Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 5 : Phénomènes électriques

Travaux dirigés

Exercice faisant uniquement appel à des outils mathématiques ——— √x
Exercice facile et/ou proche du cours ———
Exercice accessible mais demandant du recul sur le cours et/ou sur les outils mathématiques ———
Exercice complexe, de par son côté calculatoire et/ou astucieux ———

Il est normal de « bloquer » sur les **exercices** : personne ne s'attend à ce que vous sachiez les faire en cinq minutes seulement. Il faut cependant persévérer, avoir le cours à côté afin de voir si un raisonnement similaire a déjà été abordé, et ne pas hésiter à parler avec vos camarades ou votre professeur.

Les **problèmes** sont issus d'annales de concours et/ou d'examens. Ils sont au moins aussi importants à aborder que les exercices, car ils sont les plus proches (en terme de rédaction et de questions « bout-à-bout ») de ce que vous aurez en devoir surveillé ainsi qu'au concours.

Chapitre 1 : Aspect macroscopique du champ électrostatique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Définir et utiliser une fonction densité volumique, surfacique ou linéique de charges	1.1
Définir la notion de ligne de champ électrostatique et prévoir la topographie des lignes de champ	1.3, 1.4
Repérer les symétries d'une distribution	1.3, 1.4

Questions de cours

- ☐ Donner les définitions et unités de la densité linéique de charge λ, de la densité surfacique de charge σ et de la densité volumique de charge ρ.
- ☐ Calculer la charge totale d'une boule de rayon a dont la densité volumique de charge est $\rho(r) = \rho_0 \times \left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right)$.
- ☐ Rappeler la loi de Coulomb. Dans quel(s) cas la force électrique entre deux corps est-elle attractive ? répulsive ?
- ☐ Tracer les lignes de champ électrique pour une sphère chargée positivement et pour une sphère chargée négativement.
- ☐ Tracer les lignes de champ électrique pour un cylindre infini chargé positivement et pour un cylindre infini chargé négativement.
- ☐ Tracer les lignes de champ électrique pour un plan infini chargé positivement et pour un plan infini chargé négativement.
- ☐ Définir ce qu'est un plan de symétrie des charges. Que peut-on dire du champ électrique en un point de ce plan ?
- ☐ Définir ce qu'est un plan d'antisymétrie des charges. Que peut-on dire du champ électrique en un point de ce plan ?
- ☐ Rappeler l'expression du principe de Curie et expliquer en quoi il s'applique à l'étude du champ électrique.

Exercices

1.1 Calcul de densités

1. On charge une sphère de rayon $10\,\mathrm{cm}$ avec $50\,\mathrm{C}$. Ces charges se répartissent exclusivement en surface et de manière uniforme. Déterminer la densité surfacique.
2. Sachant que la distance inter-atomique et d'environ $d \approx 1\,\mathrm{nm}$, estimer la densité volumique d'atomes dans la matière. Si ces atomes sont en fait des ions chargés $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, évaluer la densité volumique de charge dans le milieu.

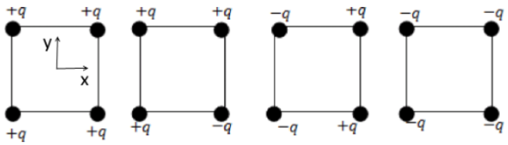
1.2 Calculs de charges

Pour les différents cas ci-dessous, calculer la charge totale Q.

1. Fil de longueur L et de densité linéique $\lambda(x) = 3q_0 \dfrac{x}{L^2}$;
2. Cylindre de hauteur H, de rayon R et de densité volumique $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$;
3. Sphère de rayon R et de densité surfacique $\sigma(\theta) = \sigma_0 \sin(\theta)$. On utilisera le fait que $\sin^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$;
4. Cercle de rayon R et de densité linéique $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin(\theta/3)$.

