Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 6 : Mécanique des fluides

Cours

Figure 1 – Daniel Bernoulli (1700 – 1782), médecin, physicien et mathématicien suisse, est un scientifique ayant contribué à étudier la dynamique des fluides parfaits, en établissant notamment le théorème portant son nom.

Table des matières

Chapitre 1 : Statique des fluides

Objectifs :

— Donner l'expression de la résultante des forces pressantes s'exerçant sur un volume élémentaire de fluide.

— Énoncer et établir la relation de la statique des fluides dans le cas d'un fluide soumis uniquement à la pesanteur.

— Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible pour l'atmosphère isotherme dans le cadre du modèle du gaz parfait.

Au concours ATS : Aux écrits en 2022, 2021, 2016. Tombe parfois aux oraux.

1.1 Forces surfaciques, forces volumiques

1.1.1 Motivation

Dans ce thème, nous allons aborder la physique d'un point de vue mésoscopique. En particulier, la mécanique ne s'intéressera plus à des corps ponctuels, ce qui complique l'étude des systèmes continus (fluides ou solides).

L'objectif de cette partie est de faire ressortir quelques résultats courants sur les forces en milieux continus, afin que vous puissiez les généraliser plus tard à d'autres phénomènes.

1.1.2 Le poids

Considérons un fluide, au repos ou non. Si l'on veut étudier les propriétés mécaniques internes au fluide, il est impensable de se limiter à une étude globale ! On va plutôt s'intéresser à des méso-volumes, assez faciles à étudier car ils ne présentent qu'une petite surface d'échanges que l'on peut simplement modéliser.

Prenons ainsi un élément de volume infinitésimal δV et de masse δm. Le poids de cet élément, dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, est $\delta\vec{P} = \delta m.\vec{g}$. Cette écriture est quelque peu gênante : écrire des δ ou des d dans les équations peut devenir très long.

Si l'on note $\rho = \dfrac{\delta m}{\delta V}$ la masse volumique du fluide, supposée uniforme, on a plutôt : $\overrightarrow{f_P} = \rho.\vec{g}$, où $\overrightarrow{f_P}$ est la « force volumique de poids » de l'élément de fluide (en $\mathrm{N/m^3}$).

1.1.3 La pression

Nous avons précédemment défini la pression p à partir de la force pressante F_p s'exerçant sur une surface S : $p = \dfrac{F_p}{S}$. Considérons à présent un élément infinitésimal dV (voir figure 1.1).

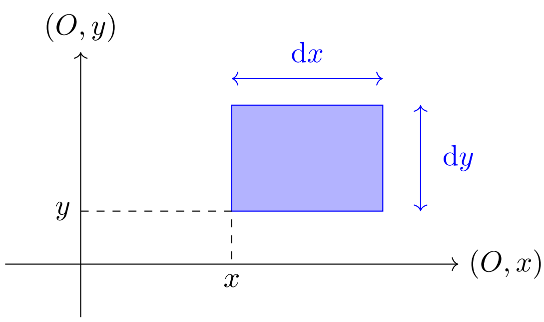


FIGURE 1.1 – Volume mésoscopique.

On suppose que la pression p n'est pas uniforme : $p = p(x, y, z)$.

Question 1 : Exprimer la force totale $\delta\overrightarrow{F_x}$ qu'exerce le fluide environnant sur la portion infinitésimale selon la direction x.

Question 2 : En déduire les expressions de $\delta\overrightarrow{F_y}$ et $\delta\overrightarrow{F_z}$, définies de manière analogue à $\delta\overrightarrow{F_x}$, puis la force pressante totale $\delta\overrightarrow{F_p}$.

Force volumique de pression

Un élément de fluide subit une force résultant de la pression p du fluide environnant. La force de pression volumique s'écrit alors :

$$\overrightarrow{f_p} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ p$$

☛ *Remarque :* La poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi_A}$, force qui permet à une montgolfière de flotter dans les airs ou au bois de remonter dans l'eau, n'est rien d'autre que la manifestation macroscopique des forces de pression. En d'autres termes, on a $\overrightarrow{\Pi_A} = \iiint_{\text{objet}} \overrightarrow{f_p}\ \text{d}V = -\iiint_{\text{objet}} \overrightarrow{\text{grad}}\ p\ \text{d}V$.

1.2 Relation de la statique des fluides

1.2.1 Démonstraton

On considère un fluide au repos dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ (dans la direction z). On note μ la masse volumique du fluide (pas forcément uniforme), et on s'intéresse particulièrement à un volume mésoscopique de fluide $\mathrm{d}V$.

Question 3 : Exprimer les forces s'appliquant sur ce volume infinitésimal.

Question 4 : Appliquer le PFD à ce volume. Que donnent les projections selon x et y ? Est-ce logique au vu des symétries du problème ?

Question 5 : Si $\vec{g} = -g.\overrightarrow{e_z}$ (z orienté vers le haut), que donne la projection selon la direction z ? Et si $\vec{g} = g.\overrightarrow{e_z}$ (z orienté vers le bas) ?

Relation de la statique des fluides

Pour un fluide de masse volumique μ au repos dans le champ de pesanteur $\vec{g}$, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ p = \mu\vec{g}$$

En particulier :

- Si l'axe z est orienté vers le haut, alors $\vec{g} = -g.\overrightarrow{e_z}$ et on a $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu g$;
- Si l'axe z est orienté vers le bas, alors $\vec{g} = g.\overrightarrow{e_z}$ et on a $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \mu g$.

1.2.2 Résultats immédiats

Lien pression-altitude

Question 6 : Supposons l'axe vertical descendant. p augmente-t-elle ou diminue-t-elle avec la profondeur ? Est-ce logique ? Donner un exemple.

Question 7 : Supposons l'axe vertical ascendant. p augmente-t-elle ou diminue-t-elle avec l'altitude ? Est-ce logique ? Donner un exemple.

Question 8 : Observons le système en figure 1.2, rempli d'un fluide au repos. Que peut-on dire des pressions en A, en B et en C ? Justifier.

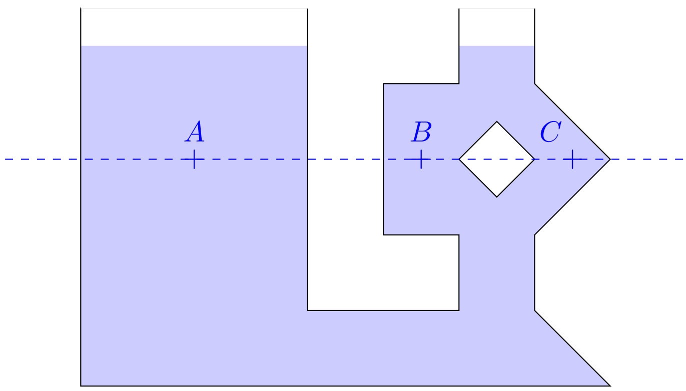


FIGURE 1.2 – Récipient rempli d'un même fluide.

Pression et altitude dans un fluide

La pression dans un fluide au repos ne dépend que de l'altitude du point considéré ; elle diminue avec l'altitude, et augmente avec la profondeur.
En particulier, le fluide au repos n'est à pression atmosphérique p_{atm} que pour une altitude $z =$ cste correspondant à la surface libre fluide-atmosphère.

☛ *Remarque :* Attention à ne pas aller trop vite dans les conclusion s'il y a deux fluides ! Dans ce cas, $z =$ cste ne signifie pas forcément qu'on est à la même pression (imaginez l'intérieur et l'extérieur d'une cuve remplie d'eau).

Conséquences pour un fluide incompressible

Un fluide incompressible ne change pas de volume lorsque la pression augmente. Nécessairement, cela signifie que la masse volumique μ est indépendante de la pression, et donc uniforme s'il n'y a pas de gradient de température.

