1 Aspect global du champ magnétique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Définition du champ magnétostatique

Soient deux conducteurs filiformes (1) et (2), respectivement parcourus par des courants constants I_1 et I_2. Le conducteur (1) crée un **champ magnétostatique** total $\overrightarrow{B_1}$, qui crée une force élémentaire magnétostatique $\mathrm{d}\overrightarrow{F^m_{1\to 2}}$ sur chaque portion infinitésimale $\mathrm{d}\overrightarrow{\ell_2}$ (orienté dans le sens de I_2) du conducteur (2) : $\mathrm{d}\overrightarrow{F^m_{1\to 2}} = I_2\mathrm{d}\overrightarrow{\ell_2} \wedge \overrightarrow{B_1}$.

La résultante macroscopique de ces forces est la **force de Laplace** $\overrightarrow{F^L_{1\to 2}}$ du conducteur (2) sur le conducteur (1) :

$$\boxed{\overrightarrow{F^L_{1\to 2}} = \int_{M\in(2)} I_2\mathrm{d}\overrightarrow{\ell_2(M)} \wedge \overrightarrow{B_1}(M)}$$

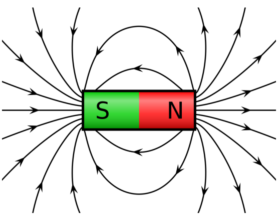
L'unité SI du champ magnétostatique est le tesla T.

☛ Quelques ordres de grandeurs de champs magnétostatiques : au contact d'un aimant permanent : $B_{\text{aimant}} \sim 0{,}1\,\mathrm{T}$ à $1\,\mathrm{T}$; dans un électro-aimant à bobinage : $B_{\text{EA}} \sim 10\,\mathrm{T}$ à $100\,\mathrm{T}$; dans un appareil d'IRM : $B_{\text{IRM}} \sim 1\,\mathrm{T}$; sur Terre : $B_{\text{Terre}} \approx 5\times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

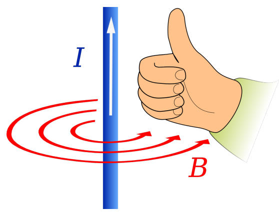
2 Topographie du champ magnétostatique

Lignes de champ

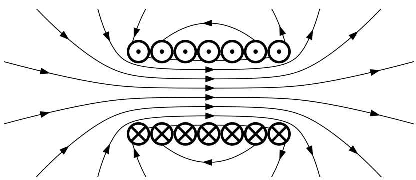
— Pour un aimant droit :



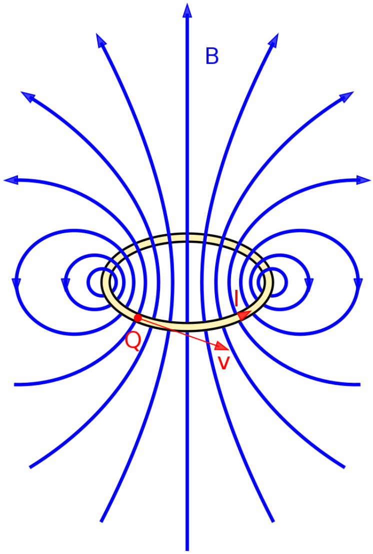
— Pour un fil rectiligne (on observe la règle du tire-bouchon, uniquement valable avec la main droite : le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$ s'enroule autour du courant I) :



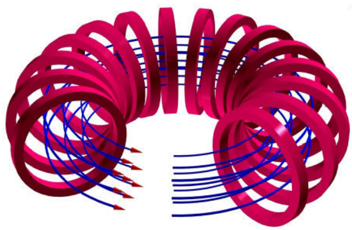
— Pour une bobine longue (ou solénoïde) :



— Pour une spire circulaire :



— Pour un tore :



Symétries et antisymétries

On dit qu'un plan Π est un plan de **symétrie** des courants si, lorsqu'un courant existe d'un côté de ce plan, alors un courant de même sens et de même valeur existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement au premier courant.

On dit qu'un plan Π est un plan d'**antisymétrie** des courants si, lorsqu'un courant existe d'un côté de ce plan, alors un courant **de signe opposé et de même valeur absolue** existe de l'autre côté de ce plan, symétriquement au premier courant.

Soit un point M appartenant à un plan de symétrie Π_+ des courants. Le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ est alors **orthogonal** à ce plan : $\boxed{\overrightarrow{B}(M) \perp \Pi_+}$.

Soit un point M appartenant à un plan d'antisymétrie Π_- des courants. Le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ est alors **contenu** dans ce plan : $\boxed{\overrightarrow{B}(M) \in \Pi_-}$.

3 Flux magnétostatique

Soit $\mathcal{S}$ une surface fermée. Le flux du champ magnétostatique à travers cette surface est nulle :

$$\boxed{\Phi_B^{\mathcal{S}\text{ fermée}} = 0}$$

En d'autres termes, si l'on considère un contour fermé $\mathcal{C}$, alors le flux du champ magnétostatique à travers n'importe quelle surface ouverte s'appuyant sur $\mathcal{C}$ est conservé :

$$\boxed{\Phi_B^{\text{entrant}} = \Phi_B^{\text{sortant}}}$$

♥ Il vient donc que, si le champ entrant B_e est uniforme sur une section d'entrée S_e, et que le champ sortant B_s est uniforme sur une section de sortie S_s, alors : $B_e S_e = B_s S_s$.