1.3 Distribution ponctuelle

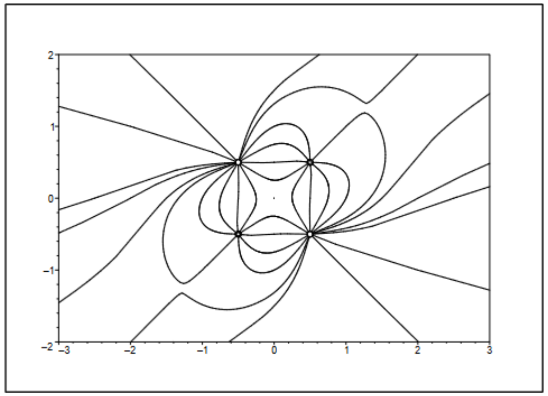
Soient quatre charges sphériques quasi-ponctuelles telles que :



À l'aide d'arguments de symétrie, représenter le champ électrostatique au centre du carré dans chaque situation.

1.4 Lignes de champ

Quatre charges sont disposées aux quatre coins d'un carré. Celle en haut à droite est positive.



1. Orienter les lignes de champ et en déduire le signe de chaque charge.
2. Déterminer les symétries du champ électrostatique.
3. Y a-t-il un point de champ nul ?

Chapitre 2 : Théorème de Gauss

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Repérer les invariances d'une distribution	2.1, 2.2, 2.3, 2.4
Utiliser le théorème de Gauss pour calculer un champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie (plan, cylindre, sphère)	2.1, 2.2, 2.3, 2.4

Questions de cours

- ☐ Donner l'expression du théorème de Gauss en explicitant chacune des grandeurs ainsi que leurs unités respectives.
- ☐ Déterminer en tout point de l'espace l'expression du champ électrostatique créé par une boule de rayon a et de densité volumique de charge ρ_0 uniforme.
- ☐ Déterminer en tout point de l'espace l'expression du champ électrostatique créé par un cylindre infini de rayon a et de densité surfacique de charge σ_0 uniforme.
- ☐ Déterminer en tout point de l'espace l'expression du champ électrostatique créé par un plan infini de densité surfacique de charge σ_0 uniforme.

Exercices

2.1 Champs à savoir calculer expressément !

Exprimer le champ électrostatique en tout point M pour :

1. Une boule chargée uniformément en volume ($\rho = \rho_0 =$ cste) ;
2. Un cylindre chargé uniformément en volume ($\rho = \rho_0 =$ cste) ;
3. Un fil de densité linéique de charge uniforme ($\lambda = \lambda_0 =$ cste) ;
4. Un plan chargé uniformément en surface ($\sigma = \sigma_0 =$ cste) ;
5. Un cylindre chargé uniformément en surface sur sa paroi latérale ($\sigma = \sigma_0 =$ cste) ;
6. Une sphère chargée uniformément en surface ($\sigma = \sigma_0 =$ cste).

2.2 Modèle simplifié de l'atome

On considère un atome simplifié constitué d'un noyau de rayon R_1, chargé en volume avec une densité uniforme ρ_0, ainsi que d'un nuage électronique assimilé à une sphère de rayon R_2 et de densité surfacique uniforme $-\sigma_0$.

1. Par électroneutralité de l'atome, établir un lien entre ρ_0, σ_0, R_1 et R_2.
2. Donner l'expression de la charge intérieure $Q_{\text{int}}(r)$ pour une sphère de centre O et de rayon r, en fonction de r.
3. Donner alors l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ en fonction de r.

2.3 Champ créé par une boule chargée non uniformément

On considère une boule de rayon R, chargée suivant la distribution de charge $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$ si $r \leq R$, et $\rho(r) = 0$ si $r > R$.

1. Déterminer l'expression de la charge totale Q_{tot} portée par cette boule.
2. Déterminer l'expression du champ électrostatique en dehors de la boule. On détaillera toutes les étapes.
3. Déterminer ensuite l'expression du champ électrique en un point quelconque à l'intérieur de la boule.

2.4 Théorème de Gauss gravitationnel

On admet que la force gravitationnelle $\overrightarrow{F^g_{1\to2}}$ qu'exerce une système de masse totale m_1 sur une masse ponctuelle m_2 peut s'écrire :

$$\overrightarrow{F^g_{1\to2}} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{d^2}.\overrightarrow{e_{1\to2}}$$

où $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI}$ est la constante universelle de gravitation et d la distance entre les deux masses. $\overrightarrow{e_{1\to2}}$ représente le vecteur unitaire orienté du centre de gravité de la masse m_1 vers celui de la masse m_2.