Question 9 : On suppose l'axe vertical ascendant. À l'aide de la relation fondamentale de l'hydrostatique, exprimer $p(z)$ en fonction de μ, g, z et $p_0 \triangleq p(z = 0)$.

Question 10 : Même question pour un axe vertical descendant.

Pression et altitude dans un fluide incompressible

Soit un fluide incompressible et au repos de masse volumique uniforme μ. La différence de pression $p_B - p_A$ entre deux points est proportionnelle à la dénivellation $z_B - z_A$ entre ces deux points :

$$p_B - p_A = \pm \mu g (z_B - z_A)$$

Le signe $+$ indique un axe vertical descendant ; le signe $-$ indique un axe vertical ascendant.

1.3 Applications

1.3.1 Barrage

Prenons l'exemple d'un barrage permettant de contenir l'eau (au repos) d'un réservoir. On prend un axe vertical descendant, dont l'origine correspond à la surface libre de l'eau (voir figure 1.3).

On note $p_{\text{atm}} = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ la pression atmosphérique, z l'altitude d'un point M quelconque du fluide et $\mu = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ la masse volumique uniforme de l'eau. Le barrage a une largeur $L = 50\,\mathrm{m}$ selon la direction y, et l'eau va jusqu'à une profondeur $h = 10\,\mathrm{m}$.

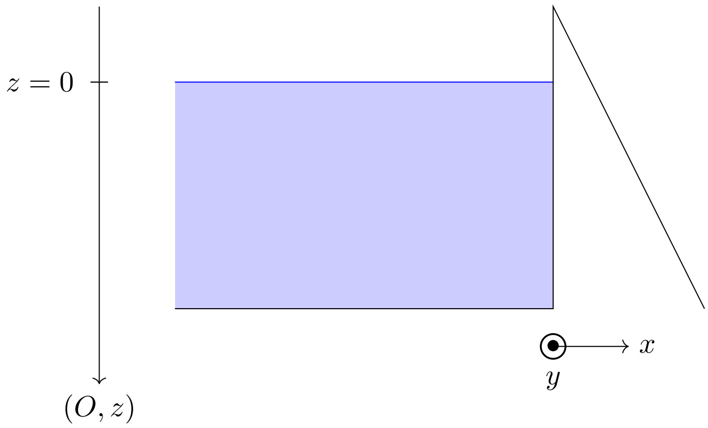


Figure 1.3 – Modélisation d'un barrage vu en coupe.

Le but est de calculer la force pressante F qu'exerce l'eau sur le mur du barrage.

Question 11 : Soit un point M contenu dans l'eau. Exprimer la pression p en M en fonction des données de l'énoncé.

Question 12 : La pression dans l'eau dépend-elle de la longueur du barrage selon la direction x ?

Question 13 : Exprimer la force pressante élémentaire δF s'exerçant sur une surface infinitésimale $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ du mur du barrage en fonction des données de l'énoncé et de la surface élémentaire.

Question 14 : En déduire, par une double intégrale, l'expression de F.

Question 15 : Faire l'application numérique.

☛ *Remarque :* Quand on a une invariance selon une direction de l'espace (ici y), on peut directement dire que l'élément de surface est $L\,\mathrm{d}z$, ce qui donne une intégrale simple à calculer et non plus double. Il faut retenir l'astuce...

1.3.2 Atmosphère isotherme

Considérons une atmosphère isotherme ($T = 273\,\mathrm{K}$) dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ supposé uniforme, même à grande altitude. L'atmosphère est modélisée par un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$. On note μ la masse volumique de l'atmosphère (qui n'est plus uniforme : c'est un gaz, donc compressible !), et on choisit un axe vertical ascendant. p_0 représente l'altitude en $z = 0$.

Question 16 : Rappeler la loi des gaz parfaits. Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme « intensive » : $M \times p = \mu \times R \times T$.

Question 17 : En isolant μ dans l'expression précédente et en utilisant la relation de l'hydrostatique, montrer que l'on a : $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \dfrac{1}{\lambda} \times p = 0$. Donner l'expression et la valeur de λ.

Question 18 : Résoudre l'équation différentielle précédente, en utilisant la condition aux limites en $z = 0$.

Question 19 : En déduire l'expression de $\mu(z)$.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ En étudiant un cube infinitésimal de fluide de volume $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g.\overrightarrow{e_z}$, établir la relation fondamentale de la statique des fluides.
- ☐ Pour un fluide incompressible, que peut-on dire de la masse volumique μ ? En déduire une expression simple de $p_A - p_B$ en fonction de μ, g, z_A et z_B, où A et B sont deux points quelconques du fluide.
- ☐ À l'aide de la relation fondamentale de la statique des fluides, établir l'expression de $p(z)$ dans une atmosphère isotherme assimilée à un gaz parfait. Déterminer la longueur caractéristique L de variation de la pression.

Chapitre 2 : Cinématique des fluides

Objectifs :

— Décrire les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs locales pertinentes.

— Évaluer le caractère divergent ou rotationnel d'un écoulement uniforme, à symétrie sphérique, à symétrie axiale (radiale ou orthoradiale) en connaissant l'expression du champ des vitesses.

— Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à flux conservatif.

— Connaître les propriétés d'un écoulement pour lequel le champ des vitesses est à circulation conservative.

Au concours ATS : $\varnothing$.

2.1 Grandeurs lagrangiennes et eulériennes

2.1.1 Mouvement d'un fluide

Dans ce chapitre, nous allons étudier le mouvement d'un fluide en écoulement. Il convient de définir ce que nous allons alors appeler vitesse d'un fluide.

Ce fluide est constitué de molécules, de taille microscopique, dont la trajectoire est composée par deux mouvements : un mouvement dû à l'agitation thermique de la molécule, totalement aléatoire et microscopique, et un mouvement dû à l'entraînement par les autres molécules, macroscopique. Si $\mathcal{R}$ est notre référentiel d'étude, et que l'on appelle P le point semblant se déplacer macroscopiquement, on a donc :

$$\underbrace{\vec{v}(\text{molécule}/\mathcal{R})}_{\text{inintéressante}} = \underbrace{\vec{v}^{\,*}(\text{molécule}/P)}_{\text{reliée à } T} + \vec{v}(P/\mathcal{R})$$

Cette dernière vitesse $\vec{v}(P/\mathcal{R})$, macroscopiquement mesurable, est la seule qui sera envisagée en mécanique des fluides.

2.1.2 Description lagrangienne

Pour décrire un écoulement fluide, on peut essayer de décomposer le fluide en méso-éléments, que l'on appelle « particules fluides » : c'est le point P défini précédemment. Il possède des coordonnées $x_P(t)$, $y_P(t)$, $z_P(t)$ et une vitesse $\vec{v_P}(t)$.

Si l'on choisit ce point de vue, il ne s'agit alors de rien d'autre qu'un problème de mécanique du point : si l'on connaît toutes les forces extérieures, on peut appliquer un PFD et conclure.

Cependant, un fleuve possède une infinité de particules fluides, et il faut donc faire une infinité de PFD (et multiplier cette infinité par 3 pour déterminer le nombre d'équations couplées à résoudre). Cette approche ne nous convient donc pas ici.

2.1.3 Description eulérienne

Un autre point de vue est de visualiser l'écoulement dans sa globalité. Au lieu de définir, par exemple, la température de chaque particule fluide $T_P(t)$, on va définir un champ de températures $T(x, y, z, t)$, écrit de manière plus compacte $T(M, t)$.

Ainsi, au lieu d'avoir une infinité de grandeurs $T_P(t)$, on va se limiter à une fonction de plusieurs variables M (point dans l'espace) et t (temps). Ce raisonnement peut être fait pour différentes grandeurs : $p(M, t)$ pour la pression, $\vec{v}(M, t)$ pour la vitesse, etc.