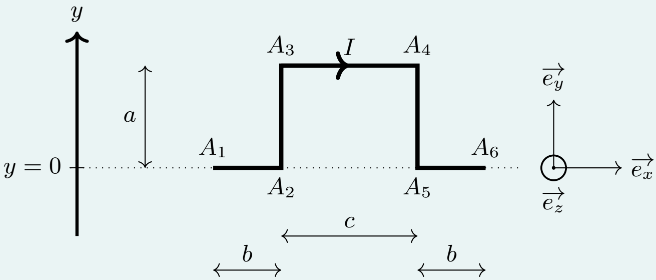
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Force de Laplace exercée sur un câble

Énoncé

Le champ magnétique est de la forme $\overrightarrow{B} = B_0 \dfrac{y}{L} . \overrightarrow{e_z}$. *Exprimer la force de Laplace exercée sur le fil en fonction des données.*



Résolution

On a, par la relation de Chasles pour une intégrale :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F^L} &= \int_{M\in\text{fil}} I\mathrm{d}\overrightarrow{\ell}(M) \wedge \overrightarrow{B}(M)\\ &= \overrightarrow{F^L_{A_1A_2}} + \overrightarrow{F^L_{A_2A_3}} + \overrightarrow{F^L_{A_3A_4}} + \overrightarrow{F^L_{A_4A_5}} + \overrightarrow{F^L_{A_5A_6}}\end{aligned}$$

Calculons chacune de ces intégrales :

- $\overrightarrow{F^L_{A_1A_2}} = \displaystyle\int_{x=0}^{x=b} I\mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} \wedge B_0 \frac{0}{L}.\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{F^L_{A_2A_3}} = \displaystyle\int_{y=0}^{y=a} I\mathrm{d}y.\overrightarrow{e_y} \wedge B_0 \frac{y}{L}.\overrightarrow{e_z} = I\frac{B_0}{L}\int_{y=0}^{y=a} y\ \mathrm{d}y.\overrightarrow{e_x} = IB_0\frac{a^2}{2L}.\overrightarrow{e_x}$;
- $\overrightarrow{F^L_{A_3A_4}} = \displaystyle\int_{x=b}^{x=b+c} I\mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} \wedge B_0 \frac{a}{L}.\overrightarrow{e_z} = IB_0\frac{a}{L}\int_{x=b}^{x=b+c} \mathrm{d}x.\left(-\overrightarrow{e_y}\right) = -IB_0\frac{ab}{L}.\overrightarrow{e_y}$;
- $\overrightarrow{F^L_{A_4A_5}} = \displaystyle\int_{y=a}^{y=0} I\mathrm{d}y.\overrightarrow{e_y} \wedge B_0 \frac{y}{L}.\overrightarrow{e_z} = -\int_{y=0}^{y=a} I\mathrm{d}y.\overrightarrow{e_y} \wedge B_0 \frac{y}{L}.\overrightarrow{e_z} = -\overrightarrow{F^L_{A_2A_3}}$;
- $\overrightarrow{F^L_{A_5A_6}} = \displaystyle\int_{x=b+c}^{x=b+c+b} I\mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} \wedge B_0 \frac{0}{L}.\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0}$.

Nécessairement, on a $\boxed{\overrightarrow{F^L} = -IB_0\dfrac{ab}{L}.\overrightarrow{e_y}}$.

2 Théorème d'Ampère

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Théorème d'Ampère

Le **théorème d'Ampère** affirme que la circulation du champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$ le long d'un contour fermé $\mathcal{C}$ et orienté est proportionnelle aux courants enlacés par ce contour, comptés positivement s'ils sont orienté dans le même sens et négativement sinon :

$$\boxed{\oint_{M \in \mathcal{C}} \overrightarrow{B}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell_M} = \mu_0 \times I_{\text{enlacés par } \mathcal{C}}}$$

où $\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$ est la **perméabilité magnétique du vide**.

Utilité et étapes

L'utilité principale du théorème d'Ampère est de pouvoir exprimer le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ en tout point M, si suffisamment de symétries permettent de simplifier le problème. Pour cela :

1. On recense les invariances dues aux répartitions des courants : on en déduit **les variables** du champ $\overrightarrow{B}$;
2. On choisit un point M dans l'espace, et on identifie les plans de symétrie et/ou d'antisymétrie passant par ce point : on en déduit **la direction** du champ $\overrightarrow{B}(M)$;
3. On choisit un **contour d'Ampère**, que l'on oriente, qui passe par le point M, et le long duquel le champ $\overrightarrow{B}$ est uniforme ;
4. On exprime de façon simple la circulation du champ magnétostatique le long de ce contour d'Ampère ;
5. On compte les courants intérieurs au contour d'Ampère, avec un $+$ si les deux ont la même orientation (selon la règle du tire-bouchon) ou avec un $-$ sinon ;
6. On applique le théorème d'Ampère pour déterminer $B(M)$, puis $\overrightarrow{B}(M)$.

2 Relations de passage pour le champ magnétostatique

Soient deux milieux (1) et (2) séparés par une interface de densité surfacique de courant $\overrightarrow{j_s}$.

$\overrightarrow{B_1}$ représente le champ magnétostatique dans le milieu (1) juste avant l'interface, et $\overrightarrow{B_2}$ le champ magnétostatique dans le milieu (2) juste après l'interface.

Les **relations de passage** pour le champ magnétostatique à travers l'interface sont les suivantes :

- La composante normale du champ magnétostatique est conservée ;
- Les composantes tangentielles du champ magnétostatique ne sont pas conservées.

On peut les résumer vectoriellement *via* la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 . \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{n_{1\to 2}}}$$

où $\overrightarrow{n_{1\to 2}}$ est le vecteur normal à l'interface, orienté du milieu (1) vers le milieu (2).

