Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 6 : Mécanique des fluides

Travaux dirigés

Exercice faisant uniquement appel à des outils mathématiques ———— √x
Exercice facile et/ou proche du cours ———— 🌡
Exercice accessible mais demandant du recul sur le cours et/ou sur les outils mathématiques ———— 🌡
Exercice complexe, de par son côté calculatoire et/ou astucieux ———— 🌡

Il est normal de « bloquer » sur les **exercices** : personne ne s'attend à ce que vous sachiez les faire en cinq minutes seulement. Il faut cependant persévérer, avoir le cours à côté afin de voir si un raisonnement similaire a déjà été abordé, et ne pas hésiter à parler avec vos camarades ou votre professeur.

Les **problèmes** sont issus d'annales de concours et/ou d'examens. Ils sont au moins aussi importants à aborder que les exercices, car ils sont les plus proches (en terme de rédaction et de questions « bout-à-bout ») de ce que vous aurez en devoir surveillé ainsi qu'au concours.

Chapitre 1 : Statique des fluides

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Donner l'expression de la résultante des forces pressantes s'exerçant sur un volume élémentaire de fluide	1.1, 1.5, problème
Énoncer et établir la relation de la statique des fluides dans le cas d'un fluide soumis uniquement à la pesanteur	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.7, problème
Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible pour l'atmosphère isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait	1.6, 1.7, problème

Questions de cours

- ☐ En étudiant un cube infinitésimal de fluide de volume $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g.\overrightarrow{e_z}$, établir la relation fondamentale de la statique des fluides.
- ☐ Pour un fluide incompressible, que peut-on dire de la masse volumique μ ? En déduire une expression simple de $p_A - p_B$ en fonction de μ, g, z_A et z_B, où A et B sont deux points quelconques du fluide.
- ☐ À l'aide de la relation fondamentale de la statique des fluides, établir l'expression de $p(z)$ dans une atmosphère isotherme assimilée à un gaz parfait. Déterminer la longueur caractéristique L de variation de la pression.

Exercices

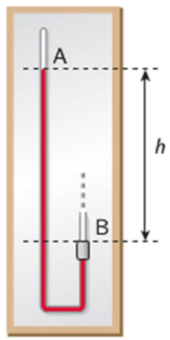
1.1 Plongée sous-marine

L'algue Mozuku est récoltée tout au long du littoral japonais. C'est un aliment qui contient beaucoup d'antioxydants, vitamines et minéraux. C'est une sorte d'algue très fine, récoltée dans le haut-fond marin.

1. Les plongeurs retiennent souvent que « dix mètres de profondeur équivaut à un bar de pression ». Justifier cette phrase.
2. À la profondeur h où est récoltée le Mozuku, la différence de pression de l'eau et la pression atmosphérique est $\Delta p = 1{,}51 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Calculer cette profondeur h. On donne $\rho_{\text{eau de mer}} = 1{,}03 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.
3. Calculer la force pressante F exercée par l'eau de mer sur le tympan de l'oreille du plongeur. Son tympan a une aire S égale à $0{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

1.2 Thermomètre à mercure

Autrefois, on mesurait la pression atmosphérique en millimètre ou en centimètre de mercure. Le baromètre à mercure est constitué d'un long tube de verre de petite section rempli de mercure, la dénivellation h entre les deux surfaces libres de mercure donnant la valeur de la pression atmosphérique.



1. Au sommet de la colonne de mercure (au-dessus de A) règne le vide. Quelle est la valeur de la pression au point A ?

2. La surface libre en B est en contact avec l'atmosphère. En appliquant la loi de l'hydrostatique, déterminer la valeur de la pression en B sachant que la dénivellation h est égale à $760\,\mathrm{mm}$. On donne $\rho_{\text{mercure}} = 13{,}6 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.
3. Montrer qu'une dénivellation de $1\,\mathrm{mm}$ de mercure correspond à une pression de $133\,\mathrm{Pa}$.
4. Si l'on remplace le mercure par de l'eau, quelle serait la hauteur de la colonne d'eau pour la même pression atmosphérique ?

1.3 Tension artérielle

Le cœur est un muscle qui joue le rôle d'une pompe cardiaque et assure la circulation sanguine. En se contractant de façon rythmée, il met le sang sous pression et en mouvement.