Il vient nécessairement que les dérivées sont à préciser : dérivée par rapport à l'abscisse x n'a probablement rien à voir avec la dérivation temporelle. On écrira donc respectivement $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x}$ ou $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, où les variables d'espace et de temps sont toutes les quatre décorrélées les unes par rapport aux autres !

Dans les chapitres de mécanique des milieux continus, nous utiliserons de manière systématique cette description de la matière, appelée description **eulérienne**. Par souci de généralisation, on notera $g(M, t)$ ou

$\vec{g}(M,t)$ une grandeur eulérienne quelconque, respectivement scalaire (température, pression) ou vectorielle (vitesse, accélération, force).

2.2 Lexique des écoulements

2.2.1 Écoulement stationnaire, écoulement uniforme

Écoulement stationnaire

Un écoulement fluide est dit stationnaire si les grandeurs eulériennes le décrivant ne dépendent pas du temps :

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \vec{0}$$

☛ *Remarque :* Attention à ne pas confondre fluide à écoulement stationnaire et fluide statique ! Le premier impose que $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ (donc que la vitesse ne dépend pas du temps), alors que le second impose que $\vec{v} = \vec{0}$ en tout point du fluide. Un fluide statique est un cas particulier de fluide stationnaire, mais l'inverse n'est pas vrai.

Écoulement uniforme

Un écoulement fluide est dit uniforme si les grandeurs eulériennes le décrivant ne dépendent pas de l'espace :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial z} = \vec{0}$$

2.2.2 Écoulement rotationnel, écoulement irrotationnel

Écoulement rotationnel (ou tourbillonnaire, ou à circulation non-conservative)

Un écoulement fluide est dit **rotationnel** (ou **tourbillonnaire**, ou **à circulation non-conservative**) si le rotationnel du champ de vitesse est non-nul :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

☛ *Remarque :* On note alors parfois $\vec{\omega} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v}$ le vecteur-tourbillon autour duquel le fluide tourne.

☛ *Remarque :* Le rotationnel de $\overrightarrow{A}$ est un vecteur qui représente localement (c'est-à-dire en un point M précis) si $\overrightarrow{A}$ tourne autour de ce point M ($\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A} \neq \vec{0}$) ou non ($\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A} = \vec{0}$). On peut faire le « test de la brindille », en supposant que le champ de vecteurs représente un écoulement de fluide : si la brindille change d'orientation en un point suite à l'action du fluide, c'est que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A} \neq 0$.

On représente en figure 2.1 deux exemples d'écoulements rotationnels.

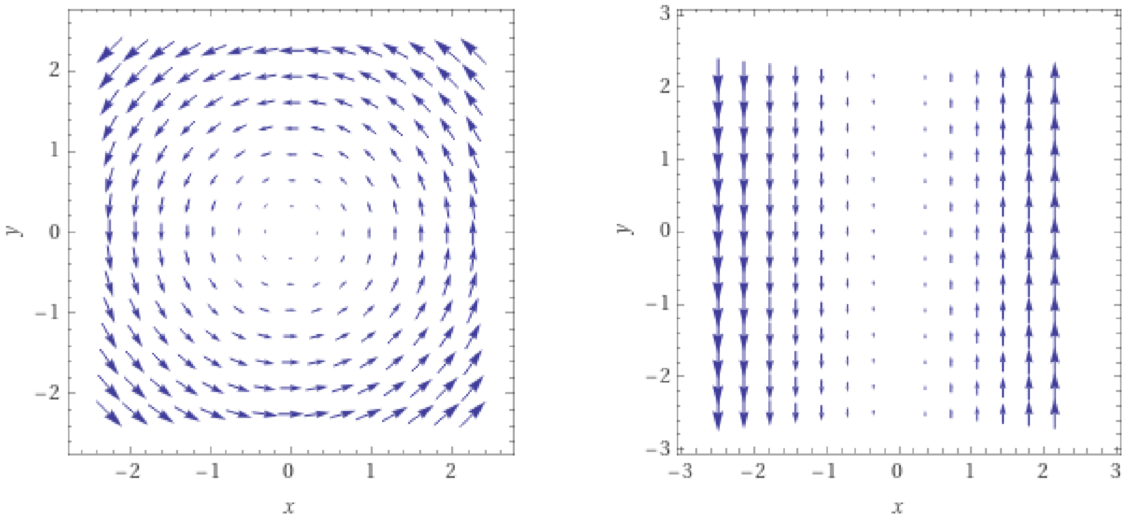


FIGURE 2.1 – En tout point de chacun des deux écoulements, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A} \neq \vec{0}$ et selon $+\overrightarrow{e_z}$ (une brindille tournera positivement autour de l'axe (O, z)).

Question 1 : Soit un fluide dont le champ des vitesses vérifie $\vec{v}(r) = r\Omega.\overrightarrow{e_\theta}$, exprimé en coordonnées cylindriques. Donner l'allure des lignes de champ des vitesses, puis montrer que l'écoulement est rotationnel. On utilisera l'expression du rotationnel en coordonnées cylindrique, donnée dans la feuille d'analyse vectorielle.

Écoulement irrotationnel (ou à circulation conservative)

Un écoulement fluide est dit **irrotationnel** (ou à **circulation conservative**) si le rotationnel du champ de vitesses est nul :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} = \vec{0}$$

Il vient alors que l'on peut écrire le champ des vitesses sous la forme d'un gradient :

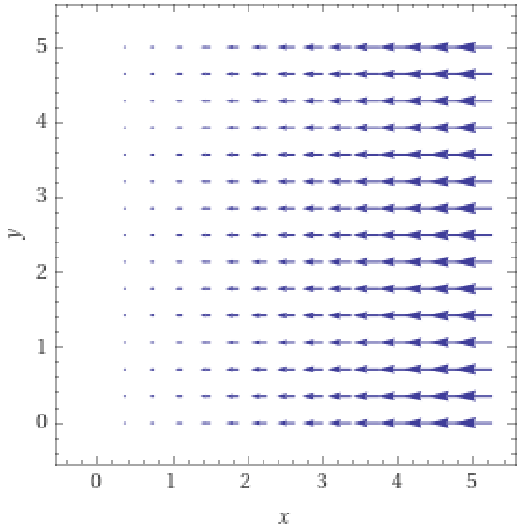
$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$$

On dit alors que le champ des vitesses découle d'un potentiel scalaire φ, et qu'il est à circulation conservative.

☛ *Remarque :* φ n'est absolument pas un flux. On choisit parfois la convention $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$, ce qui correspond juste à choisir le potentiel $-\varphi$.

☛ *Remarque :* La réciproque est également vraie : si $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$, alors $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v} = \vec{0}$.

On représente en figure 2.2 deux exemples d'écoulements irrotationnels.



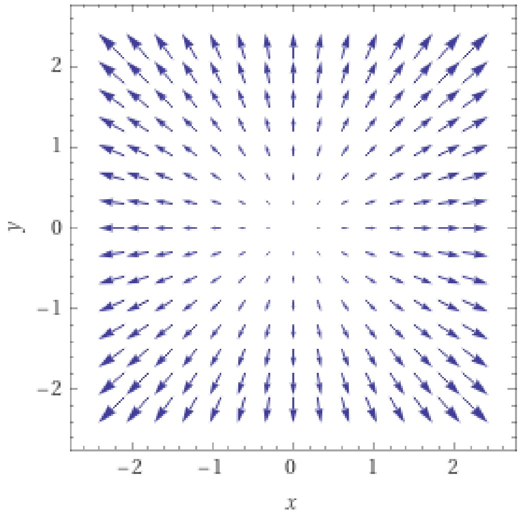


FIGURE 2.2 – En tout point de chacun des deux écoulements, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} = \vec{0}$ (une brindille se translatera mais ne changera pas d'orientation).