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

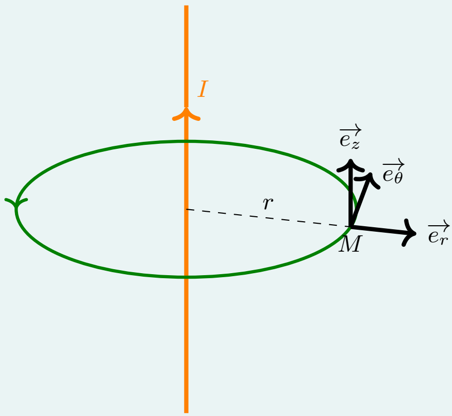
Champ créé par un fil infini

Énoncé

Soit un fil infini d'axe (O, z) parcouru par un courant d'intensité I selon $+\overrightarrow{e_z}$. On note M un point quelconque situé en dehors du fil, et r sa distance par rapport à l'axe du fil.

Déterminer, à l'aide du théorème d'Ampère, l'expression du champ magnétostatique au point M.

Résolution



- On a des invariances selon θ (car axe de révolution) et z (car fil infini), donc $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(r)$.
- Le plans$(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ est de symétrie, donc $\overrightarrow{B}$ y est orthogonal : $\overrightarrow{B} = B.\overrightarrow{e_\theta}$.

  On déduit des deux points précédents que $\overrightarrow{B} = B(r).\overrightarrow{e_\theta}$.
- $B(r) = \text{cste} \Leftrightarrow r = \text{cste}$; on choisit alors comme contour d'Ampère un cercle de rayon r passant par M, orienté positivement selon l'axe (O, z) (et donc dirigé par $+\overrightarrow{e_\theta}$).

- La circulation du champ magnétostatique est :

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} &= \oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} B(r).\overrightarrow{e_\theta} \cdot \mathrm{d}\ell.\overrightarrow{e_\theta} \\ &= B(r) \times \oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \mathrm{d}\ell \text{ car } B(r) \text{ est uniforme sur } \mathcal{C}_{\text{Ampère}} \\ &= B(r) \times 2\pi r\end{aligned}$$

- Le courant enlacé par $\mathcal{C}_{\text{Ampère}}$ est $I_{\text{enlacés}} = +I$, par la règle du tire-bouchon.
- On applique le théorème d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}$.

  On a alors $B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I$, et donc : $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}.\overrightarrow{e_\theta}$.

Exercice résolu

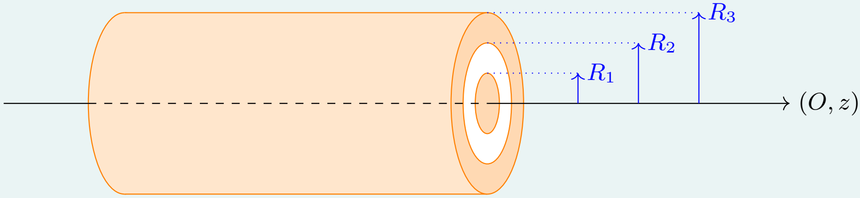
■ À revoir ■ Maîtrisé

Champ créé par un câble coaxial

Énoncé

On considère un câble coaxial, constitué de deux cylindres conducteurs imbriqués l'un dans l'autre, mais n'étant pas en contact. Les deux axes de révolution sont identiques.

Le premier cylindre conducteur, plein, a un rayon R_1. Entre R_1 et R_2 se situe un isolant, puis l'ensemble est entouré par le deuxième conducteur contenu entre les rayons R_2 et R_3.



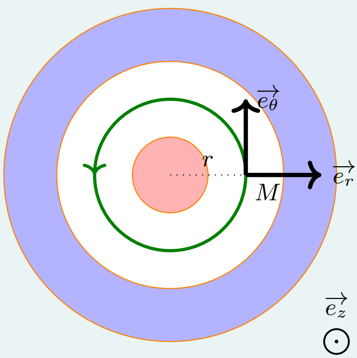
Le conducteur central (« l'âme ») est parcouru par un courant total I orienté dans le même sens que l'axe (O, z). Le conducteur externe est parcouru par un courant total I orienté dans le sens opposé à l'axe (O, z).

On fixe un point M (distance r par rapport à l'axe du câble) quelconque dans l'espace isolant ($R_1 < r < R_2$) ou en dehors du câble coaxial ($r > R_3$).

Déterminer le champ magnétostatique en M.

Résolution

On note en rouge les courants selon $+\overrightarrow{e_z}$ et en bleu ceux selon $-\overrightarrow{e_z}$.



- On a des invariances selon θ (car axe de révolution) et z (car câble infini), donc $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(r)$.
- Le plan $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ est de symétrie, donc $\overrightarrow{B}$ y est orthogonal : $\overrightarrow{B} = B.\overrightarrow{e_\theta}$.
  On déduit des deux points précédents que $\overrightarrow{B} = B(r).\overrightarrow{e_\theta}$.
- $B(r) =$ cste $\Leftrightarrow r =$ cste ; on choisit alors comme contour d'Ampère un cercle de rayon r passant par M, orienté positivement selon l'axe (O, z) (et donc dirigé par $+\overrightarrow{e_\theta}$).

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

- La circulation du champ magnétostatique est :

$$\oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} B(r).\overrightarrow{e_\theta} \cdot \mathrm{d}\ell.\overrightarrow{e_\theta}$$

$$= B(r) \times \oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \mathrm{d}\ell \text{ car } B(r) \text{ est uniforme sur } \mathcal{C}_{\text{Ampère}}$$

$$= B(r) \times 2\pi r$$

- Le courant enlacé par $\mathcal{C}_{\text{Ampère}}$ dépend de la valeur de r :
  - Si $R_1 < r < R_2$, alors $I_{\text{enlacés}} = +I$.
  - Si $r > R_3$, alors $I_{\text{enlacés}} = +I - I = 0$: le courant central I est compensé par le courant externe $-I$.

- On applique le théorème d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}$.
  - Si $R_1 < r < R_2$, alors $B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I$, et donc : $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}.\overrightarrow{e_\theta}$.
  - Si $r < R_3$, alors $B(r) \times 2\pi r = 0$, et donc : $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.