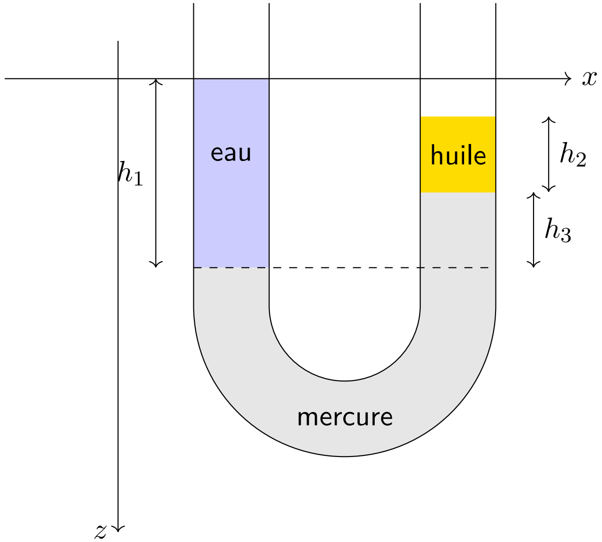
On définit la tension artérielle T_M en un point M du corps humain comme : $T_M = p_M - p_{\text{atm}}$ où p_M est la pression artérielle au point M et p_{atm} la pression atmosphérique. La tension artérielle au niveau du coeur, dans le cas d'un individu debout, vaut par exemple $T_C = 13{,}3\,\mathrm{kPa}$.

On donne la masse volumique du sang : $\rho_{\text{sang}} = 1{,}06 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

1. Quel est l'intérêt de réfléchir en terme de tension artérielle au lieu de pression artérielle ?
2. La dénivellation entre le cœur et les pieds d'un patient est $h_1 = 1{,}3\,\mathrm{m}$. Quelle est la tension artérielle au niveau des pieds ?
3. La dénivellation entre le cœur et le cerveau du même patient est $h_2 = 40\,\mathrm{cm}$. Quelle est la tension artérielle au niveau du cerveau ?
4. Si l'individu est couché, quelles seront les tensions artérielles au niveau des pieds et du cerveau ?
5. Un aide-soignant doit faire une perfusion à une patiente. Quelle doit être la hauteur h minimale de la perfusion au-dessus du point d'injection pour que le liquide entre effectivement dans le sang du patient ? On supposera que la tension artérielle au niveau de l'aiguille est la même qu'au niveau du cœur, et que la pression au-dessus du liquide perfusé est égale à p_{atm}.

1.4 Tube en U

Soit trois liquides non miscibles (eau, mercure, huile) en équilibre statique dans un tube en U ouvert à l'air libre comme représenté en figure ci-dessous. On note μ_e, μ_m et μ_h les masses volumiques respectives de l'eau, du mercure et de l'huile.



1. Quelle hypothèse raisonnable peut-on faire pour les trois fluides proposés ?
2. Montrer que dans un liquide incompressible, la pression est une fonction affine de la profondeur z.
3. Comment se traduit la condition d'équilibre pour chacune des interfaces air-eau, eau-mercure, mercure-huile et huile-air ?
4. En déduire l'expression de la pression à chacune des interfaces précédentes.
5. En déduire une expression de μ_h en fonction de μ_e, μ_m, h_1, h_2 et h_3.

1.5 Poussée d'Archimède

Soit un fluide à l'équilibre hydrostatique. On note ρ_{fluide} sa masse volumique uniforme et $\overrightarrow{g}$ le champ de pesanteur.

On place un corps de forme quelconque et de volume V_{corps} dans ce fluide.

Montrer que la résultante des forces de pression sur le corps (c'est-à-dire sa poussée d'Archimède) peut s'écrire $\overrightarrow{\Pi_A} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{corps}}.\overrightarrow{g}$.

1.6 Montée d'un ballon-sonde

Penser à utiliser l'expression de la poussée d'Archimède de l'exercice précédent !

Considérons une atmosphère isotherme de température T, modélisée par un gaz parfait : on a donc une pression $p(z) = p_0 e^{-z/\lambda}$ avec $\lambda = \dfrac{RT}{M_{\text{air}} g} = 7{,}8\,\text{km}$.

Un ballon-sonde sphérique déformable, contenant n_0 moles de dihydrogène (gaz parfait de masse molaire $M_{H_2} = 2\,\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$), est posée à la surface terrestre. Il est constitué d'une enveloppe de masse $m_B = 1{,}2\,\text{kg}$.

1. Démontrer l'expression de $p(z)$.
2. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au ballon.
3. Quelle doit-être la quantité n_{min} minimale de dihydrogène pour que le ballon s'envole ?
4. On prend $n_0 = 2n_{\text{min}}$. Déterminer l'altitude H à laquelle le ballon va éclater, en supposant que son volume maximal est $V_{\text{max}} = 10V_0$, où V_0 est son volume initial.

1.7 Atmosphère avec gradient de température

Déterminer l'équation de $p(z)$ dans l'atmosphère, supposée être un gaz parfait, si l'on prend $T(z) = T_0 - \alpha z$ avec α une constante. $z = 0$ représente la surface de la Terre, où $p = p_0$.

