

1 Statique des fluides

■ À revoir

■ Maîtrisé

1 Forces volumiques

On considère une particule de fluide de volume δV mésoscopique de masse volumique μ . Au lieu de considérer les forces $\delta \vec{F}$ s'appliquant sur cette particule, on s'intéresse aux forces volumiques $\vec{f} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta V}$ en N/m^3 .

On en déduit l'expression de deux forces classiques :

- Le poids volumique $\vec{f}_P = \mu \cdot \vec{g}$;
- La force volumique de pression $\vec{f}_p = -\text{grad } p$.

2 Relation de la statique des fluides

Si l'on applique le PFD à une particule de fluide statique uniquement soumise à son poids et aux forces de pression, on trouve la **relation de la statique des fluides** :

$$\vec{\text{grad}} p = \mu \cdot \vec{g}$$

- ♥ Si l'axe z est orienté vers le haut, alors $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$ et on a $\frac{dp}{dz} = -\mu g$.
- ♥ Si l'axe z est orienté vers le bas, alors $\vec{g} = g \cdot \vec{e}_z$ et on a $\frac{dp}{dz} = \mu g$.

On a donc *toujours* la pression qui augmente avec la profondeur et qui diminue avec l'altitude au sein d'un même fluide. En particulier, toujours au sein d'un même fluide, deux points de même altitude/de même profondeur auront la même pression.

Pour un fluide incompressible

Un fluide **incompressible** (ou **homogène**) a une masse volumique μ uniforme dans l'espace. Il vient que l'on peut intégrer la relation de la statique des fluides entre deux points A et B :

- Si l'axe z est orienté vers le haut, alors $p_A - p_B = -\mu g(z_A - z_B)$;
- Si l'axe z est orienté vers le bas, alors $p_A - p_B = +\mu g(z_A - z_B)$.

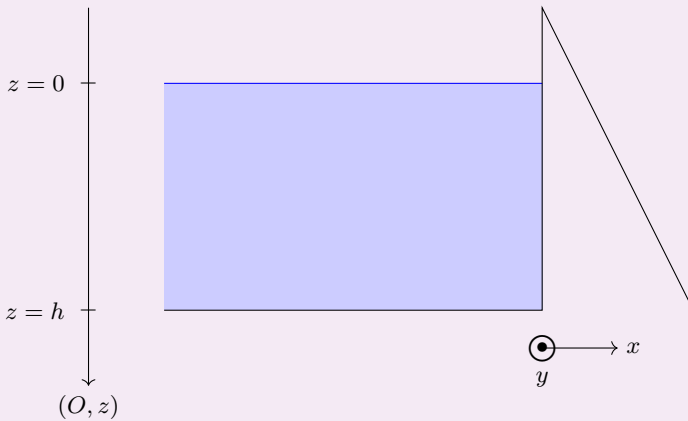


Force appliquée sur un barrage

Énoncé

Soit un barrage permettant de contenir l'eau (au repos) d'un réservoir. On prend un axe vertical descendant, dont l'origine correspond à la surface libre de l'eau (voir figure ci-dessous).

On note $p_{atm} = 1,0 \times 10^5$ Pa la pression atmosphérique, z la profondeur d'un point M quelconque du fluide et $\rho = 1,0 \times 10^3$ kg · m⁻³ la masse volumique uniforme de l'eau. Le barrage a une largeur $L = 50$ m selon la direction y , et l'eau va jusqu'à une profondeur $h = 10$ m.



Calculer la force pressante F que l'eau exerce sur le mur du barrage.



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

Résolution

Puisque le fluide est incompressible, la relation de la statique des fluides donne que $p(z) = p_{\text{atm}} + \rho g z$.

On a alors $\vec{F} = \iint_{\text{mur du barrage}} p(z) dS \cdot \vec{u}_x$. Ici, l'élément d'intégration est une petite surface de hauteur dz et de largeur dy : $dS = dy dz$, avec y et z variant respectivement dans les intervalles $[0, L]$ et $[0, h]$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \iint_{\text{mur du barrage}} (p_{\text{atm}} + \rho g z) dy dz \cdot \vec{u}_x \\ &= \int_{y=0}^{y=L} dy \times \int_{z=0}^{z=h} (p_{\text{atm}} + \rho g z) dz \cdot \vec{u}_x \\ &= L \times \left(p_{\text{atm}} \times h + \rho g \times \frac{h^2}{2} \right) \cdot \vec{u}_x \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } F = L \times \left(p_{\text{atm}} h + \rho g \frac{h^2}{2} \right) = 7,5 \times 10^7 \text{ N.}$$



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

Modèle de l'atmosphère isotherme

Énoncé

Considérons une atmosphère isotherme de température T dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g \cdot \vec{e}_z$ supposé uniforme, même à grande altitude. L'atmosphère est modélisée par un gaz parfait de masse molaire M . On note μ la masse volumique de l'atmosphère compressible ; p_0 représente l'altitude en $z = 0$.