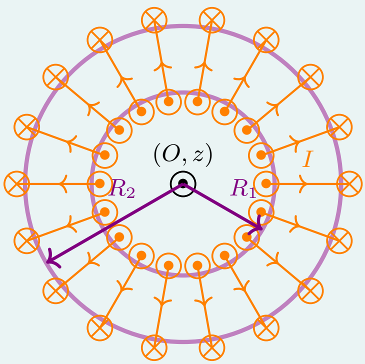
Exercice résolu

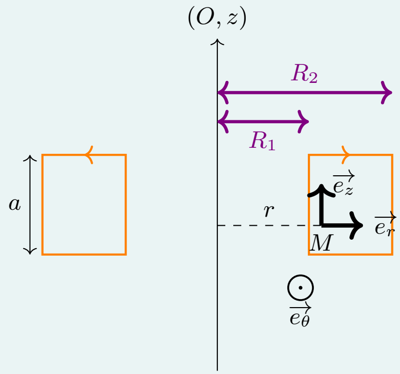
■ À revoir ■ Maîtrisé

Champ créé par un tore

Énoncé

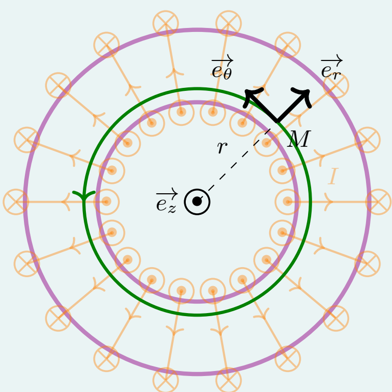
On considère un tore à section rectangulaire de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2 et de hauteur a. Un fil conducteur est bobiné autour de ce tore, de telle façon que l'on a N tours de fil (assimilés à des spires jointives) le long du tore. On note I le courant parcourant le conducteur.





On fixe un point M (distance r par rapport à l'axe du tore) quelconque à l'altitude du tore. Déterminer le champ magnétostatique en M.

Résolution



- On a une invariance selon θ (car axe de révolution) donc $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(r, z)$.
- Le plan $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ est de symétrie, donc $\overrightarrow{B}$ y est orthogonal : $\overrightarrow{B} = B.\overrightarrow{e_\theta}$.

  On déduit des deux points précédents que $\overrightarrow{B} = B(r, z).\overrightarrow{e_\theta}$.
- $B(r, z) =$ cste $\Leftrightarrow r =$ cste et $z =$ cste' ; on choisit alors comme contour d'Ampère un cercle de rayon r passant par M, orienté positivement selon l'axe (O, z) (et donc dirigé par $+\overrightarrow{e_\theta}$).

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

- La circulation du champ magnétostatique est :

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{\ell} &= \oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} B(r,z).\overrightarrow{e_\theta} \cdot \mathrm{d}\ell.\overrightarrow{e_\theta} \\ &= B(r,z) \times \oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \mathrm{d}\ell \text{ car } B(r) \text{ est uniforme sur } \mathcal{C}_{\text{Ampère}} \\ &= B(r,z) \times 2\pi r\end{aligned}$$

- Le courant enlacé par $\mathcal{C}_{\text{Ampère}}$ dépend de la valeur de r :
  - Si $0 < r < R_1$, alors $I_{\text{enlacés}} = 0$.
  - Si $R_1 < r < R_2$, alors $I_{\text{enlacés}} = +NI$ (on enlace N fils parcourus par $+I$ en $r = R_1$).
  - Si $r > R_2$, alors $I_{\text{enlacés}} = +NI - NI = 0$ (on enlace N fils parcourus par $+I$ en $r = R_1$ et N fils parcourus par $-I$ en $r = R_2$).
- On applique le théorème d'Ampère : $\oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}$.
  - Si $0 < r < R_1$, alors $B(r,z) \times 2\pi r = 0$, et donc : $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.
  - Si $R_1 < r < R_2$, alors $B(r,z) \times 2\pi r = \mu_0 NI$, et donc : $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}.\overrightarrow{e_\theta}$.
  - Si $r > R_2$, alors $B(r) \times 2\pi r = 0$, et donc : $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Champ créé par un solénoïde infini

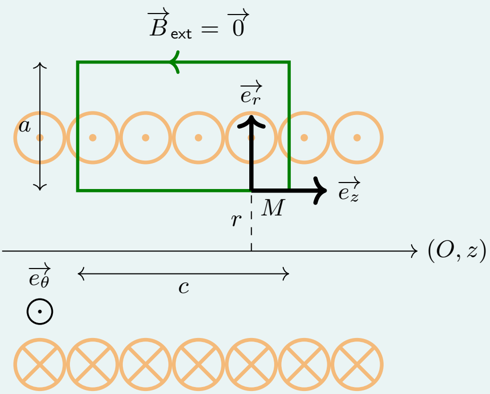
Énoncé

On considère un solénoïde d'axe (O,z), de rayon R et de longueur $L \ll R$. Il y a au total N spires jointives ; on note $n \triangleq \dfrac{N}{L}$ la densité de spires par unité de longueur. Un courant I circule dans les spires.

*On **admet** que le champ magnétostatique <u>au-dehors du solénoïde</u> est **nul**.*

On fixe un point M (distance r par rapport à l'axe du solénoïde) quelconque dans l'espace intérieur au solénoïde. Déterminer le champ magnétostatique en M.

Résolution



- On a des invariances selon θ (car axe de révolution) et z (car solénoïde infini), donc $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(r)$.

- Le plan $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ est de symétrie, donc $\overrightarrow{B}$ y est orthogonal : $\overrightarrow{B} = B.\overrightarrow{e_z}$.