Problème

On assimile l'atmosphère terrestre à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ et on note $R = 8{,}3\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits. Dans l'espace étudié, on pourra considérer la température T_0 de ce gaz uniforme : $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Le sol terrestre est localement plan, on note Oz l'axe vertical ascendant avec une origine O prise au sol. On note $P(M)$ et $\rho(M)$ respectivement la pression et la masse volumique en un point M de l'espace. L'étude sera menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On note $\overrightarrow{g}$ le vecteur champ de pesanteur terrestre avec $\|\overrightarrow{g}\| = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

1. On étudie un volume mésoscopique dV de gaz. Ce système statique est soumis à son poids et à la résultante des forces pressantes. Donner la relation vectorielle décrivant l'immobilité de ce volume dV.
2. Exprimer $\rho(M)$ en fonction de $P(M)$, R, M et T_0.
3. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \dfrac{P}{\delta} = 0$ où $\delta = \dfrac{RT_0}{Mg}$ puis calculer δ.
4. On note $P(z = 0) = P_0$, donner l'expression de $P(z)$ et tracer son allure.

Les smartphones sont munis d'un capteur de pression. Le jour de l'expérience, un opérateur mesure une pression de $1000{,}00\,\mathrm{hPa}$ au niveau du sol et de $999{,}80\,\mathrm{hPa}$ sur sa tête.

5. On admet que pour $x \ll 1$, on a $e^x \approx 1 + x$. Estimer, en justifiant l'utilisation du développement précédent, la taille H de cet opérateur.

Dans la suite, on suppose que l'incertitude-type $u(H)$ sur la valeur de H n'est due qu'à l'incertitude-type $u(P) = 0{,}02\,\mathrm{hPa}$ sur la lecture des pressions.

6. On obtient $u(H) \approx 30\,\mathrm{cm}$. Sachant que l'opérateur a une taille de $1{,}75\,\mathrm{m}$, commenter la qualité de cette mesure.

Chapitre 2 : Cinématique des fluides

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Évaluer le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement uniforme, à symétrie sphérique, à symétrie axiale (radiale ou orthoradiale) en connaissant l'expression du champ des vitesses	tous

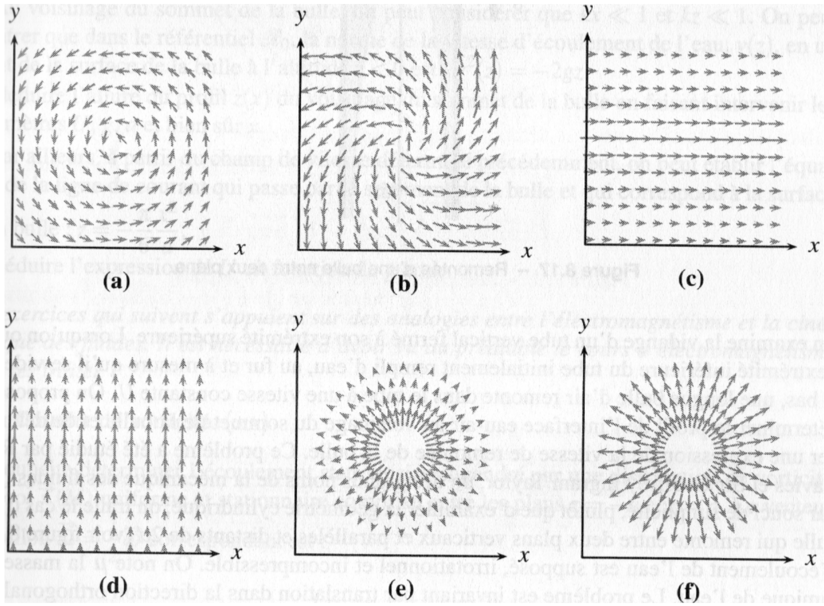
Questions de cours

- ☐ Définir les termes : écoulement stationnaire, écoulement uniforme, écoulement homogène et écoulement incompressible. Établir qu'un écoulement stationnaire et homogène est nécessairement incompressible. Un écoulement de fluide incompressible signifie-t-il nécessairement que le fluide est incompressible ? Justifier.
- ☐ Qu'est-ce qu'un écoulement irrotationnel ? Sous quelle forme peut-on alors écrire $\vec{v}$? Le champ des vitesses $\vec{v} = 3ax^2.\overrightarrow{e_y} - 2ay\overrightarrow{e_x}$ est-il irrotationnel ou tourbillonnaire ?
- ☐ Qu'est-ce qu'un écoulement à flux conservatif ? Sous quelle forme peut-on alors écrire $\vec{v}$? Le champ des vitesses $\vec{v} = 3ax^2.\overrightarrow{e_y} - 2ay\overrightarrow{e_x}$ est-il à flux conservatif ou à flux non-conservatif ?

Exercices

2.1 Analyse de cartes de champs

Chaque figure ci-après représente la carte de champ d'un écoulement stationnaire bidimensionnel. Ces écoulements sont-ils irrotationnels ou tourbillonnaires ? Compressibles ou à flux conservatifs ?



2.2 Caractérisation d'un écoulement (1)

On considère un écoulement dont le champ eulérien des vitesses est $\vec{v}(M,t) = -\Omega y.\overrightarrow{u_x} + \Omega x.\overrightarrow{u_y} + v_0.\overrightarrow{u_z}$. Cet écoulement est-il stationnaire ? à flux conservatif ? irrotationnel ?

