  $\frac{d\mathcal{U}}{dt} = e(t) \times i(t) - Ri^2 - hv^2$  avec  $v \triangleq \dot{z}$ . Quel est le sens physique de  $\mathcal{U}(t)$  ?

### 5.2.3 Étude en régime sinusoïdal forcé

On se place en régime sinusoïdal forcé :  $e(t) = E \cos(\omega t)$ . On cherche donc toutes les grandeurs  $g(t)$  sous la forme complexe  $\underline{g}(t) = \underline{g}_0 e^{j\omega t}$ .

**Question 12 :** Exprimer  $\underline{\dot{z}}(t)$  et  $\underline{z}(t)$  en fonction de  $\underline{v}_0$  et  $\omega$ , où  $\underline{v}_0$  est défini par  $\underline{\dot{z}}(t) = \underline{v}(t) = \underline{v}_0 e^{j\omega t}$ .

**Question 13 :** Établir deux expressions liant  $\underline{i}_0$  et  $\underline{v}_0$ .

**Question 14 :** En déduire alors l'expression de  $\underline{v}_0$  en fonction des paramètres du problème.

On admet que le niveau sonore  $L_{dB}$  perçue par l'oreille humaine peut s'écrire  $L_{dB} = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$  où  $I \approx 435 \times v_0^2$  est l'intensité acoustique de l'onde sonore et  $I_0 = 1 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$  est l'intensité acoustique minimale que l'oreille humaine puisse entendre.

On trace alors en figure 5.4 l'allure de  $L_{dB}$  en fonction de  $\omega$  (l'échelle des abscisses est logarithmique).

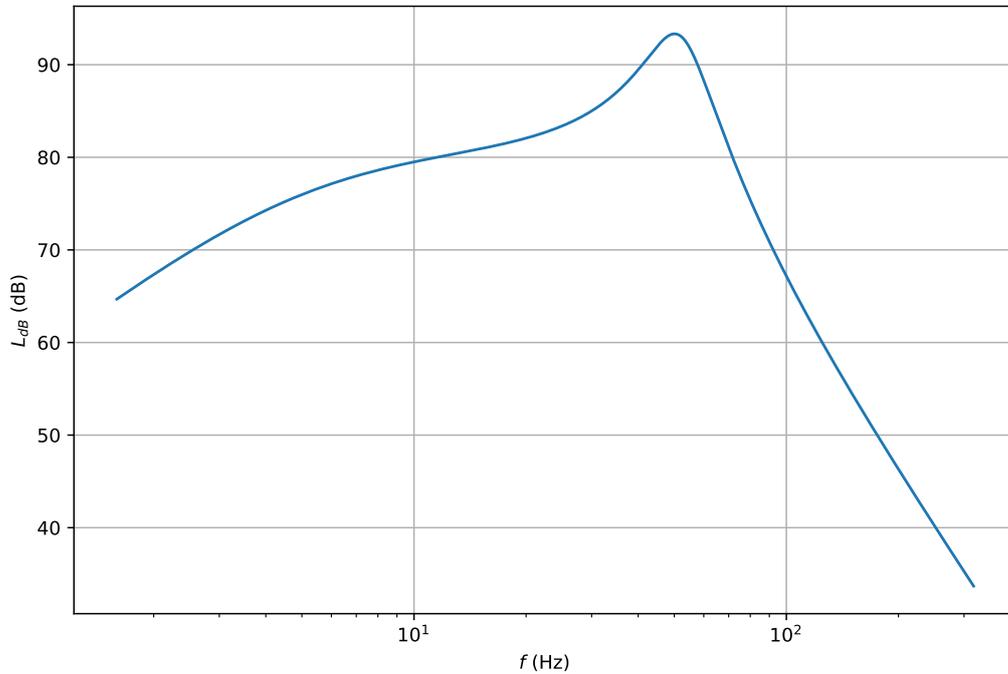


FIGURE 5.4 – Évolution du niveau sonore en fonction de la fréquence d'excitation.

**Question 15 :** Déterminer la fréquence de résonance du haut-parleur.

**Question 16 :** Sachant que les fréquences audibles sont comprises entre 20 Hz et 20 kHz, et au vu de la figure 5.5, dans quelle gamme de fréquences ce haut-parleur est-il efficace ?

## L'ÉCHELLE DE NIVEAU DE BRUIT

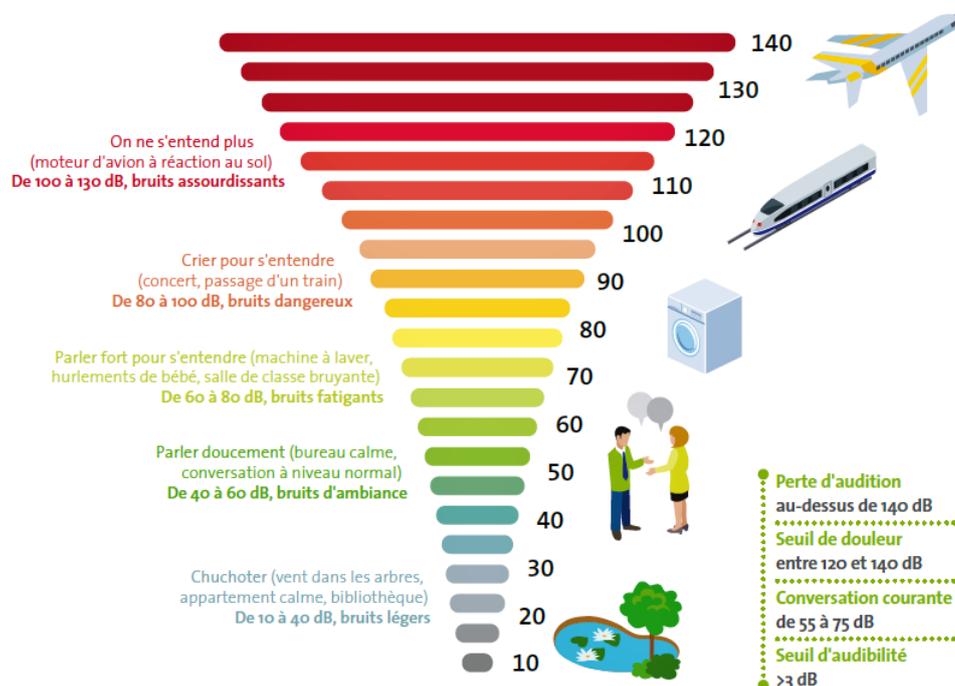


FIGURE 5.5 – Échelle de niveau sonore. Source : France Environnement.

## Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- Comment déterminer une équation énergétique à partir de l'équation du mouvement ? Comment déterminer une équation énergétique à partir de la loi des mailles ? Comment en déduire alors l'équation énergétique totale pour un problème d'électromécanique ?
- Par quelle équation retranscrit-on la conversion électromécanique de puissance ? Expliciter tous les termes. Pourquoi peut-on estimer qu'elle est « parfaite » ?
- Établir l'équation du mouvement pour la baguette dans le problème du rail de Laplace.