Question 2 : Soit un fluide dont le champ des vitesses vérifie $\vec{v} = 2axy.\overrightarrow{e_x} + ax^2.\overrightarrow{e_y}$. Montrer que ce champ est irrotationnel.

Question 3 : Déterminer le potentiel scalaire φ duquel découle le champ des vitesses.

2.2.3 Écoulement homogène, écoulement incompressible

Écoulement homogène

Un écoulement est **homogène** si la masse volumique μ du fluide est uniforme, c'est-à-dire si elle est identique en tout point de l'écoulement.

Écoulement incompressible

Un écoulement est **incompressible** si la masse volumique μ du fluide est uniforme et constante, c'est-à-dire si elle est identique en tout point et à tout instant de l'écoulement.

Question 4 : Un écoulement stationnaire et homogène est-il incompressible ? Justifier.

2.2.4 Écoulement à flux conservatif, écoulement à flux non-conservatif

Écoulement compressible à flux non-conservatif

Un écoulement fluide est dit **à flux non-conservatif** si la divergence du champ de vitesse est non-nulle :

$$\text{div}\ \vec{v} \neq 0$$

☛ *Remarque :* La divergence de $\overrightarrow{A}$ est un scalaire qui représente localement (c'est-à-dire en un point M précis) si $\overrightarrow{A}$ rentre davantage que ce qu'il sort (div $\overrightarrow{A} < 0$), si $\overrightarrow{A}$ sort davantage que ce qu'il rentre (div $\overrightarrow{A} > 0$), ou si $\overrightarrow{A}$ rentre autant que ce qu'il sort (div $\overrightarrow{A} = 0$).

On représente en figure 2.3 deux exemples d'écoulements à flux non-conservatif.

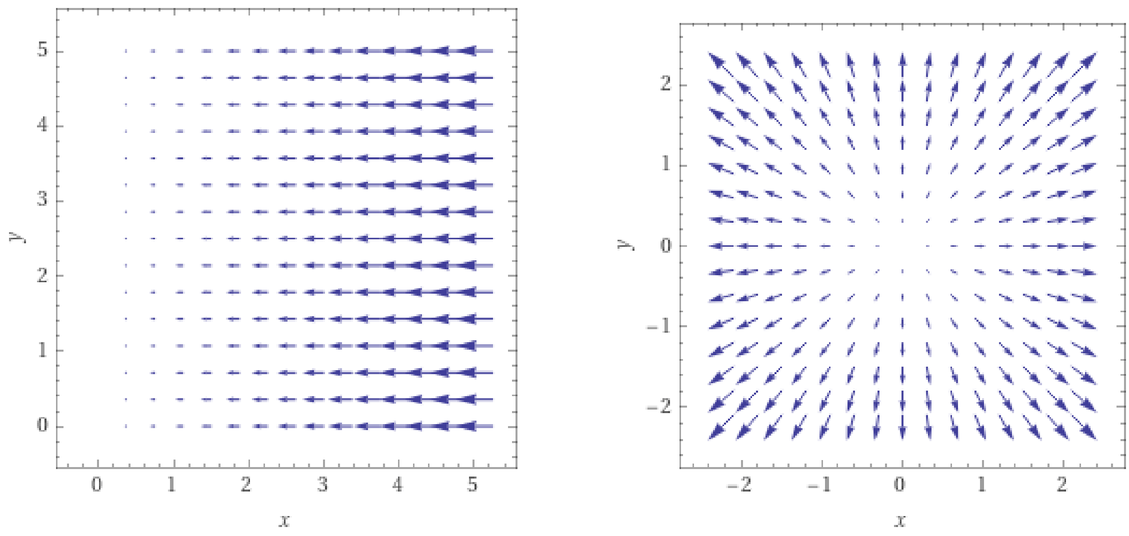


FIGURE 2.3 – En tout point de l'écoulement de gauche, on a div $\overrightarrow{A} < 0$ (le flux entrant est toujours supérieur au flux sortant). En tout point de l'écoulement de droite, on a div $\overrightarrow{A} > 0$ (le flux sortant est toujours supérieur au flux entrant).

Question 5 : Soit un fluide dont le champ des vitesses vérifie $\vec{v} = v_0 e^{-r/d}.\overrightarrow{e_r}$, exprimé en coordonnées cylindriques. Donner l'allure des lignes de champ des vitesses, puis montrer que l'écoulement est à flux non conservatif. On utilisera l'expression de la divergence en coordonnées cylindrique, donnée dans la feuille d'analyse vectorielle.

Écoulement à flux conservatif

Un écoulement fluide est dit **à flux conservatif** si la divergence du champ de vitesse est nulle :

$$\text{div } \vec{v} = 0$$

Il vient alors que l'on peut écrire le champ des vitesses sous la forme d'un rotationnel :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$$

On dit alors que le champ des vitesses découle d'un potentiel vecteur $\vec{A}$.

☛ *Remarque :* La réciproque est également vraie : si $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$, alors div $\vec{v} = 0$.

On représente en figure 2.4 deux exemples d'écoulements à flux non-conservatif.

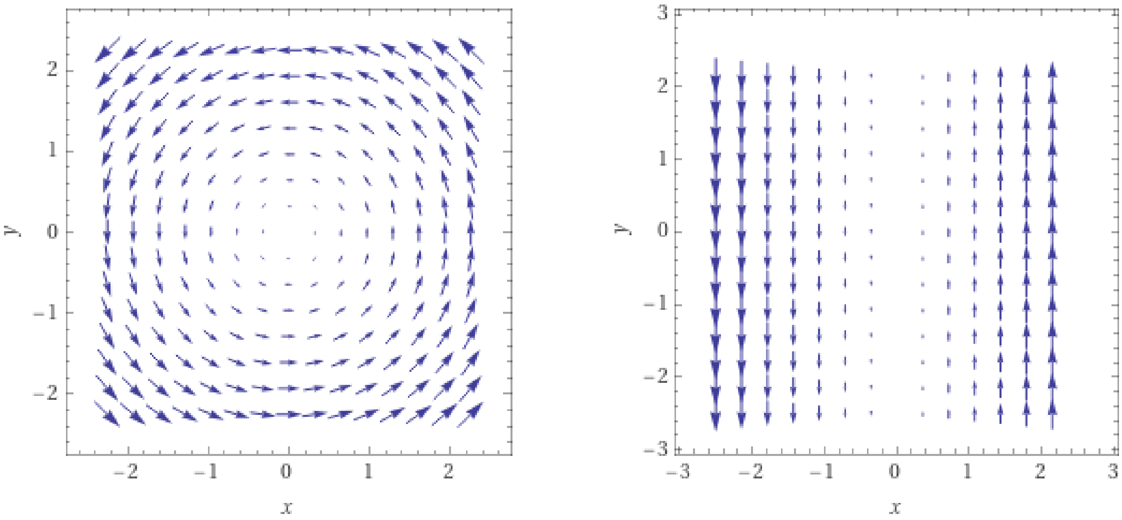


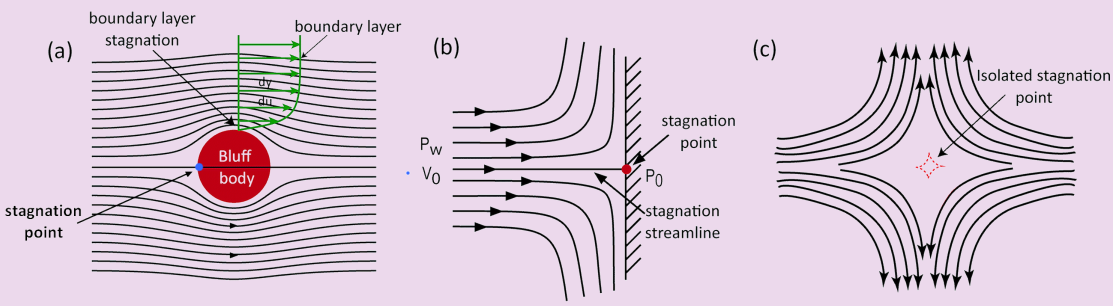
FIGURE 2.4 – En tout point de chacun des deux écoulements, on a div $\overrightarrow{A} = 0$ (le flux entrant compense toujours le flux sortant).