2.3 Caractérisation d'un écoulement (2)

On considère un écoulement dont le champ eulérien des vitesses est $\vec{v}(M,t) = ay.\overrightarrow{u_x} + ax.\overrightarrow{u_y}$. Cet écoulement est-il stationnaire ? à flux conservatif ? irrotationnel ?

2.4 Tornade

Le champ des vitesses au sein d'une tornade peut être modélisé simplement en coordonnées cylindriques par :

$$\overrightarrow{v}(r) = \begin{cases} \omega r.\overrightarrow{e_\theta} \text{ si } r \leq a \\ \dfrac{K}{r}.\overrightarrow{e_\theta} \text{ si } r \geq a \end{cases}$$

avec ω et K deux constantes.

1. Sachant que le champ des vitesses est continu en $r = a$, déterminer K en fonction de ω et a.
2. Représenter le champ des vitesses en traçant d'une part la fonction $v(r)$ puis en traçant sur un autre schéma quelques vecteurs le long d'une droite passant par l'origine. Préciser l'allure des lignes de courant.
3. Montrer que l'écoulement de l'air est à flux conservatif.
4. Cet écoulement est-il tourbillonnaire pour $r \geq a$? Pour $r \leq a$?

2.5 Écoulement dans une artère

On étudie la circulation sanguine dans une artère, modélisée par un écoulement stationnaire dans un cylindre de longueur $L_0 = 7\,\text{cm}$ et de rayon $R_0 = 0{,}7\,\text{cm}$. Le sang est modélisé par un fluide de viscosité $\eta = 6 \times 10^{-3}\,\text{Pl}$. L'écoulement au sein de l'artère peut s'écrire sous la forme : $\overrightarrow{v}(r) = \dfrac{\Delta p \times R_0^2}{4\eta L_0}(1 - ar^2).\overrightarrow{e_z}$ où Δp est la différence de pression entre les deux extrémités de l'artère et $\overrightarrow{e_z}$ le vecteur unitaire dirigeant l'axe de l'artère.

1. On admet que la vitesse de l'écoulement doit être nulle au niveau de la paroi artérielle. Quelle doit-être l'expression de a ?
2. L'écoulement est-il à flux conservatif ?
3. L'écoulement est-il irrotationnel ?

2.6 Écoulement autour d'un cylindre en rotation

Un écoulement stationnaire, à flux conservatif et uniforme est caractérisé par la vitesse $\vec{v} = v_0.\overrightarrow{e_x}$ loin d'un cylindre d'axe (O, z) et de rayon a. On note θ l'angle orienté dans le sens trigonométrique entre l'axe (O, x), orienté vers la droite, et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

1. On suppose le cylindre fixe.
   (a) Que valent $\vec{v}(r \to \infty)$ et $\vec{v}(r = a, \theta = \pi)$? Justifier.
   (b) On cherche $\vec{v}$ sous la forme : $\vec{v} = \dfrac{A}{2\pi r^2}(\cos(\theta).\overrightarrow{u_r} + \sin(\theta).\overrightarrow{u_\theta}) + \overrightarrow{v_0}$. Déterminer la valeur de A en utilisant les conditions aux limites.
2. On suppose le cylindre en rotation autour de son axe fixe avec la vitesse angulaire Ω.
   (a) Trouver l'expression du champ des vitesses autour de ce cylindre en superposant au précédent champ de vitesse un champ de type « vortex » : $\vec{v'} = \dfrac{B\Omega}{r}.\overrightarrow{u_\theta}$.
   (b) Préciser les points d'arrêt.

Chapitre 3 : Débit massique, débit volumique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Exprimer les débits massique et volumique	tous
Établir un bilan local et global de matière en régime stationnaire	3.2, 3.3, 3.4, 3.5

Questions de cours

- ☐ Donner les définitions du vecteur densité de masse et du débit massique. Expliciter chacun des termes ainsi que leurs unités respectives.
- ☐ Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. Que devient-elle en régime stationnaire ? Qu'en déduit-on pour le débit massique le long d'une canalisation ? et au niveau d'un embranchement ?
- ☐ Donner la définition du débit volumique en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. À quelle condition peut-on écrire que le débit volumique est égal au produit de la vitesse d'écoulement par la section de l'écoulement ?
- ☐ Établir qu'en régime stationnaire le champ des vitesses d'un écoulement homogène est à flux conservatif. Qu'en déduire pour le débit volumique le long d'une canalisation ? et au niveau d'un embranchement ?