Déterminer l'expression explicite de $p(z)$.

Résolution

La loi des gaz parfaits sur un volume mésoscopique δV donne : $p \times \delta V = \delta n \times R \times T$. Or $\delta n = \frac{\delta m}{M}$, donc on a finalement : $p \times \delta V \times M = \delta m \times R \times T$. Or $\mu = \frac{\delta m}{\delta V}$ donc :

$$\boxed{M \times p = \mu \times R \times T}$$

Par ailleurs, la relation de la statique des fluides donne que $\frac{dp}{dz} = -\mu g$. On en déduit, puisque

$$\mu = \frac{M}{RT} p, \text{ que l'on a } \frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT} \times p, \text{ et donc : } \boxed{\frac{dp}{dz} + \frac{1}{\lambda} p = 0} \text{ avec } \lambda = \frac{RT}{Mg}.$$

Il vient alors que $p(z) = A e^{-z/\lambda}$. Pour déterminer l'expression de A , on utilise la condition aux limites : $p(z = 0) = p_0$, donc $A e^{-0/\lambda} = p_0$. On en déduit que $A = p_0$, et donc que

$$\boxed{p(z) = p_0 e^{-z/\lambda}}$$

2 Cinématique des fluides

■ À revoir

■ Maîtrisé

1 Grandeurs lagrangiennes et eulériennes

Pour décrire un écoulement fluide, on peut essayer de décomposer le fluide en méso-éléments, que l'on appelle « particules fluides » : c'est un point P de position $\vec{OP}(t) = (x_P(t), y_P(t), z_P(t))$, de volume $\delta V_P(t)$, de température $T_P(t)$, de vitesse $\vec{v}_P(t)$, etc.

On dit alors qu'il s'agit d'une **description lagrangienne** de l'écoulement.

Un autre point de vue est de fixer un point de coordonnées (x, y, z) indépendantes du temps, et de visualiser l'évolution de certains paramètres locaux : la température $T(x, y, z, t)$, la vitesse $\vec{v}(x, y, z, t)$, la masse volumique $\mu(x, y, z, t)$, etc.

On dit alors qu'il s'agit d'une **description eulérienne** de l'écoulement.

En mécanique des fluides, on utilise systématiquement la description eulérienne.

♥ En particulier, la position ne peut être qu'une grandeur lagrangienne : la position eulérienne de l'écoulement n'existe pas.

2 Écoulement stationnaire, écoulement uniforme

Un écoulement est **stationnaire** si toutes les grandeurs eulériennes le décrivant sont indépendantes du temps.

✚ En particulier : $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ pour un écoulement stationnaire.

♥ Ne pas confondre un écoulement stationnaire ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$) et un fluide statique ($\vec{v} = \vec{0}$) ! Un fluide statique est un cas particulier de fluide stationnaire.

Un écoulement est **uniforme** si toutes les grandeurs eulériennes le décrivant sont indépendantes de l'espace.

3 Écoulement irrotationnel, écoulement tourbillonnaire

On dit qu'un écoulement est **irrotationnel** si $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$. Il est donc **tourbillonnaire** (ou **rotationnel**) si $\vec{\text{rot}} \vec{v} \neq \vec{0}$.

Il vient alors que le champ de vitesses \vec{v} d'un écoulement irrotationnel peut s'écrire sous la forme : $\vec{v} = \vec{\text{grad}} \phi$. On dit que \vec{v} découle/dérive du **potentiel scalaire** ϕ .

4 Écoulement homogène, écoulement incompressible

Un écoulement est **homogène** si sa masse volumique μ est uniforme, c'est-à-dire si elle est identique en tout point de l'écoulement.

Un écoulement est **incompressible** si sa masse volumique μ est uniforme et constante, c'est-à-dire si elle est identique en tout point et à tout instant de l'écoulement.

♥ Un écoulement stationnaire et homogène est incompressible.

5 Écoulement à flux conservatif, écoulement à flux non-conservatif

On dit qu'un écoulement est à **flux conservatif** si $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Il est donc à flux non-conservatif si $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$.

Il vient alors que le champ de vitesses \vec{v} d'un écoulement à flux conservatif peut s'écrire sous la forme : $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A}$. On dit que \vec{v} découle/dérive du **potentiel vecteur** \vec{A} .