Question 6 : Soit un fluide dont le champ des vitesses vérifie $\vec{v} = az.\overrightarrow{e_y}$. Donner l'allure du champ des vitesses, puis montrer que ce champ est à flux conservatif.

2.2.5 Point d'arrêt

Point d'arrêt d'un écoulement

Soit un point A présent au sein d'un écoulement. On dit que A est un **point d'arrêt** si l'écoulement y bifurque dans plusieurs directions.
Il vient alors que la vitesse en un point d'arrêt est nul.



2.3 Pourquoi s'intéresse-t-on à la divergence et au rotationnel de $\vec{v}$?

Le théorème de Helmholtz-Hodge énonce que, pour tout champ de vecteur $\vec{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, il existe $\vec{A}$ et φ (définis respectivement à un gradient et à une constante près) tels que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A} - \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$.

Or, on sait que div $\overrightarrow{\text{rot}}\ = 0$ et que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ = \vec{0}$. Nécessairement, il vient que div $\vec{V} = -$div $\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$ et que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$.

On en déduit alors que, connaissant les valeurs de la divergence et du rotationnel du champ $\vec{V}$ (c'est-à-dire les valeurs respectives de $-$div $\overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi$ et de $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}$), on peut déterminer φ et $\vec{A}$, et ainsi reconstituer $\vec{V}$.

Dans le cas de la cinématique des fluides, il est aisé de déterminer visuellement si l'écoulement est à flux conservatif ou irrotationnel, et donc d'obtenir les valeurs de div $\vec{v}$ et de $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{v}$. Il vient alors que l'on peut déterminer totalement $\vec{v}$.

2.4 Application à l'écoulement d'un fluide autour d'une sphère

On considère un écoulement stationnaire et uniforme $\overrightarrow{v_0} = v_0.\overrightarrow{u_z}$. Dans cet écoulement, on place une sphère de centre O et de rayon R. On considère que l'écoulement est stationnaire, à flux conservatif et irrotationnel. Le nouveau champ des vitesses $\overrightarrow{v}(r, \theta)$ ainsi obtenu est représenté sur la figure 2.4.

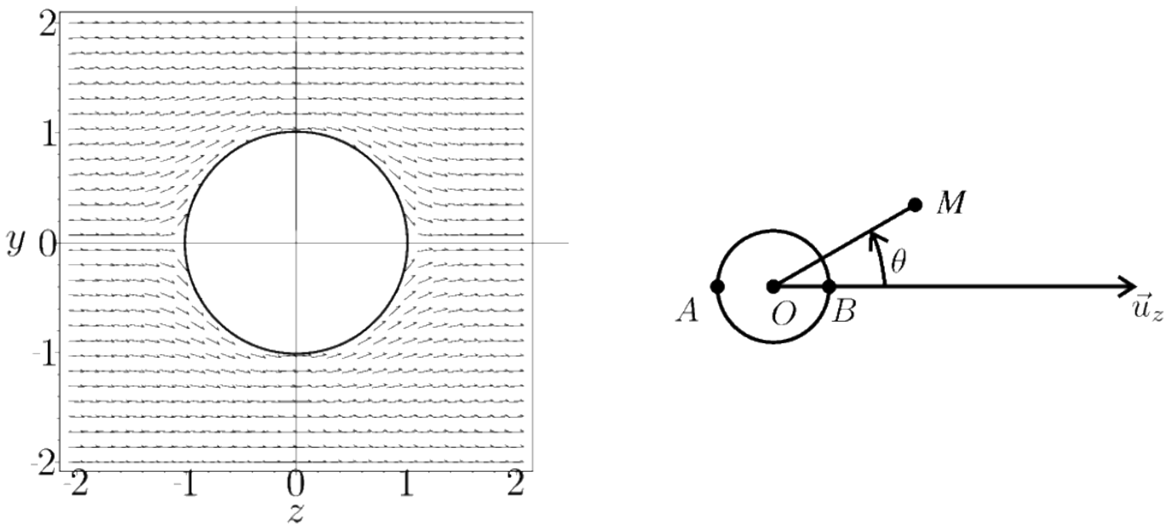


FIGURE 2.5 – Écoulement d'un fluide autour d'une sphère.

Question 7 : Expliquer pourquoi l'on peut affirmer l'existence d'une fonction ϕ telle que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \phi$.

Question 8 : On admet que ϕ peut s'écrire sous la forme $\phi = Ar\cos(\theta) + \dfrac{B\cos(\theta)}{r^2} + C$, où A, B et C sont des constantes. Exprimer $\overrightarrow{v}$, sachant que $\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \dfrac{\partial f}{\partial r}.\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}.\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}.\overrightarrow{e_\varphi}$ en coordonnées sphériques.

Question 9 : Que devient l'expression de $\overrightarrow{v}$ lorsque l'on est « suffisamment loin » de la sphère ? Montrer alors que l'on a $A = v_0$.

Question 10 : Que peut-on dire de la vitesse du fluide au point $(r = R, \theta = \pi)$? Justifier.

Question 11 : En déduire alors l'expression de B, puis celle de $\overrightarrow{v}$.

Question 12 : Vérifier que l'écoulement est à flux conservatif. On donne : div $\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta)A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$ en coordonnées sphériques.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Définir les termes : écoulement stationnaire, écoulement uniforme, écoulement homogène et écoulement incompressible. Établir qu'un écoulement stationnaire et homogène est nécessairement incompressible. Un écoulement de fluide incompressible signifie-t-il nécessairement que le fluide est incompressible ? Justifier.
- ☐ Qu'est-ce qu'un écoulement irrotationnel ? Sous quelle forme peut-on alors écrire $\vec{v}$? Le champ des vitesses $\vec{v} = 3ax^2.\overrightarrow{e_y} - 2ay\overrightarrow{e_x}$ est-il irrotationnel ou tourbillonnaire ?
- ☐ Qu'est-ce qu'un écoulement à flux conservatif ? Sous quelle forme peut-on alors écrire $\vec{v}$? Le champ des vitesses $\vec{v} = 3ax^2.\overrightarrow{e_y} - 2ay\overrightarrow{e_x}$ est-il à flux conservatif ou à flux non-conservatif ?

Chapitre 3 : Débit massique, débit volumique

Objectifs :

— Définir le vecteur densité de flux de masse.

— Exprimer les débits massique et volumique.

— Établir un bilan local et global de matière en régime stationnaire.

— Établir qu'en régime stationnaire le champ des vitesses d'un écoulement homogène est à flux conservatif.

Au concours ATS : Aux écrits en 2022, 2020, 2019, 2018, 2016. Tombe parfois aux oraux.

3.1 Débit massique

Vecteur densité de masse

Soit un déplacement de particules fluides dans l'espace. On note respectivement $\mu(M,t)$ et $\vec{v}(M,t)$ la masse volumique et la vitesse eulériennes de l'écoulement.
On définit alors le **vecteur densité** (volumique) **de masse** $\vec{J}$ comme :

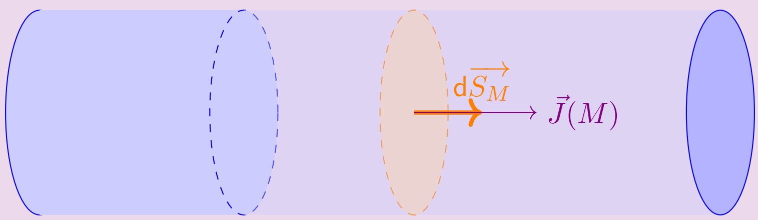
$$\vec{J} = \mu.\vec{v}$$

Remarque : Il s'agit d'une définition très proche de la densité volumique de courant vue dans le thème précédent. Cette nouvelle densité correspond à « la quantité de mouvement volumique » d'une particule fluide ; c'est également une grandeur eulérienne.