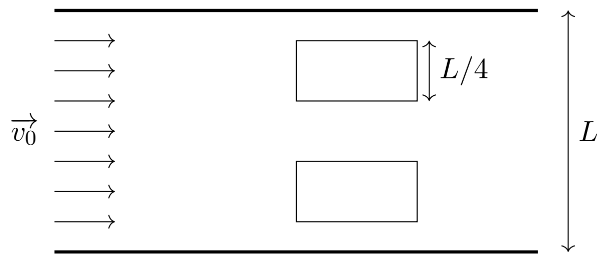
Exercices

3.1 Jet d'eau

À quelle vitesse est éjectée l'eau du jet de Genève, de diamètre $D = 10{,}7\,\mathrm{cm}$, alimenté par une pompe débitant $500\,\mathrm{L\cdot s^{-1}}$?

3.2 Cours d'eau

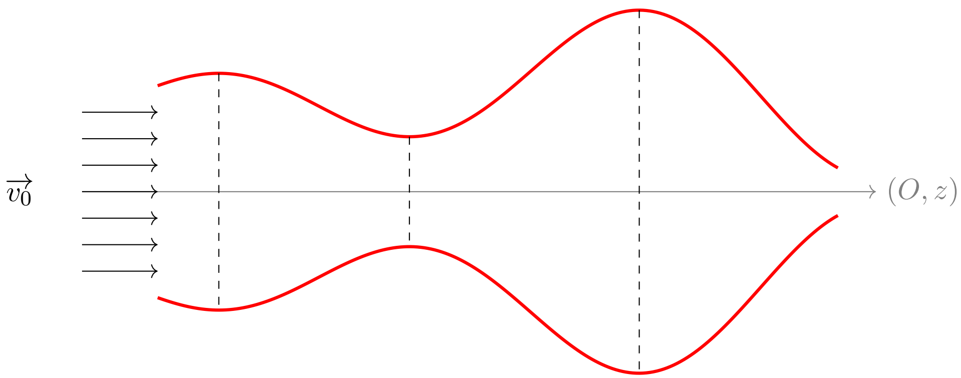
On considère l'écoulement homogène et stationnaire de l'eau dans un fleuve de section rectangulaire, et de profondeur H constante. Le champ des vitesses est supposé uniforme au sein d'une section du fleuve. Loin en amont du pont, la vitesse est $\overrightarrow{v_0}$.



1. Dessiner intuitivement des lignes de champ.
2. Déterminer la vitesse v_p de l'eau entre les piles du pont.
3. Quel lien peut-on faire entre vitesse de l'écoulement et espacement des lignes de champ ?

3.3 Lien section-vitesse pour un écoulement incompressible

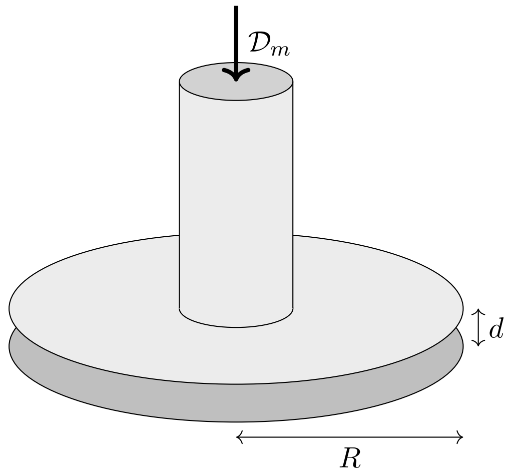
Soit un écoulement compressible dans une tuyère dont la vue en coupe est donnée ci-dessous. On suppose le schéma à l'échelle 1 :1, et on a $v_0 = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



1. Calculer le débit volumique en entrée. Pourquoi peut-on dire qu'il est égal en toute section de la tuyère ?
2. Calculer les vitesses en chacune des sections indiquées en traitillés ; on admet que les vitesses y sont uniformes.

3.4 Fontaine anti-incendie

Soit l'écoulement stationnaire produit par une pompe, imposant un débit d'eau $\mathcal{D}_m = 200\,\mathrm{kg \cdot min^{-1}}$ dans une canalisation cylindrique débouchant sur un espace circulaire contenu entre deux disques parallèles de rayon $R = 10\,\mathrm{cm}$ séparés de $d = 1\,\mathrm{cm}$.



Calculer la vitesse avec laquelle l'eau est éjectée en périphérie de la fontaine.

3.5 Durée de remplissage

On cherche à remplir une piscine de dimension approximative $2\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m} \times 5\,\mathrm{m}$ ($2\,\mathrm{m}$ étant la profondeur). Le robinet fournit un débit de $200\,\mathrm{g \cdot s^{-1}}$.

1. Calculer la durée de remplissage.
2. Même question si, en plus, il pleut sans discontinuer avec une pluviométrie de $8\,\mathrm{mm \cdot h^{-1}}$.

3.6 Débits pour des vitesses non uniformes

1. Soit une conduite d'axe z, de section carrée de côté a, parcourue par un fluide dont le champ des vitesses est invariant suivant les dimensions x et z : $\overrightarrow{v} = v_0 \dfrac{y}{a}.\overrightarrow{u_z}$ (on a donc x et y qui sont contenus entre 0 et a.
   Exprimer le débit volumique à travers une section.
2. La conduite est maintenant circulaire de rayon a, et on a $\overrightarrow{v} = v_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right).\overrightarrow{u_z}$ avec r la coordonnée radiale contenue entre 0 et a.
   Exprimer le débit volumique à travers une section.