1. Rappeler l'expression de la force électrique $\overrightarrow{F^e_{1\to2}}$ qu'exerce une charge q_1 sur une charge q_2. En déduire un système d'analogies entre $\mathcal{G}$, m_1, m_2, ε_0, q_1, q_2.
2. À l'aide des expressions du poids et de la force électrique, montrer que l'on peut écrire, toujours par analogie, que $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = k \times M_{\text{int}}$, où k est une grandeur à expliciter et M_{int} la masse intérieure à la surface fermée $\mathcal{S}$.
3. En admettant que le champ de pesanteur $\vec{g}$ suit les mêmes règles de symétrie que le champ $\vec{E}$, déterminer $\vec{g}$ en dehors et en dedans de la Terre, que l'on modélisera par une boule uniforme.
4. Que vaut $||\vec{g}||$ à la surface de la Terre ? On prendra un rayon terrestre $R_T = 6371\,\mathrm{km}$ et une masse terrestre $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Commenter.
5. Que vaut $||\vec{g}||$ au centre de la Terre ? Commenter.

Chapitre 3 : Tension et potentiel

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Calculer le potentiel associé à un champ électrique	tous

Questions de cours

- ☐ Donner la définition de la tension électrique U_{AB} entre deux points A et B. Après avoir rappelé en quoi consiste la conservation de la circulation du champ électrostatique, en déduire la loi d'additivité des tensions et la loi des mailles.
- ☐ Donner l'expression du gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\ F$ d'un champ scalaire $F(x, y, z)$. Quelle est l'interprétation géométrique de $\overrightarrow{\text{grad}}\ F$?
- ☐ Donner le lien entre le potentiel électrique V et le champ électrique $\overrightarrow{E}$. Justifier qu'une tension peut être vue comme une différence de potentiels.
- ☐ Qu'est-ce qu'une équipotentielle ? À l'aide d'un schéma, expliciter le lien géométrique entre les lignes de champ électrique et ses équipotentielles.

Exercices

3.1 Calculs de gradients

Calculer les gradients des fonctions suivantes :

1. $f_1(x, y, z) = 2x^2 + 3y - z$;
2. $f_2(x, y, z) = 3x^2y^5 + z^4$;
3. $f_3(x, y, z) = \dfrac{y^2}{x \times z^2}$;
4. $f_4(x, y, z) = xe^{-z} \times \ln(y)$;
5. $f_5(r, \theta, z) = rz\theta$ en coordonnées cylindriques (utiliser la feuille d'analyse vectorielle).

3.2 « Inversion » de gradients

Déterminer les potentiels V_i associés aux champs $\overrightarrow{E_i}$:

1. $\overrightarrow{E_1} = 2xy\overrightarrow{e_x} + x^2\overrightarrow{e_y}$;
2. $\overrightarrow{E_2} = y\overrightarrow{e_x} + \left(\dfrac{1}{y} - x\right)\overrightarrow{e_y}$;
3. $\overrightarrow{E_3} = -e^{-y}\overrightarrow{e_x} + xe^{-y}\overrightarrow{e_y}$.

3.3 Potentiel créé par une sphère uniformément chargée

Une sphère de rayon R contenant une charge q répartie uniformément dans son volume créé par un champ :

$$\overrightarrow{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}.\overrightarrow{e_r} & \text{si } r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}.\overrightarrow{e_r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

Calculer le potentiel associé, en le prenant nul à l'infini et en admettant que le potentiel est une fonction continue. On utilisera le gradient en coordonnées sphériques (utiliser la feuille d'analyse vectorielle).

Chapitre 4 : Aspect local du champ électrostatique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Énoncer le théorème de Coulomb et les relations de passage du champ électrostatique.	tous

Questions de cours

- ☐ Donner l'expression de la divergence div $\overrightarrow{A}$ d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(x,y,z)$. Quelle est l'interprétation géométrique de div $\overrightarrow{A}$?
- ☐ Rappeler l'équation de Maxwell-Gauss en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. Quelle est son interprétation physique ? À l'aide du théorème de Green-Ostrogradski, en déduire le théorème de Gauss.
- ☐ Donner l'expression du rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A}$ d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}(x,y,z)$. Quelle est l'interprétation géométrique de $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{A}$?
- ☐ Rappeler l'équation de Maxwell-Faraday de la statique en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. Quelle est son interprétation physique ?
- ☐ Qu'est-ce qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique ? Citer et démontrer ses propriétés (valeur interne du champ électrostatique, valeur de la tension entre deux points quelconque du conducteur, localisation des charges).
- ☐ Énoncer le théorème de Coulomb ; représenter schématiquement ce théorème.