Débit massique

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté $\vec{v}$ et la masse volumique μ. Le **débit massique** de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égal au flux du vecteur densité de masse à travers cette surface :

$$\mathcal{D}_m = \iint_{M\in\mathcal{S}} \vec{J}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$$



Le débit massique s'exprime en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Remarque : On choisit généralement l'orientation de $\mathcal{S}$ telle que le débit massique soit positif.

On suppose l'écoulement uniforme sur la surface d'intégration $\mathcal{S}$, qui est orthogonale à la section de l'écoulement.

Question 1 : Comment se simplifie l'expression du débit massique ?

Question 2 : On attend une durée Δt ; les particules fluides initialement aux niveau de $\mathcal{S}$ se situent à une distance L de celle-ci. Quel est le lien entre v, L et Δt ?

Question 3 : En déduire une relation entre $\mathcal{D}_m$, Δt et la masse évacuée ΔM pendant cette durée.

Autre vision du débit massique

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté $\vec{v}$ et la masse volumique μ. Le débit massique de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égale à la masse débitée par unité de temps :

$$\mathcal{D}_m = \frac{\Delta M}{\Delta t}$$

3.2 Conservation de la masse

Supposons un écoulement *a priori* non stationnaire, et choisissons une surface $\mathcal{S}$ fermée quelconque. On sépare dans l'idée cette surface fermée en deux surfaces ouvertes : $\mathcal{S}_e$, qui correspond aux zones de $\mathcal{S}$ où l'écoulement entre, et $\mathcal{S}_s$, qui correspond aux zones de $\mathcal{S}$ où l'écoulement sort.

On note $\mathcal{M}(t)$ la masse de ce système à l'instant t.

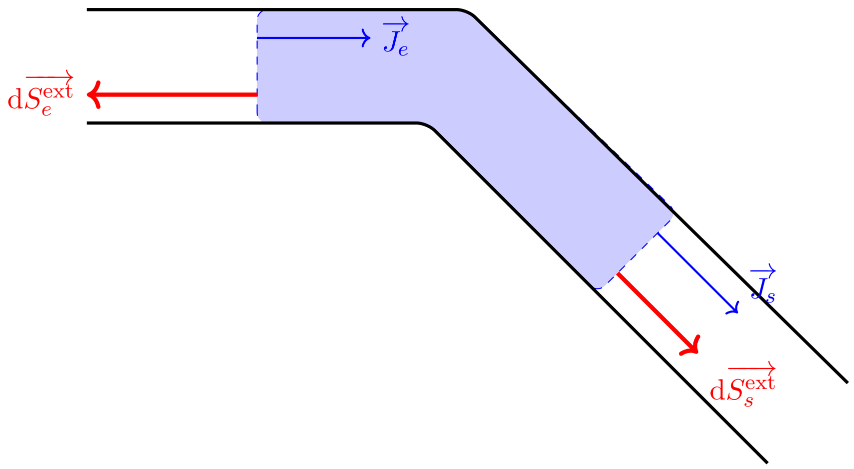


FIGURE 3.1 – Surface de contrôle étudiée.

Question 4 : Exprimer la masse $\delta\mathcal{M}_e$ entrant dans le système pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathcal{D}_{m,e}$, débit massique entrant. De même, exprimer la masse $\delta\mathcal{M}_s$ sortant du système pendant cette durée $\mathrm{d}t$ en fonction de $\mathcal{D}_{m,s}$, débit massique sortant.

Question 5 : Justifier que $\delta\mathcal{M}_e - \delta\mathcal{M}_s = \mathcal{M}(t+\mathrm{d}t) - \mathcal{M}(t)$. En divisant cette équation par $\mathrm{d}t$, déterminer une équation liant $\mathcal{M}(t)$ et les débits massiques.

Équation intégrale de conservation de la masse

Soit un fluide en écoulement dans un système Σ, dont on note la masse au cours du temps $\mathcal{M}(t)$. La masse se conservant, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{D}_{m,e} - \mathcal{D}_{m,s}$$

où $\mathcal{D}_{m,e}$ et $\mathcal{D}_{m,s}$ sont les débits massiques respectivement entrant et sortant du système.

Question 6 : Exprimer $\mathcal{M}(t)$ en fonction de $\mu(M,t)$, masse volumique du fluide dépendant de sa position M, du temps t et d'une triple intégrale sur le volume. En déduire la nouvelle expression de $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathrm{d}t}$, sachant que le système étudié a une frontière indépendante du temps.

Question 7 : Pour chaque élément de surface $\mathrm{d}S$ de $\mathcal{S}$, on prend la convention d'orienter $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ vers l'extérieur. Exprimer $\mathcal{D}_{m,e}$ et $\mathcal{D}_{m,s}$ en fonction de $\vec{J}$ et de $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$. On notera rigoureusement les surfaces d'intégration.

Question 8 : Que vaut le débit massique $\mathcal{D}_{m,\mathrm{lat}}$ associé aux parois latérales ?

Question 9 : En déduire alors que le second membre de l'équation intégrale de conservation de la masse peut s'écrire $-\oiint_{\mathcal{S}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$.

Question 10 : On rappelle le théorème de Green-Ostrogradski : $\underset{\mathcal{S}}{\oiint} \overrightarrow{A} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S^{\text{ext}}} = \underset{\mathcal{V} \text{ contenu dans } \mathcal{S}}{\iiint} \text{div } \overrightarrow{A} \, \mathrm{d}V$.
Déduire des raisonnements précédents une équation aux dérivées partielles portant sur $\overrightarrow{J}$ et μ.

Équation locale de conservation de la masse

Soit un fluide de masse volumique μ et de vecteur densité de masse $\overrightarrow{J}$. Le fait que la masse se conserve localement s'écrit, mathématiquement :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div } \overrightarrow{J} = 0$$

Remarque : Il s'agit d'une équation très similaire à celle que l'on a précédemment vue pour la conservation de la charge électrique !

Question 11 : Que devient l'équation locale de conservation de la masse en régime stationnaire ? Et l'équation intégrale ?

Conservation de la masse en régime stationnaire

Pour un écoulement stationnaire, la divergence de la densité de masse est nulle :

$$\text{div } \vec{J} = 0$$

On en déduit que le débit massique se conserve en régime stationnaire : $\mathcal{D}_m^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_m^{\text{sortant}}$.

3.3 Débit volumique

3.3.1 Définitions

Débit volumique

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté $\vec{v}$. Le débit volumique de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égal au flux de la vitesse à travers cette surface :

$$\mathcal{D}_v = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{v}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S_M}$$

Le débit volumique s'exprime en m^3/s.
Si le champ de vitesse est uniforme sur la section $\mathcal{S}$ d'intégration, on a alors $\mathcal{D}_v = v \times S$.

☛ *Remarque :* On choisit généralement l'orientation de $\mathcal{S}$ telle que le débit volumique soit positif.

Autre vision du débit volumique

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté $\vec{v}$. Le débit volumique de cet écoulement à travers une surface $\mathcal{S}$ est égale au volume débité par unité de temps :

$$\mathcal{D}_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

3.3.2 Cas d'un écoulement stationnaire et homogène

On suppose que l'écoulement est stationnaire et homogène [1] : μ ne dépend ni de l'espace, ni du temps.

Question 12 : Comment se simplifie alors l'équation locale de conservation de la masse ?