  On déduit des deux points précédents que $\overrightarrow{B} = B(r).\overrightarrow{e_z}$.

- $B(r) = \text{cste} \Leftrightarrow r = \text{cste}$; on choisit alors comme contour d'Ampère un rectangle parallèle à l'axe (O,z) et passant M, orienté positivement selon le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$.

- La circulation du champ magnétostatique est :

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} &= \int_{\text{bas}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} + \overbrace{\int_{\text{droite}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}}^{=0 \text{ car } B.\overrightarrow{e_z} \perp \mathrm{d}r.\overrightarrow{e_r}} + \overbrace{\int_{\text{haut}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}}^{=0 \text{ car } \overrightarrow{B}_{\text{ext}} = \overrightarrow{0}} + \overbrace{\int_{\text{gauche}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell}}^{=0 \text{ car } B.\overrightarrow{e_z} \perp \mathrm{d}r.\overrightarrow{e_r}} \\
&= \int_{\text{bas}} B(r).\overrightarrow{e_z} \cdot \mathrm{d}\ell.\overrightarrow{e_z} \\
&= B(r) \times \int_{\text{bas}} \mathrm{d}\ell \\
&= B(r) \times c
\end{aligned}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

- Le courant enlacé par $\mathcal{C}_{\text{Ampère}}$ vaut $p \times (+I)$ avec p le nombre de spires enlacées par le contour d'Ampère. On sait que la densité de spire est n ; on en déduit que le nombre de spires enlacées est $p = n \times c$. Il vient donc que $I_{\text{enlacés}} = +ncI$.
- On applique le théorème d'Ampère : $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}_{\text{Ampère}}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}$.

  On a alors $B(r) \times \cancel{c} = \mu_0 n \cancel{c} I$, et donc $\overrightarrow{B} = \mu_0 n I . \overrightarrow{e_z}$.

3 Bobines et inductance propre

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Phénomène d'induction

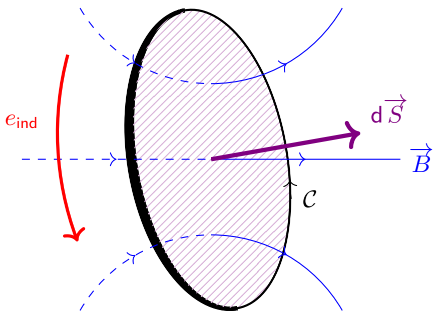
Soit un contour fermé $\mathcal{C}$ **orienté** et constitué d'un matériau conducteur, et $\mathcal{S}$ une surface quelconque « s'appuyant » sur $\mathcal{C}$ et **orientée dans le même sens** que $\mathcal{C}$ ($\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ est donc orienté selon $\mathcal{C}$ selon la règle du tire-bouchon).

Notons $\Phi_B \triangleq \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$ le flux du champ magnétique à travers la surface $\mathcal{S}$.

Si le flux magnétique varie au cours du temps, une force électromotrice e_{ind} est induite dans le circuit fermé, orientée de la même manière que $\mathcal{C}$, selon la **loi de Faraday** :

$$\boxed{e_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}}$$

De cette tension induite découle un courant i orienté dans le même sens que $\mathcal{C}$ et e_{ind}.



♥ Deux grands cas ont lieu pour provoquer de l'induction. Le circuit peut être fixe dans un champ magnétique qui varie dans le temps : $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}(t)$, ou bien le circuit peut se déplacer et se déformer dans un champ magnétique constante : $d\overrightarrow{S} = d\overrightarrow{S}(t)$.

De par le signe négatif présent dans la loi de Faraday, une augmentation du flux magnétique induit une force électromotrice négative, et donc un courant négatif, qui créera un champ magnétique s'opposant au champ initial.

Cette loi qualitative de modération s'énonce souvent ainsi : « *Les courants induits tendent, par leurs conséquences, à s'opposer à la cause qui leur a donné naissance* » ; c'est la **loi** de modération **de Lenz**.

Aspect local, équation de Maxwell-Faraday

Localement, la loi de Faraday correspond au fait que le rotationnel du champ électrique dépend des variations temporelles du champ magnétique selon l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

En <u>statique</u>, on avait $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$: les phénomènes d'induction ne peuvent exister.

2 Auto-induction

Un circuit peut créer un champ magnétique induisant en lui-même des courants électriques : c'est le phénomène d'**auto-induction**. Si l'on note Φ_{propre} le **flux** magnétique **propre** au circuit à travers lui-même, et i l'intensité le parcourant, on s'aperçoit que les deux grandeurs sont proportionnelles :

$$\boxed{\Phi_{\text{propre}} = L \times i}$$

où L est le coefficient d'**inductance propre** du circuit, qui s'exprime en henry H et ne dépend que de la géométrie du circuit.

3 Modélisation d'une bobine

Une bobine est un dipôle constitué d'un enroulement de fils (des spires) autour d'un même axe. Son symbole, en électrocinétique, est le suivant :

La tension u aux bornes d'une bobine est proportionnelle à la dérivée temporelle de l'intensité i la traversant. En convention récepteur (u et i en sens opposés), on a donc :

$$\boxed{u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

En pratique, les inductances varient typiquement entre $10\,\mathrm{mH}$ et $100\,\mathrm{mH}$.

L'**énergie $\mathcal{E}_L$ stockée dans une bobine** d'inductance L traversée par un courant i est :

$$\boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2}$$

On en déduit que *le courant* parcourant une bobine ne peut pas subir de discontinuité au cours du temps.