Exercices

4.1 Propriétés mathématiques

1. Montrer que le gradient est un opérateur linéaire, c'est-à-dire que $\overrightarrow{\text{grad}}\ (V_1 + \lambda.V_2) = \overrightarrow{\text{grad}}\ (V_1) + \lambda.\overrightarrow{\text{grad}}\ (V_2)$ avec V_1 et V_2 deux potentiels dépendant de l'espace (x,y,z) et λ une constante.
2. Montrer que la divergence et le rotationnel sont des opérateurs linéaires.
3. Montrer que $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$ pour un champ $\overrightarrow{A}$ quelconque.

4.2 Calculs de divergences et de rotationnels

Pour chacun des cas ci-dessous, représenter le champ en quelques points et calculer la divergence ainsi que le rotationnel. Essayer alors de donner un sens physique à chacun des opérateurs...

1. $\overrightarrow{A_1} = a.\overrightarrow{e_x}$;
2. $\overrightarrow{A_2} = x.\overrightarrow{e_x}$;
3. $\overrightarrow{A_3} = -x.\overrightarrow{e_x}$;
4. $\overrightarrow{A_4} = x.\overrightarrow{e_y}$;
5. (*) $\overrightarrow{A_5} = a.\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques ;
6. (*) $\overrightarrow{A_6} = r.\overrightarrow{e_\theta}$ en coordonnées cylindriques.

Regarder également sur Youtube l'excellente vidéo de 3Blue1Brown : « *Divergence and curl : The language of Maxwell's equations, fluid flow, and more* » (youtu.be/rB83DpBJQsE).

4.3 Retour sur le champ créé par une plaque

Soit une plaque rectiligne et infinie chargée en surface ; on note σ_0 la densité surfacique, considérée comme uniforme. Cette plaque est contenue dans le plan $z = 0$.

1. Expliquer pourquoi $\overrightarrow{E} = E_z(z).\overrightarrow{e_z}$.
2. Quel lien peut-on établir entre $E_z(z)$ et $E_z(-z)$?
3. Par application de l'équation de Maxwell-Gauss, montrer que, de chaque côté du plan, on a $\dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$.
4. On déduit de la question précédente que $E_z =$ cste de chaque côté du plan ; on note $E_z(z > 0) = A$ et $E_z(z < 0) = B$. Quel est le lien entre A et B ?
5. Par application du théorème de Coulomb entre deux points très proches du plan, déterminer l'expression de A puis l'expression générale du champ électrostatique. Est-elle en accord avec celle issue du théorème de Gauss ?

4.4 Retour sur le champ créé par un cylindre

Soit un cylindre infini de rayon R chargé en volume ; on note ρ_0 la densité volumique, considérée comme uniforme, et (O, z) l'axe de révolution du cylindre.

1. Expliquer pourquoi $\overrightarrow{E} = E_r(r).\overrightarrow{e_r}$.
2. (a) En utilisant la fiche d'analyse vectorielle en coordonnées cylindriques et l'équation de Maxwell-Gauss, montrer que l'on a $\dfrac{\partial(rE_r)}{\partial r} = 0$ en dehors du cylindre.
   (b) Déterminer alors une expression de E_r en dehors du cylindre en fonction de r et d'une constante *a priori* arbitraire A.
3. En utilisant une démarche similaire à celle de la question précédente, montrer que $\dfrac{\partial(rE_r)}{\partial r} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0} r$ à l'intérieur du cylindre. En déduire une expression de E_r au sein du cylindre en fonction notamment de r et d'une constante *a priori* arbitraire B.
4. Lorsque $r \to 0$, vers quelle valeur tend E_r ? En déduire que nécessairement $B = 0$.
5. Y a-t-il une densité de charge à la surface du cylindre ? En déduire, par le théorème de Coulomb, que $\overrightarrow{E}(r = R^+) = \overrightarrow{E}(r = R^-)$.
6. Déterminer alors l'expression de A, puis l'expression générale du champ électrostatique. Est-elle en accord avec celle issue du théorème de Gauss ?