Champ des vitesses d'un écoulement homogène en régime stationnaire

En régime stationnaire, la divergence du champ des vitesses d'un écoulement homogène est nul :

$$\mathrm{div}\ \vec{v} = 0$$

On en déduit qu'un écoulement incompressible est nécessairement à flux conservatif. Nécessairement, par application du théorème de Green-Ostrogradski, on en déduit que le débit volumique se conserve en régime stationnaire et pour un écoulement homogène : $\mathcal{D}_v^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_v^{\text{sortant}}$.

1. On rappelle que { stationnaire et homogène } = incompressible.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner les définitions du vecteur densité de masse et du débit massique. Expliciter chacun des termes ainsi que leurs unités respectives.
- ☐ Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. Que devient-elle en régime stationnaire ? Qu'en déduit-on pour le débit massique le long d'une canalisation ? et au niveau d'un embranchement ?
- ☐ Donner la définition du débit volumique en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. À quelle condition peut-on écrire que le débit volumique est égal au produit de la vitesse d'écoulement par la section de l'écoulement ?
- ☐ Établir qu'en régime stationnaire le champ des vitesses d'un écoulement homogène est à flux conservatif. Qu'en déduire pour le débit volumique le long d'une canalisation ? et au niveau d'un embranchement ?

Chapitre 4 : Relation de Bernoulli

Objectifs :

— Définir un écoulement parfait.

— Énoncer, à l'aide d'un bilan d'énergie, la relation de Bernoulli en précisant les hypothèses.

— Établir un bilan de puissance pour un circuit hydraulique ou pneumatique avec ou sans pompe.

Au concours ATS : Aux écrits en 2022, 2020, 2019, 2018, 2016. Tombe parfois aux oraux.

4.1 Relation de Bernoulli

4.1.1 Notations et hypothèses

On s'intéresse, dans cette partie, à un fluide en écoulement **stationnaire** (aucune variable eulérienne ne dépend de t). On note μ la masse volumique du fluide, considéré comme **incompressible** (μ ne dépend donc ni du temps, ni de l'espace : $\mu = \text{cste}$).

L'écoulement est considéré comme **parfait** : il n'y a aucune chaleur échangée, et donc pas d'effets de viscosité ou de conduction de chaleur. Il vient alors que la température T est constante.

Le fluide n'est, de plus, soumis **qu'à son poids et aux forces de pression**.

On note $\vec{v}$ le champ des vitesses, $\vec{g} = -g.\vec{e_z}$ l'accélération de la pesanteur (la direction z est donc **ascendante** ici) et p le champ de pression.

4.1.2 Établissement de la relation

On étudie un système ouvert, très similaire à celui que nous avions étudié dans le thème de thermodynamique industrielle.

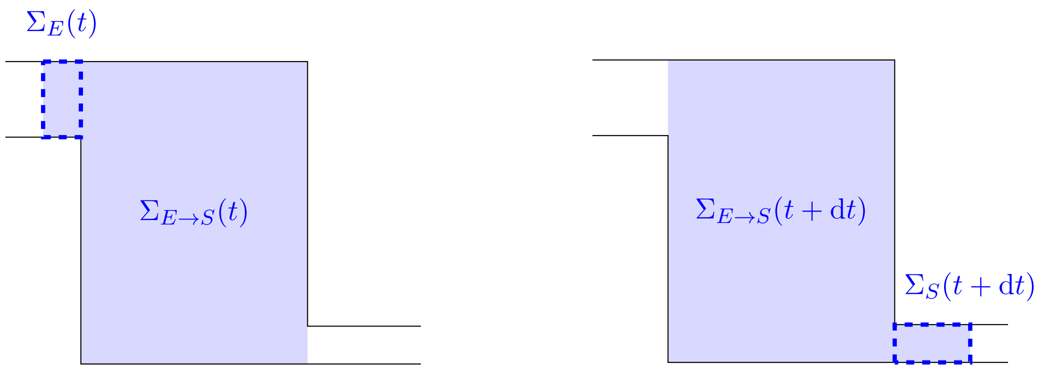


FIGURE 4.1 – Définition du système. Gauche : à l'instant t ; droite : à l'instant $t + \mathrm{d}t$.

Question 1 : Expliquer pourquoi $\mathcal{E}_m(\Sigma_{E\to S}(t)) = \mathcal{E}_m(\Sigma_{E\to S}(t+\mathrm{d}t))$, où $\mathcal{E}_m$ désigne l'énergie mécanique.

Question 2 : Exprimer $\delta\mathcal{E}_m(\Sigma_E(t))$ et $\delta\mathcal{E}_m(\Sigma_S(t+\mathrm{d}t))$ en fonction des données de l'énoncé (notamment μ).

Question 3 : Exprimer δW_E^p, travail des forces de pression en entrée, et δW_S^p, travail des forces de pression en sortie.

Question 4 : Appliquer enfin le théorème de la puissance mécanique au système étudié. Montrer qu'une grandeur est conservée au cours du temps.

Relation de Bernoulli

Soit un fluide parfait, incompressible et soumis uniquement à son poids et aux forces de pressions considéré en écoulement stationnaire. La quantité $X = p + \mu g z + \frac{1}{2}\mu v^2$, que l'on appelle la **charge**, se conserve **sur une ligne de courant**. En d'autres termes, si A et B sont sur une même ligne de courant, alors :

$$p_A + \mu\ g\ z_A + \frac{1}{2}\mu\ v_A^2 = p_B + \mu\ g\ z_B + \frac{1}{2}\mu\ v_B^2$$

☛ *Remarque :* Les hypothèses du relation de Bernoulli sont régulièrement demandées aux concours, que ce soit à l'écrit ou à l'oral.

☛ *Remarque :* p est parfois appelée « pression statique », car elle correspond à la pression dont on se fait l'idée dans le cas de l'hydrostatique. $\frac{1}{2}\mu v^2$ est alors la « pression dynamique » : elle correspond à la pression « ressentie » face à un écoulement d'air ou un jet d'eau suffisamment puissant.

4.2 Applications

4.2.1 Effet Venturi

Considérons l'écoulement d'un fluide dans une conduite dont la section diminue brièvement (figure 4.2). La vitesse sur une même section est considérée uniforme. L'écoulement est parfait, stationnaire et le fluide est incompressible. On note S_A la section de la conduite en A, et S_B la section de la conduite en B.

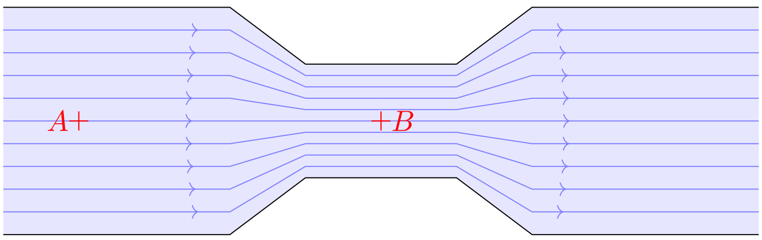


FIGURE 4.2 – Illustration de l'effet Venturi.

Question 5 : Exprimer le débit volumique au point A et au point B. Quelles hypothèses permet d'égaliser ces deux expressions ?

Question 6 : Appliquer la relation de Bernoulli entre les points A et B. Montrer alors que $p_B < p_A$.

☛ *Remarque :* Un rétrécissement de section entraîne une augmentation de la vitesse mais une diminution de la pression, ce qui peut paraître paradoxal.

☛ *Remarque :* Si les lignes de champ des vitesses se resserrent, on a donc un abaissement de la pression. À retenir pour certains exercices où ces lignes apparaissent !

4.2.2 Vidange de Torricelli

Soit une cuve cylindrique de section S remplie d'un fluide de masse volumique μ. Un tuyau de section $s \ll S$ permet de faire la vidange de la cuve. On note H la hauteur d'eau, A un point de la surface libre et B un point du tuyau en contact avec l'extérieur, tels que A et B font partie d'une même ligne de courant (voir figure 4.3).