Densité volumique d'énergie magnétique

Soit un champ magnétique $\vec{B}$ régnant dans l'espace. On associe à ce champ magnétique une densité volumique u_m d'énergie magnétique (en $\mathrm{J/m^3}$) :

$$\boxed{u_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}}$$

L'énergie électrique totale contenue dans l'espace est donc $\mathcal{E}_m = \iiint u_m \mathrm{d}V$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Bilan de puissance et d'énergie dans un système bobine réelle-générateur

Énoncé

Soit un solénoïde « infini de longueur ℓ » possédant $n \triangleq \dfrac{N}{\ell}$ spires par unité de longueur et parcouru par un courant total i. Le rayon du solénoïde sera noté r, et (O,z) représente l'axe de révolution du solénoïde. On note $\overrightarrow{B} = \mu_0 ni.\overrightarrow{u_z}$ le champ magnétique total créé au sein de cette bobine.

Données : $r = 3\,\text{cm}$; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{H}$; $n = 20\,\text{spires/cm}$; $\ell = 50\,\text{cm}$.

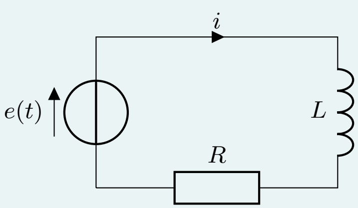
1. *Évaluer la valeur de l'inductance propre L du solénoïde.*
2. *Le bobinage entraîne une résistance électrique totale R pour le circuit. On l'alimente par une source de tension idéale $e(t)$. Représenter le schéma électrique équivalent.*
3. *Par un bilan d'énergie et de puissance, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.*

Résolution

1. Le flux du champ magnétique à travers une spire vaut $\varphi_B = \mu_0 ni \times \pi r^2$ car le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde. Le flux magnétique total est donc $\Phi_B = N \times \varphi_B = \dfrac{\pi\mu_0 N^2 r^2}{\ell} \times i$.

   Or $\Phi_B = L \times i$ donc $L = \dfrac{\pi\mu_0 N^2 r^2}{\ell}$.

   Application numérique, avec $N = n \times \ell = 1000\,\text{spires}$: $\boxed{L = 7{,}1\,\text{mH}}$.

2. 

3. Effectuons un bilan énergétique sur la bobine, d'énergie magnétique $\mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2}Li^2$. Ce système reçoit une puissance $\mathcal{P}_{\text{géné}} = e(t) \times i(t)$ de la part du générateur, mais en cède une par effet Joule : $\mathcal{P}_J = -Ri^2$.

   Il vient donc que $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{géné}} + \mathcal{P}_J$, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{2}L \times 2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = e \times i - Ri^2$$

   En divisant par i, on a donc :

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e(t)}$$

4 Induction mutuelle

■ À revoir ■ Maîtrisé

Soient deux circuits C_1 et C_2 parcourus respectivement par des courants i_1 et i_2, qui créent des champs magnétiques $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$.

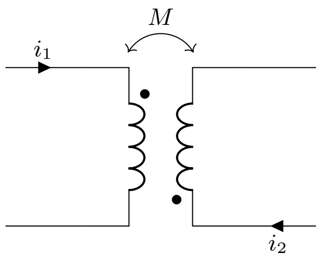
Si l'on note $\Phi_{2\to1}$ le flux de $\overrightarrow{B_2}$ à travers C_1, on peut montrer qu'il y a proportionnalité entre $\Phi_{2\to1}$ et i_2 :

$$\boxed{\Phi_{2\to1} = M \times i_2}$$

De même, si l'on note $\Phi_{1\to2}$ le flux de $\overrightarrow{B_1}$ à travers C_2, on peut montrer qu'il y a proportionnalité entre $\Phi_{1\to2}$ et i_1 :

$$\boxed{\Phi_{1\to2} = M \times i_1}$$

Ce coefficient M, positif ou négatif, est appelé **coefficient d'inductance mutuelle** des deux circuits. Schématiquement, on représente alors cette interaction de la sorte :



Le coefficient d'inductance mutuelle M vérifie toujours l'inégalité suivante :

$$\boxed{M^2 \leq L_1 L_2}$$

On dit que les deux circuits sont **parfaitement couplés** dans le cas d'égalité : $\boxed{|M| = \sqrt{L_1 L_2}}$. Cela signifie physiquement que les flux magnétiques de chaque circuit sont maximisés.

L'énergie $\mathcal{E}_M$ emmagasinée par cette mutuelle induction est :

$$\boxed{\mathcal{E}_M = M \times i_1 \times i_2}$$

Exercice résolu

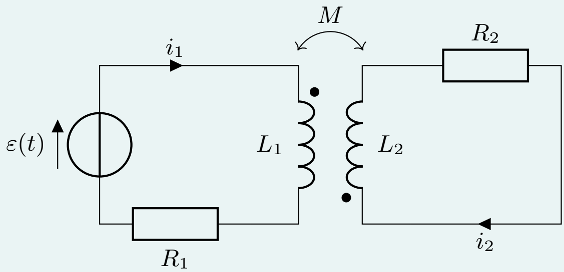
■ À revoir ■ Maîtrisé

Équations électriques de deux circuits magnétiquement couplés

Énoncé

Soient deux circuits C_1 et C_2 fixes l'un par rapport à l'autre. Pour chacun des circuits C_k ($k = 1$ ou 2), on note $i_k(t)$ l'intensité du courant le parcourant, L_k l'inductance propre et R_k la résistance totale.

On suppose les circuits magnétiquement couplés, de coefficient d'inductance mutuelle M. Par ailleurs, le circuit C_1 est alimenté par un générateur de tension $\varepsilon(t)$.