4.5 Retour sur le champ créé par une boule

En réutilisant les démarches des exercices précédents, déterminer le champ électrostatique créé par une boule de rayon R chargée uniformément en volume, dont la densité sera notée ρ_0.

On utilisera bien évidemment la fiche d'analyse vectorielle en coordonnées sphériques.

Chapitre 6 : Conduction électrique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Définir le vecteur densité de courant	6.3, 6.4, problème
Établir l'équation de conservation de la charge en régime variable	6.4
Expliquer que le vecteur densité de courant est à flux conservatif en régime stationnaire	problème
Énoncer la loi d'Ohm locale	problème
Expliquer l'effet Joule et définir la résistance électrique dans un conducteur	6.1, 6.2, problème

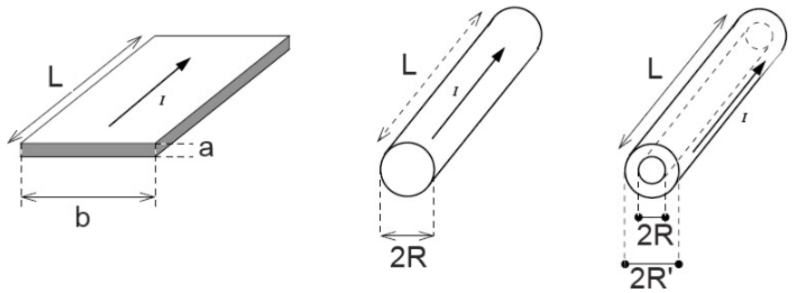
Questions de cours

- ☐ Rappeler la définition de la densité volumique de courant. On explicitera chacun des termes ainsi que leurs unités. Que représente physiquement la densité volumique de courant ?
- ☐ Quelle est la définition de l'intensité du courant ? Quel lien peut-on établir par ailleurs entre l'intensité du courant et le débit de charges électriques ?
- ☐ Établir l'équation locale de conservation de la charge unidimensionnelle.
- ☐ Énoncer la loi d'Ohm locale, en explicitant chacun des termes ainsi que leurs unités respectives. Donner l'ordre de grandeur de conductivité électrique dans un métal.
- ☐ À partir de la loi d'Ohm locale, démontrer la loi d'Ohm intégrale $U = R \times i$. Donner l'expression de R en fonction de la conductivité électrique, de la section du conducteur (supposée uniforme) et de sa longueur.
- ☐ Donner l'expression de la puissance volumique cédée par des porteurs de charge à la matière environnante. Sous quelle forme l'énergie est-elle échangée ? Commenter le signe.

Exercices

6.1 Résistance de différents conducteurs

Pour chacun des conducteurs ci-dessous, déterminer l'expression de la résistance électrique R.



6.2 Étude d'un fusible

D'après ses standards, un fusible de type T doit couper son courant nominal en une durée Δt comprise entre $10\,\mathrm{ms}$ et $100\,\mathrm{ms}$.

Soit un fusible en plomb de section $S = 2{,}5 \times 10^{-3}\,\mathrm{mm}^2$. On donne la capacité thermique massique du plomb $c = 129\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, sa masse volumique $\mu = 11{,}3 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, sa conductivité électrique $\gamma = 4{,}8 \times 10^6\,\Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ ainsi que sa température de fusion $T_{\text{fus}} = 327{,}5\,°\mathrm{C}$. Le courant nominal de ce fusible est de $1\,\mathrm{A}$. Respecte-t-il la norme d'un fusible de type T ?

6.3 Conductivité à haute fréquence

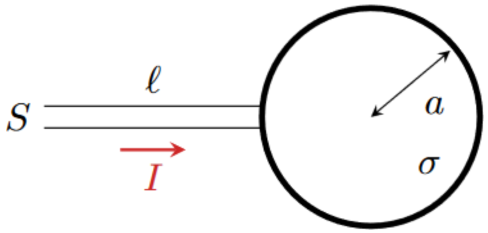
Dans un conducteur métallique, les électrons libres (charge $-e$ et masse m), de densité volumique n^*, ont une vitesse d'ensemble $\vec{v}$ par rapport au réseau cristallin et sont soumis de la part de ce dernier à une force de « frottements » en $-m\vec{v}/\tau$. On néglige la gravité.