Chapitre 4 : Théorème de Bernoulli et applications

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Énoncer la relation de Bernoulli en précisant les hypothèses	tous
Établir un bilan de puissance pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe	4.3, 4.4, 4.5, problème

Questions de cours

- ☐ Donner les définitions du vecteur densité de masse et du débit massique. Expliciter chacun des termes ainsi que leurs unités respectives.
- ☐ Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. Que devient-elle en régime stationnaire ? Qu'en déduit-on pour le débit massique le long d'une canalisation ? et au niveau d'un embranchement ?
- ☐ Donner la définition du débit volumique en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. À quelle condition peut-on écrire que le débit volumique est égal au produit de la vitesse d'écoulement par la section de l'écoulement ?
- ☐ Établir qu'en régime stationnaire le champ des vitesses d'un écoulement homogène est à flux conservatif. Qu'en déduire pour le débit volumique le long d'une canalisation ? et au niveau d'un embranchement ?

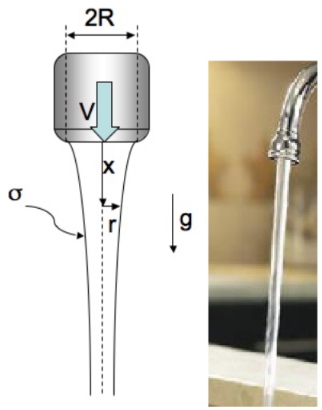
Exercices

4.1 Hauteur maximale d'un jet d'eau

Le débit massique à la base du jet d'eau vertical de Genève est $\mathcal{D}_m = 500\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Le diamètre de la section à la base est $d = 11\,\mathrm{cm}$. On admet que l'eau du lac est captée par la pompe proche de la surface.

1. Faire un schéma faisant apparaître notamment le jet, le lac et la pompe.
2. Trouver la hauteur h du jet.
3. Quelle est la puissance mécanique P nécessaire pour l'alimenter ?

4.2 Forme d'un filet d'eau



Un filet d'eau, de vitesse initiale V, coule verticalement vers le bas. On note R le rayon du robinet ; l'axe (O, x) est orienté vers le bas.

On note M un point quelconque de profondeur x ; la vitesse eulérienne de l'écoulement en ce point est $v(x)$, et $r(x)$ est le rayon de l'écoulement.

1. Quel est le lien entre $v(x)$, $r(x)$, V et R ? Justifier.
2. En appliquant le théorème de Bernoulli (et en rappelant et vérifiant les hypothèses d'utilisation), déterminer l'expression de $r(x)$. Tracer l'allure de la courbe et commenter.

4.3 Puissance d'une pompe

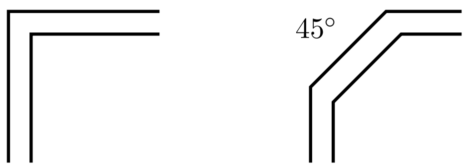
On considère un écoulement parfait ; on note $\mathcal{D}_v = 3\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$ le débit volumique et $\mu = 1\,\mathrm{kg \cdot L^{-1}}$ la masse volumique du fluide supposé homogène. Le régime est stationnaire.

Les sections des conduites en amont et en aval sont identiques. La pression en amont de la pompe est $p_1 = 1{,}1\,\mathrm{bar}$; le fluide est rejeté en aval à une dénivellation positive $h = 5\,\mathrm{m}$ dans l'atmosphère.

Déterminer et calculer la puissance d'alimentation de cette pompe, de rendement $\eta = 63\%$.

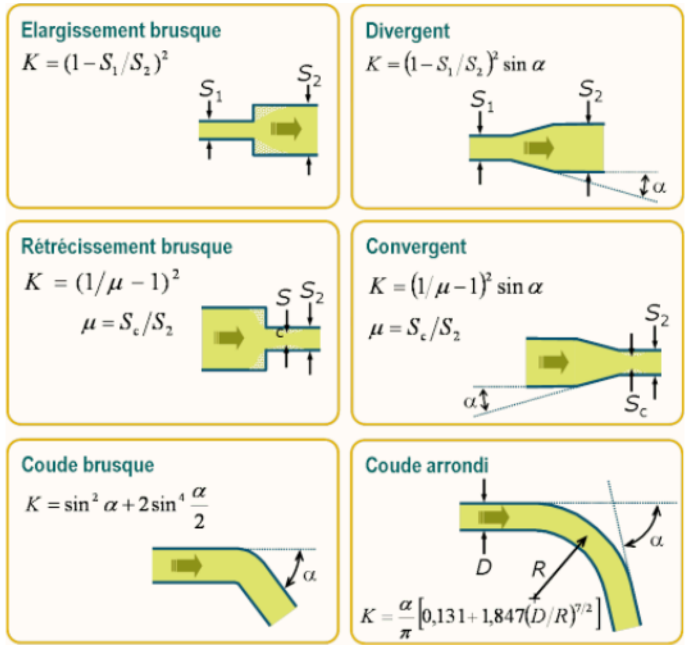
4.4 Optimisation d'une canalisation

Déterminer lequel des deux montages hydrauliques ci-dessous minimise la puissance nécessaire pour acheminer le fluide de son entrée (bas du schéma) à sa sortie pour un débit $\mathcal{D}_v = 1\,\mathrm{L \cdot s^{-1}}$, la pression étant la même en entrée qu'en sortie. Calculer cette puissance.