Déterminer le système d'équations régissant $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Résolution

- Le flux magnétique Φ_2 capté par C_2 est égal à $\Phi_2 = Mi_1$. La fém induite dans C_2 est donc $e_2 = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mi_1) = -M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$.
  Si l'on applique la loi des mailles dans C_2 (en comptant dans le sens horaire indiqué par i_2), on a donc $e_2 - R_2 i_2 - L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0$, c'est-à-dire $\boxed{L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_2 i_2 = -M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$.
- Dans le circuit C_1, on a de même $e_1 = -M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$. La loi des mailles dans C_1 (sens horaire indiqué par i_1) donne donc $\varepsilon(t) + e_2 - R_1 i_1 - L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + e_1 = 0$. On en déduit que $\boxed{L_1\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 = \varepsilon(t) - M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}}$.

Exercice résolu

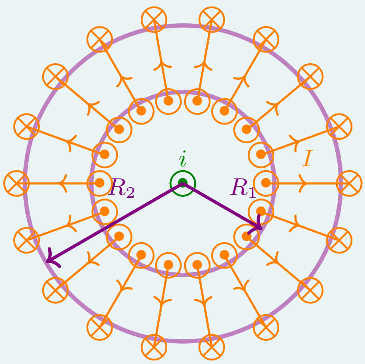
■ À revoir ■ Maîtrisé

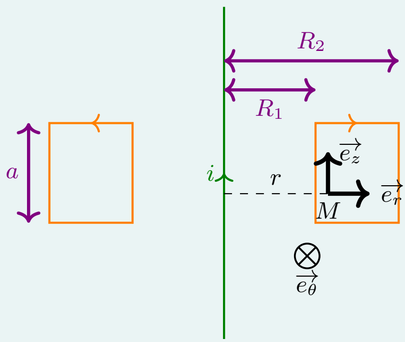
Fonctionnement d'une pince ampèremétrique

Énoncé

Soit un fil d'axe (O, z) (orienté vers le haut) dans lequel circule un courant $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ orienté selon $\overrightarrow{e_z}$. Le but est de déterminer la valeur de i_0.

On place autour de ce fil un tore à section rectangulaire de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2 et de hauteur a ; l'axe du tore est également (O, z). Le tore possède un total de N spires jointives, parcourues par un courant $I(t)$ **induit** par le fil.





On admet que le champ créé par le fil s'écrit $\overrightarrow{B}_{\text{fil}} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}.\overrightarrow{e_\theta}$, et que celui créé par le tore en son sein est $\overrightarrow{B}_{\text{tore}} = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}.\overrightarrow{e_\theta}$.

1. On note $\overrightarrow{B}$ le champ magnétique total au sein du tore. Exprimer le flux φ_B de $\overrightarrow{B}$ à travers une spire du tore.
2. En déduire le flux total Φ_B dans le bobinage. Montrer que l'on peut l'écrire $\Phi_B = M \times i + L_{\text{bobinage}} \times I$ avec M et L à exprimer en fonction des données de l'énoncé.
3. On suppose le bobinage parfaitement conducteur. Montrer que l'on a $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = K \times \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. Comment peut-on déterminer i_0 ?

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Résolution

1. On a $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}_{\text{fil}} + \overrightarrow{B}_{\text{tore}} = \dfrac{\mu_0(i+NI)}{2\pi r}.\overrightarrow{e_\theta}$.

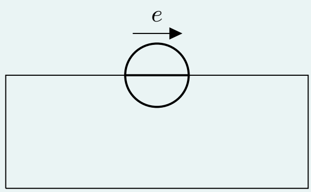
   Il vient que :

$$\begin{aligned}
\varphi_B &= \iint_{\text{spire}} \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} \\
&= \iint_{\text{spire}} \frac{\mu_0(i+NI)}{2\pi r}.\overrightarrow{e_\theta} \cdot \mathrm{d}S.\overrightarrow{e_\theta} \\
&= \frac{\mu_0(i+NI)}{2\pi} \iint_{\text{spire}} \frac{1}{r} \times \mathrm{d}r\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu_0(i+NI)}{2\pi} \int_{r=R_1}^{r=R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} \times \int_{z=0}^{z=a} \mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu_0(i+NI)}{2\pi} \times \ln(R_2/R_1) \times a
\end{aligned}$$

2. Puisqu'il y a N spires, on a $\Phi_B = N \times \varphi_B = \dfrac{\mu_0 N}{2\pi}\ln(R_2/R_1)a \times i + \dfrac{\mu_0 N^2}{2\pi}\ln(R_2/R_1)a \times I$.

   Or M et L_{bobinage} sont définis par $\Phi_B = Mi + L_{\text{bobinage}}I$, donc $\boxed{M = \dfrac{\mu_0 N}{2\pi}\ln(R_2/R_1)a}$ et $\boxed{L_{\text{bobinage}} = \dfrac{\mu_0 N^2}{2\pi}\ln(R_2/R_1)a}$.

3. Si le bobinage est parfaitement conducteur, alors sa résistance est nulle : on peut alors modéliser le bobinage par le circuit ci-contre, avec $e = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$. Il vient alors, par la loi des mailles, que $e = 0$.



   On en déduit que $M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_{\text{bobinage}}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$, c'est-à-dire que $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{L_{\text{bobinage}}}{M}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$.

   On a donc $i(t) = -\dfrac{L_{\text{bobinage}}}{M} \times I(t) + \text{cste}$. Cette constante est facilement déterminable : s'il n'y a pas d'intensité $i(t)$, il n'y aura pas de courant induit dans le bobinage. La constante est donc nulle.

5 Électromécanique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Conversion

Lorsqu'un circuit est en mouvement dans un champ magnétique, il se produit deux phénomènes simultanés : le circuit reçoit une puissance mécanique $\mathcal{P}_L$ de la force de Laplace, et une puissance électrique $\mathcal{P}_{\text{ind}}$ de la fém induite.