1. Les électrons sont mis en mouvement par un champ électrique sinusoïdal $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)$. Déterminer l'équation du mouvement de l'électron.
2. En utilisant la notation complexe, exprimer $\underline{\vec{v}}$ en fonction des données de l'énoncé.
3. En déduire l'expression de la densité de courant $\underline{\vec{j}}$, puis l'expression de la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ en fonction de $\gamma_0 = n^* e^2 \tau / m$ et de $\omega\tau$.
4. Commenter l'expression de $\underline{\gamma}$ dans les cas extrêmes $\omega \ll 1/\tau$ et $\omega \gg 1/\tau$.

6.4 Charge d'une sphère

Une sphère de rayon a est mise sous tension afin d'être chargée électriquement. Elle est supposée parfaitement conductrice : les charges ne peuvent subsister qu'à sa surface, avec une densité surfacique $\sigma(t)$ supposée uniforme à tout instant.

Ces charges sont apportées par un fil de conductivité γ, de longueur ℓ et section S, parcouru par un courant d'intensité I, dont une extrémité est reliée à la sphère et l'autre à un générateur non représenté sur le schéma.



Le processus est supposé suffisamment lent pour que les résultats de l'électrostatique demeurent valables bien que σ dépende du temps.

1. Dans un premier temps, on suppose que la charge se fait à courant I constant. En procédant à un bilan de charge, déterminer l'évolution de la densité surfacique de charge $\sigma(t)$ en fonction du temps.

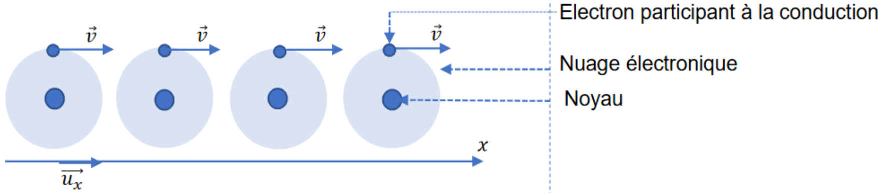
Dans un second temps, on suppose que c'est le potentiel V_0 imposé par le générateur qui demeure constant et non plus le courant I.

2. Le théorème de Gauss permet de montrer que le champ électrique créé par la sphère est nul à l'intérieur, et vaut à l'extérieur $\vec{E} = \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}.\vec{e_r}$. En déduire le potentiel V_s auquel se trouve la surface de la sphère en prenant comme référence $V = 0$ à l'infini.
3. En reprenant la démarche de la première question, établir l'équation différentielle vérifiée par $\sigma(t)$ et la résoudre.

Problème

Loi d'Ohm locale

On considère un échantillon de cuivre dont on note la masse volumique ρ et la masse molaire M. On adopte un modèle classique de la conduction électrique pour lequel chaque atome de cuivre possède un électron susceptible de se déplacer sur l'ensemble de l'échantillon sous l'action d'une force électrique.



On prête à chaque électron participant à la conduction une vitesse commune $\vec{v}$ (mesurée par rapport au référentiel galiléen lié à l'échantillon).

1. Établir l'expression de la concentration volumique n^* d'électrons mobiles (en m^{-3}) en fonction de ρ, M et $\mathcal{N}_a$ la constante d'Avogadro. On pourra utiliser l'analyse dimensionnelle ou toute autre méthode.
2. Calculer n^* sachant que $\rho \approx 1 \times 10^4\,\mathrm{kg/m^3}$, $M \approx 6 \times 10^1\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et $\mathcal{N}_a \approx 6 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

On impose à tout l'échantillon un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et stationnaire tel que $\vec{E} = -E.\vec{u_x}$ (avec $E > 0$). On rappelle que la charge de l'électron est $-e$ avec $e \approx 1 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Dans ces conditions, chaque électron est affecté d'une énergie potentielle de la forme $\mathcal{E}_p = -eEx + \mathcal{E}_{p,0}$ où $\mathcal{E}_{p,0}$ est une constante. Le mouvement rectiligne suivant $\vec{u_x}$ de chaque électron s'accompagne d'une force de frottements $\vec{f}$ donnée par $\vec{f} = -\dfrac{m}{\tau}.\vec{v}$ où m est la masse d'un électron et $\tau > 0$ est une constante. On négligera le poids de l'électron.