La section de la canalisation cylindrique est de rayon $R = 3\,\mathrm{cm}$ constant, le fluide transporté est de l'eau. On a $L = 1\,\mathrm{m}$.

On fournit les documentations suivantes sur les pertes de charges dans une canalisation, où la perte de charge singulière est $J = \dfrac{K}{2}\mu v^2$ avec :



4.5 Pression artérielle chez la girafe

Une girafe moyenne fait environ $5{,}5\,\mathrm{m}$, la distance entre son cœur et son cerveau étant d'environ $2{,}5\,\mathrm{m}$.

Données :

- La masse volumique du sang est proche de celle de l'eau ;
- Tension artérielle au niveau du cœur : $p_{\text{coeur}} - p_{\text{atm}} = 5\,\mathrm{mmHg}$;
- Tension artérielle au niveau du cerveau : $p_{\text{cerveau}} - p_{\text{atm}} = 100\,\mathrm{mmHg}$;
- Rayon moyen de l'artère carotide : $R = 0{,}6\,\mathrm{cm}$;
- $1\,\mathrm{bar} = 750\,\mathrm{mmHg}$;
- Viscosité du sang $\eta = 4 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pl}$ (le poiseuille Pl est l'unité SI de la viscosité).

1. En négligeant d'abord la viscosité du sang, calculer la puissance $\mathcal{P}$ que le cœur de la girafe doit fournir pour maintenir irrigué son cerveau.

2. Quel problème physiologique la girafe peut-elle ressentir lorsqu'elle relève brusquement la tête après avoir bu dans une mare ?
3. Critiquer les hypothèses faites à la question 1. La valeur trouvée est-elle sur- ou sous-estimée ?
4. En utilisant la formule de Poiseuille des pertes de charge sur une longueur ℓ de conduite de rayon r : $J = 8\dfrac{\eta \mathcal{D}_v \ell}{\pi r^4}$, reprendre la question 1. Commenter.
5. Reprendre le raisonnement précédent en remplaçant l'artère par dix artérioles de rayon dix fois moindre, mais véhiculant le même débit total.

4.6 Durée de vidange d'un récipient

Soit un récipient cylindrique de hauteur $H = 50\,\mathrm{cm}$, de rayon $R = 10\,\mathrm{cm}$, rempli d'un liquide homogène supposé parfait. On repère son niveau par $h(t)$, et on fore un orifice circulaire de rayon $r = 5\,\mathrm{mm}$ dans le fond.

1. Montrer que la vitesse u de descente du niveau d'eau est négligeable face à la vitesse v en sortie.
2. Quel est le lien entre u et h ? En déduire une expression de v en fonction de $\dot{h}$.
3. Le théorème de Bernoulli est-il applicable ici ? Réponse à justifier finement...
4. Par application du théorème de Bernoulli, montrer que $v^2 \approx 2gh(t)$.
5. Déduire des questions précédentes que $\dfrac{R^4}{r^4}\dot{h}^2 = 2gh$.
6. Dériver l'équation par rapport au temps t ; déterminer alors $h(t)$.
7. Quelle est alors la durée Δt pour vider le récipient ?

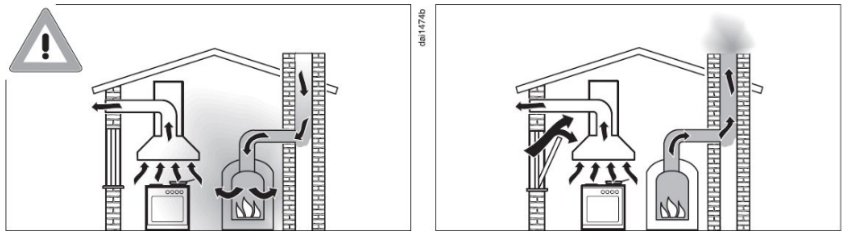
Problème

L'installation d'une hotte aspirante placée au-dessus d'une plaque de cuisson nécessite une réflexion avant achat. Par exemple, il convient d'apprécier le débit volumique d'air que le dispositif peut traiter afin de renouveler convenablement les gaz présents dans la cuisine.