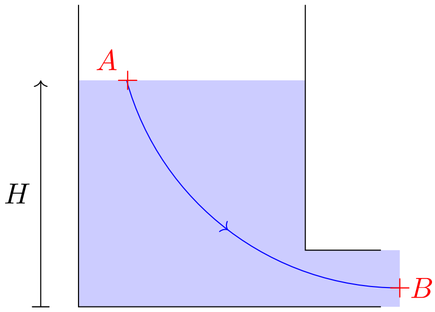


Figure 4.3 – Vidange d'une cuve.

Question 7 : Par conservation du débit, montrer que $v_A \ll v_B$. Quelle conséquence cela amène-t-il sur l'écoulement ?

Question 8 : Que valent les pressions en A et en B ? Justifier.

Question 9 : Appliquer la relation de Bernoulli entre A et B. En déduire la vitesse d'écoulement en B en fonction notamment de la hauteur d'eau H.

4.2.3 Tube de Pitot

Une sonde de Pitot est un dispositif, dont la taille fait quelques centimètres, et qui permet de déterminer la vitesse v d'un appareil (tel un avion) à partir de mesures de pressions.

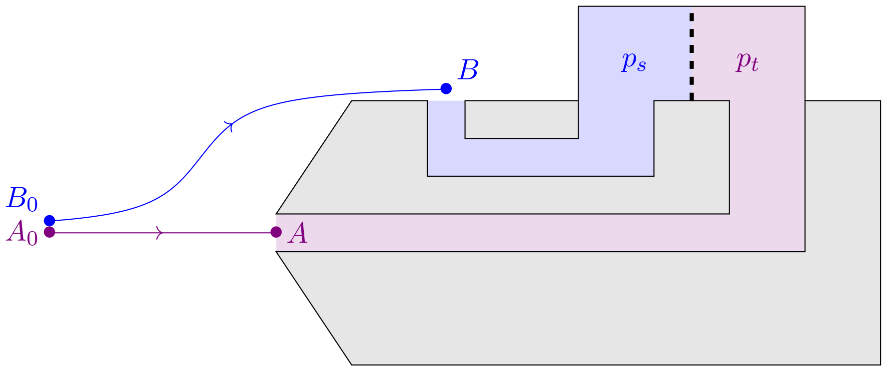


Figure 4.4 – Sonde de Pitot.

On négligera dans ce problème toute variation de hauteur. Les points A_0 et B_0 sont suffisamment proches l'un de l'autre et suffisamment éloignés de la sonde pour affirmer que la pression et la vitesse en ces points sont égales. Du point de vue de la sonde, la vitesse en ces points est égale à $-v$. A est un point d'arrêt : l'air, cherchant à s'échapper dans toutes les directions, a en moyenne une vitesse nulle en ce point.

On supposera l'air comme gaz incompressible, et l'écoulement comme stationnaire et parfait.

Question 10 : Appliquer la relation de Bernoulli sur les deux lignes de courants. En déduire une relation entre p_s, p_t, et v_B. Isoler v_B.

4.3 Relation de Bernoulli généralisée

4.3.1 Actions de pompes ou de turbines

On reprend les hypothèses du relation de Bernoulli, en en changeant cependant une : on suppose que le fluide reçoit une puissance utile $\mathcal{P}_u$ entre l'entrée et la sortie (positive si une pompe fournit effectivement cette puissance, négative si la puissance est cédée à une turbine).

Question 11 : Montrer, en reprenant le raisonnement précédent, que $X_S - X_E = \dfrac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{D}_v}$, où $\mathcal{D}_v$ est le débit volumique.

Prise en compte de pièces mécaniques mobiles

Soit un fluide parfait, incompressible et soumis à son poids et aux forces de pressions considéré en écoulement stationnaire. Le fluide reçoit de plus, au cours de son écoulement, une puissance utile $\mathcal{P}_u$ de la part de l'extérieur. Si A et B sont sur une même ligne de courant, alors :

$$p_B + \mu\ g\ z_B + \frac{1}{2}\mu\ v_B^2 = p_A + \mu\ g\ z_A + \frac{1}{2}\mu\ v_A^2 + \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{D}_v}$$

Question 12 : Supposons que l'on veuille dimensionner une pompe pour qu'elle élève de l'eau d'une hauteur $H = 10\,\mathrm{m}$ à un débit volumique $\mathcal{D}_v = 20\,\mathrm{L}\cdot\mathrm{min}^{-1}$. Le conduit de transport a une section $S = 150\,\mathrm{cm}^2$; la sortie et l'entrée sont à la pression atmosphérique. Déterminer la puissance $\mathcal{P}$ à apporter à la pompe pour qu'elle fonctionne en respectant ce cahier des charges.

4.3.2 Pertes de charge

La modélisation utilisée pour l'établissement du relation de Bernoulli est bien évidemment idéale : il n'y a pas de pertes énergétiques considérées le long d'une ligne de courant. En réalité, les forces de viscosité existent, et le fluide peut être au contact de pièces mobiles. On sépare les dissipations selon deux catégories :

— Les pertes de charge régulières : elles correspondent aux pertes dues aux effets de viscosité au niveau des parois. Comme leur nom l'indique, ces pertes ont lieu en tout point des parois : plus la canalisation sera longue, plus les pertes de charge le seront (et ce de manière proportionnelle) ;

— Les pertes de charge singulière : elles correspondent aux pertes dues aux changements de géométrie des parois (rétrécissement, coude...). Comme leur nom l'indique, ces pertes n'ont lieu qu'au niveau du changement de géométrie.

Ces pertes sont qualifiées « de charge » car elles correspondent à l'écart de charge $X \triangleq p + \mu g z + \frac{1}{2}\mu v^2$ entre l'amont[1] et l'aval[2]. X étant homogène à une pression, on note généralement les pertes de charge $\Delta p > 0$ (même si elles ne correspondent pas forcément à un écart de pression pour le fluide) ; l'unité est donc le pascal Pa. Il vient alors que $X_{\text{aval}} = X_{\text{amont}} - \Delta p$.

Prise en compte des pertes de charge dans la relation de Bernoulli

Soit un fluide incompressible et soumis à son poids et aux forces de pressions considéré en écoulement stationnaire. Si A et B sont sur une même ligne de courant, et que Δp_{AB} est la perte de charge entre ces deux points alors :

$$p_B + \mu\ g\ z_B + \frac{1}{2}\mu\ v_B^2 = p_A + \mu\ g\ z_A + \frac{1}{2}\mu\ v_A^2 - \Delta p_{AB}$$

1. C'est-à-dire en entrée de l'écoulement.
2. C'est-à-dire en sortie de l'écoulement.

Question 13 : On reprend l'exercice précédent de la pompe. On a des pertes de charge régulières de $k = 20\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, avec une longueur totale de canalisation de $L = 20\,\mathrm{m}$. Déterminer quelle est la nouvelle puissance de pompe $\mathcal{P}'$ nécessaire.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Énoncer la relation de Bernoulli ainsi que toutes ses hypothèses.
- ☐ (Exercice de l'effet Venturi) Soit un écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide parfait dans une canalisation horizontale. Montrer qu'un rétrécissement de section induit une modification de la pression.
- ☐ (Exercice de la vidange de Torricelli) Soit une cuve se vidant par le bas. Le fluide contenu dans la cuve est parfait et incompressible, et le niveau d'eau en haut de la cuve est constant. On note H la dénivellation entre le haut de la cuve et sa sortie. Déterminer la vitesse v de l'écoulement en sortie.
- ☐ Exercice de la sonde de Pitot.
- ☐ Soit un fluide incompressible en écoulement stationnaire ; I et F sont deux points d'une même ligne de courant, avec I en amont et F en aval. Au cours de l'écoulement, il y a une perte de charge totale Δp et une pompe de puissance $\mathcal{P}$. Énoncer la relation de Bernoulli généralisée dans ce cas de figure.