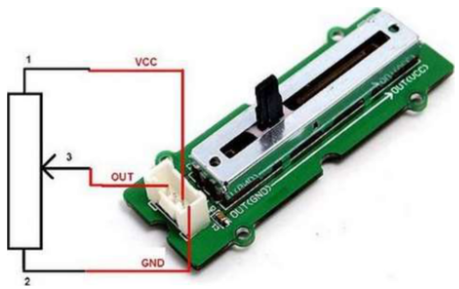
3. Appliquer le théorème de la puissance mécanique à un électron afin de montrer que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v}{\tau} = KE$. On donnera l'expression de K en fonction des constantes du sujet.
4. Donner la dimension de τ et proposer une interprétation de cette grandeur.
5. Donner l'expression de $v(t)$ sachant que $v(0) = 0$. Tracer l'allure de $v(t)$ et en déduire l'expression de sa valeur limite v_∞ en fonction de E, e, m et τ.
6. On donne $\tau \approx 1 \times 10^{-14}\,\mathrm{SI}$, $m = 1 \times 10^{-30}\,\mathrm{kg}$ et $E \approx 0{,}1\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$. Calculer v_∞ en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

En régime établi, le modèle étudié aboutit à la loi d'Ohm locale reliant le vecteur densité de courant $\vec{j}$ au champ électrique $\vec{E}$ tel que $\vec{j} = \gamma.\vec{E}$ où γ est une quantité réelle définissant la conductivité du matériau en régime stationnaire.

7. Exprimer $\vec{j}$ en fonction de m, e, τ, n^* et $\vec{E}$. En déduire l'expression de γ puis calculer sa valeur numérique.

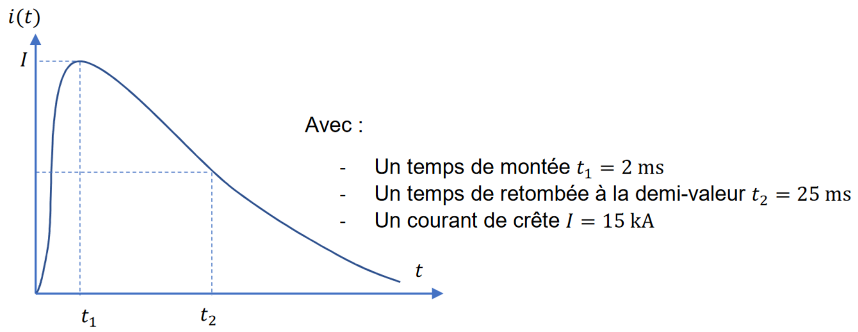
L'échantillon étudié est un barreau de cuivre cylindrique, homogène, de section S, de longueur ℓ. Le champ électrique uniforme et stationnaire est obtenu en appliquant une tension $U > 0$ entre les deux extrémités du cylindre. Le mouvement des électrons est à l'origine d'un courant dont l'intensité est nommée $I > 0$.

8. Démontrer la relation entre U, E et ℓ.
9. Donner la relation entre I, j et S.
10. Obtenir à partir des résultats précédents la loi d'Ohm $U = RI$ et donner l'expression de R en fonction de γ, S et ℓ.
11. La photo ci-après représente un potentiomètre à glissière utilisé, par exemple, dans les tables de mixage. Expliquer succinctement le principe de fonctionnement de ce potentiomètre.

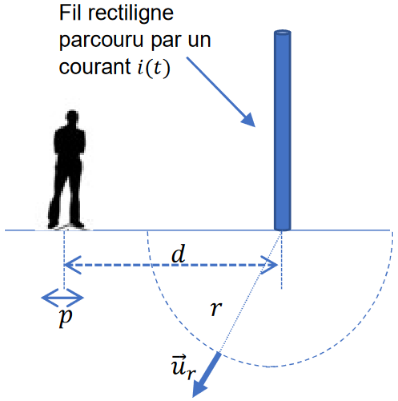


Comment se protéger de la foudre ?