Ces puissances sont liées par la **loi de conversion électromécanique** :

$$\boxed{\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_{\text{ind}} = 0}$$

avec $\boxed{\mathcal{P}_L = \overrightarrow{F_L} \cdot \overrightarrow{v}_{\text{circuit}}}$ et $\boxed{\mathcal{P}_{\text{ind}} = e_{\text{ind}} \times i_{\text{circuit}}}$.

2 Description générale des problèmes d'électromécanique

→ Une pièce mobile se déplace dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ constant ;

→ Suite à ce mouvement, le flux Φ_B du champ magnétique varie, ce qui crée une force électromotrice induite e_{ind} (**loi de Faraday**) ;

→ Nécessairement, un courant est induit i_{ind} dans le circuit électrique (**loi des mailles**, **loi d'Ohm**) ;

→ Une **force de Laplace** $\overrightarrow{F_L} = \int_{\text{pièce mobile}} i_{\text{ind}} \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}$ s'exerce alors sur la pièce mobile ;

→ Le **principe fondamental de la dynamique** donne alors une relation entre la vitesse $\overrightarrow{v}$ de la pièce mobile et l'intensité i_{ind} la parcourant.

Il peut arriver que le problème soit trop complexe pour que l'on puisse déterminer une des grandeurs (souvent : le calcul explicite de e_{ind}). On utilise alors la loi de conversion électromécanique pour créer une relation supplémentaire sans entrer dans les détails de calcul.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Rail de Laplace

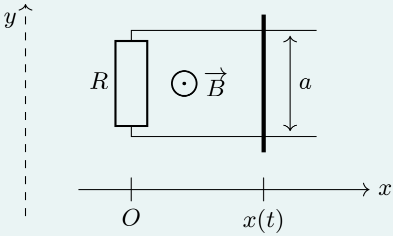
Énoncé

Considérons un circuit fermé constitué d'un câble conducteur fixe et d'une baguette conductrice et rectiligne de masse m pouvant se mouvoir librement selon la direction x. On note R la résistance totale du circuit, considérée comme constante au cours de l'expérience.

Le circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme et statique $\overrightarrow{B} = B_0.\overrightarrow{e_z}$, où z représente la direction perpendiculaire au circuit et $B_0 > 0$.

$x(t)$ désignera la position de la baguette au cours du temps selon l'axe (O, x), et $v(t) \triangleq \dot{x}(t)$ sa vitesse. La dimension du circuit selon la direction y sera notée a. Le circuit étant posé sur une surface horizontale, le poids sera compensé par la réaction du support.

Tout phénomène d'auto-induction sera négligé.



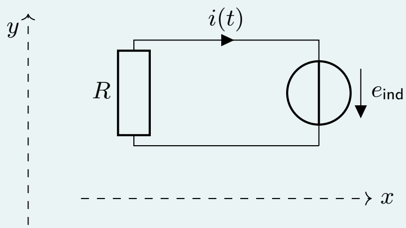
1. *Prédire le sens de $i(t)$ dans le circuit à l'aide de la loi de Lenz.*
2. *Exprimer Φ_B, flux du champ magnétique, puis la force électromotrice induite e_{ind} en fonction notamment de B_0 et v.*
3. *En déduire l'expression de $i(t)$, puis celle de la force de Laplace $\overrightarrow{F_L}$ subie par la baguette. Commenter, au vu de la loi de Lenz.*
4. *Par le principe fondamental de la dynamique et à l'aide des résultats précédents, déterminer l'équation du mouvement de la baguette. Déterminer $v(t)$, sachant que $v(t = 0) = v_0$.*

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Résolution

1. Selon la loi de Lenz, le champ magnétique induit sera opposé à celui qui lui a donné naissance. On en déduit, par la « règle du tire-bouchon », que $i(t)$ circule dans le sens horaire.
2. $\Phi_B = \iint \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint B_0.\overrightarrow{e_z} \cdot \mathrm{d}S.(-\overrightarrow{e_z}) = -B_0 \times a \times x(t)$ puisque B_0 est uniforme.
   On en déduit que $e_{\text{ind}} = B_0 av$ par la loi de Faraday.
3. Traçons le circuit équivalent :



   La loi des mailles donne que $e_{\text{ind}} = Ri(t)$, et donc que $i(t) = \dfrac{e_{\text{ind}}}{R} = \dfrac{B_0 av}{R}$.

   Nécessairement, on a $\overrightarrow{F_L} = \displaystyle\int_{\text{baguette}} i(t)\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B} = i(t) \times \int_{\text{baguette}} \mathrm{d}\ell.(-\overrightarrow{e_y}) \wedge B_0.\overrightarrow{e_z} = -B_0 ai(t).\overrightarrow{e_x}$.

   Or $i(t) = \dfrac{B_0 av}{R}$, donc $\boxed{\overrightarrow{F_L} = -\dfrac{B_0^2 a^2}{R} v.\overrightarrow{e_x}}$.

   On remarque que la baguette est freinée ($\overrightarrow{F_L} = -\lambda.\overrightarrow{v}$) par la force de Laplace, ce qui est cohérent avec la loi de modération de Lenz.
4. Les forces s'appliquant sur la baguette sont son poids $\overrightarrow{P} = -P.\overrightarrow{e_z}$, la réaction des rails $\overrightarrow{R} = R.\overrightarrow{e_z}$ et la force de Laplace $\overrightarrow{F_L} = -\dfrac{B_0^2 a^2}{R} v.\overrightarrow{e_x}$.
   On en déduit, en appliquant le PFD projeté selon $\overrightarrow{e_x}$:

$$\boxed{m\dot{v} = -\frac{B_0^2 a^2}{R} v}$$

   C'est une équation du type $\dot{v} + \dfrac{1}{\tau} v = 0$, avec $\tau = \dfrac{mR}{B_0^2 a^2}$. On en déduit aisément que $\boxed{v(t) = v_0 e^{-t/\tau}}$, au vu de la condition initiale.