Généralités

1. Pour assurer un bon renouvellement de l'air d'une cuisine, la hotte doit pouvoir déplacer 10 fois par heure le volume d'air de votre cuisine. Estimer le débit volumique $\mathcal{D}_v$ que la hotte doit imposer pour une cuisine de surface $20\,\mathrm{m}^2$ et de $2{,}5\,\mathrm{m}$ de hauteur de plafond.

2. Dans la documentation donnée par le constructeur MIELE™, on retrouve le schéma ci-dessous pour un système d'évacuation d'air vers l'extérieur. Expliquer, succinctement et clairement, pourquoi l'une des deux installations n'est pas acceptable.

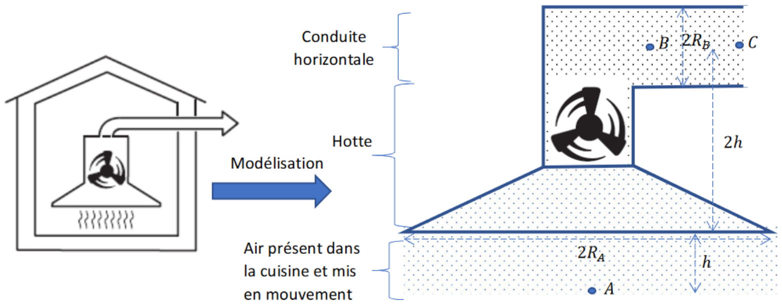


Dans la suite, nous allons chercher à évaluer la puissance $\mathcal{P}_u$ qu'une hotte doit fournir à l'air ambiant pour qu'il soit évacué vers l'extérieur avec un débit volumique $\mathcal{D}_v$. Nous travaillerons avec les hypothèses suivantes (dans le référentiel supposé galiléen lié à la cuisine où le champ de pesanteur terrestre est $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$) :

— On négligera, dans un premier temps, la viscosité du gaz (et tout autre phénomène de diffusion).

— L'écoulement étudié est stationnaire et sa vitesse suffisamment faible pour considérer le fluide de masse volumique ρ uniforme.

— Le moteur de la hotte, avec ses pales, impose un écoulement contenu au sein même de la hotte, dans une canalisation horizontale menant le gaz à l'extérieur mais aussi dans un cylindre de hauteur h situé sous la hotte. Ce cylindre, de rayon R_A, est de même axe de symétrie de révolution que celui de la hotte (cf. schéma suivant).



— Les points B et C appartiennent à une même ligne de courant.

— En dehors de l'écoulement, l'air de la cuisine est au repos, à la pression atmosphérique $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$ et à la température $T_0 = 300\,\mathrm{K}$.

Étude entre les points B et C

Le fluide étudié est dans la canalisation horizontale de rayon R_B constante. Le champ des vitesses est supposé horizontal et uniforme sur chaque section droite de cette canalisation. Les points B et C sont sur une même horizontale. Le point C, à l'extérieur, est à la pression atmosphérique. On note v_B et P_B la vitesse et la pression en B et v_C et P_C la vitesse et la pression en C.

3. Quelle est la relation entre v_B et v_C ? Justifier.
4. Démontrer, en tenant compte des hypothèses, que $P_B = P_0$.

Étude entre les points A et B

5. On a $R_A = 4R_B$. Justifier que $v_A \ll v_B$.
6. En effectuant un bilan de puissance entre A et B, on montre que :

$$\frac{P_B - P_A}{\rho} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2} + g(z_B - z_A) = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{D}_v}$$

Préciser en quoi ce bilan se distingue de celui effectué avec la relation de Bernoulli appliquée à un écoulement conservatif.

7. Démontrer que $\mathcal{P}_u \approx \rho \mathcal{D}_v \left(3gh + \dfrac{\mathcal{D}_v^2}{2\left(\pi R_B^2\right)^2}\right)$.

Bilan et analyse

8. En utilisant le modèle du gaz parfait, exprimer puis calculer la masse volumique ρ du gaz étudié. On donne sa masse molaire $M \approx 30\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$ et on prend $R \approx 10\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.
9. On considère : $h = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $R_B = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $\mathcal{D}_v = 0{,}1\,\mathrm{m^3/s}$. Estimer la valeur de $\mathcal{P}_u$. Cette valeur est-elle réaliste pour une hotte de cuisine ?

Une hotte doit aussi permettre le filtrage de l'air aspiré. Un filtre est alors placé en entrée de la hotte. Les molécules constituant le filtre retiennent certaines particules et l'air aspiré devient alors de meilleure qualité. La présence du filtre impose cependant de prendre en compte la viscosité de l'air qui entraîne un phénomène de perte de charge important entre les points A et B.

10. Pour un filtre encrassé utilisé en cuisine, on a un travail massique lié aux forces de viscosité de $1000\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$. Estimer la puissance $\mathcal{P}_f$ que le moteur doit fournir pour cette seule perte de charge (on prendra encore $\mathcal{D}_v = 0{,}1\,\mathrm{m^3/s}$). Conclure.