Un coup de foudre est associé à un courant de forte intensité et de courte durée. La mesure de l'intensité du courant $i(t)$ conduit typiquement au graphe ci-dessous :



Un éclair est associé à un déplacement de charges et donc à un courant électrique. Dans l'air, on assimile ce courant à celui d'un fil rectiligne, parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ uniformément réparti. Dans le sol, on suppose que la densité de courant volumique est radiale, de la forme $\overrightarrow{j} = j(r,t).\overrightarrow{u_r}$ où $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire radial de la base sphérique. On se place dans l'approximation des régimes stationnaires, le sol est alors associé à une conductivité électrique réelle γ. Un homme se trouve à la distance moyenne d du point d'impact et la distance entre ses pieds est notée p.



12. Montrer que le champ électrique $\overrightarrow{E}(r,t)$ dans le sol a pour expression $\overrightarrow{E} = \dfrac{i(t)}{2\pi\gamma r^2}.\overrightarrow{u_r}$.

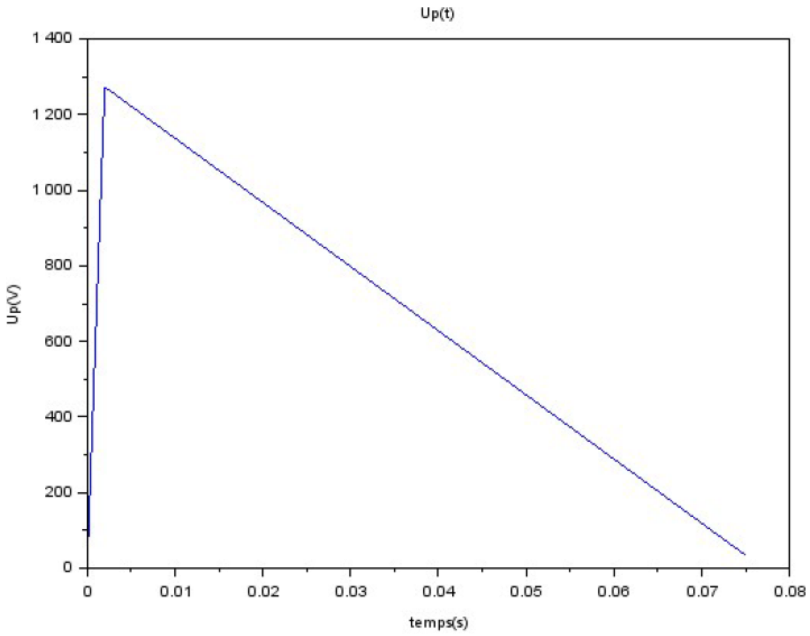
13. Montrer que l'expression de la différence de potentiel $U_p > 0$ entre les pieds de l'homme peut se mettre sous la forme $U_p = Ri$. On exprimera R en fonction de p, d et γ. On donne pour cette question l'opérateur gradient en repérage sphérique : $\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \dfrac{\partial f}{\partial r}.\overrightarrow{u_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}.\overrightarrow{u_\theta} + \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}.\overrightarrow{u_\varphi}$.

On prend $\gamma = 1\,\mathrm{S\cdot m^{-1}}$, $p = 0{,}5\,\mathrm{m}$ et $d = 1\,\mathrm{m}$. On assimile par la suite la fonction $i(t)$ à une fonction affine par morceaux.

14. À l'aide des documents 2 et 3 fournis ci-après, prévoir en le justifiant si la personne est en danger. Le tableau du document 2 indique, par exemple, qu'une tension de $230\,\mathrm{V}$ imposée à un individu entraîne un courant de $153\,\mathrm{mA}$ et qu'il ne faut pas dépasser $0{,}17\,\mathrm{s}$ d'exposition pour éviter tout risque.

Tension de contact Uc (V)	Impédance électrique du corps humain Zn (Ω)	Courant passant par le corps humain In (mA)	Temps de passage maximal tn (s)
50	1725	29	≥ 5
75	1625	46	0,60
100	1600	62	0,40
150	1550	97	0,28
230	1500	153	0,17
300	1480	203	0,12
400	1450	276	0,07
500	1430	350	0,04

Document 2 : Risque de chocs électriques sur le corps humain



Document 3 : Tracé de la fonction $U_p(t)$