6 Point d'arrêt

Soit un point A présent au sein d'un écoulement. On dit que A est un **point d'arrêt** si l'écoulement y bifurque dans plusieurs directions.

Il vient alors que la vitesse en un point d'arrêt est nul.



Exercice résolu

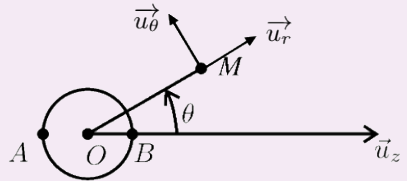
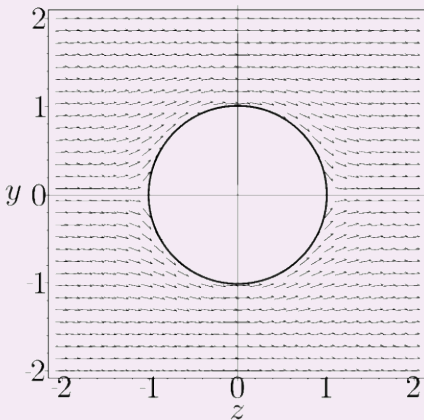
■ À revoir

■ Maîtrisé

Étude d'un écoulement

Énoncé

On considère un écoulement stationnaire et uniforme $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_z$. Dans cet écoulement, on place une sphère de centre O et de rayon R . On considère que l'écoulement est stationnaire, à flux conservatif et irrotationnel. Le nouveau champ des vitesses $\vec{v}(r, \theta)$ ainsi obtenu est représenté sur la figure ci-dessous.



On donne l'expression du gradient et de la divergence en coordonnées sphériques :

- $\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \vec{u}_\varphi$;
- $\text{div } \vec{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 J_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(\sin(\theta) J_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi}$.

1. Expliquer pourquoi l'on peut affirmer l'existence d'une fonction ϕ telle que $\vec{v} = \vec{\text{grad}} \phi$.
2. On admet que ϕ peut s'écrire sous la forme $\phi = \alpha r \cos(\theta) + \frac{\beta \cos(\theta)}{r^2} + \gamma$, où α , β et γ sont des constantes. Exprimer \vec{v} dans la base sphérique.
3. Que devient l'expression de \vec{v} lorsque l'on est « suffisamment loin » de la sphère ? Montrer alors que l'on a $\alpha = v_0$.
4. Que peut-on dire de la vitesse du fluide au point $(r = R, \theta = \pi)$? Justifier.
5. En déduire alors l'expression de β , puis celle de \vec{v} .
6. Vérifier que l'écoulement est à flux conservatif.



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

Résolution

1. L'écoulement est irrotationnel, donc le champ des vitesses \vec{v} peut s'écrire comme le gradient d'un potentiel scalaire ϕ .

2. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \alpha \cos(\theta) - \frac{2\beta}{r^3} \cos(\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -\alpha r \sin(\theta) - \frac{\beta \sin(\theta)}{r^2} \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit, par l'expression du gradient donnée par l'énoncé, que :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\theta) - \frac{2\beta}{r^3} \cos(\theta) \\ -\alpha \sin(\theta) - \frac{\beta}{r^3} \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Suffisamment loin de la sphère, l'écoulement n'est pas perturbé par celle-ci. On a donc $\vec{v} \approx \vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_z$ si $r \rightarrow \infty$.

$$\text{Or } \vec{v}(r \rightarrow \infty) = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\theta) \\ -\alpha \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \vec{u}_z.$$

Par identification des deux expressions de \vec{v} , on en déduit que $\alpha = v_0$.

4. En $(r = R, \theta = \pi)$, on se situe au point A. Il s'agit d'un point d'arrêt, car l'écoulement y bifurque dans plusieurs directions. On en déduit que $\vec{v}(r = R, \theta = \pi) = \vec{0}$.

5. On a :

$$\vec{v}(r = R, \theta = \pi) = \begin{pmatrix} \alpha \times (-1) - \frac{2\beta}{R^3} \times (-1) \\ -\alpha \times 0 - \frac{\beta}{R^3} \times 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\beta}{R^3} - \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce vecteur devant être nul, d'après la question précédente, on en déduit que $\frac{2\beta}{R^3} - \alpha = 0$,

et donc que $\beta = \frac{v_0 R^3}{2}$ puisque $\alpha = v_0$.

$$\text{Il vient donc que } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\theta) - v_0 \frac{R^3}{r^3} \cos(\theta) \\ -v_0 \sin(\theta) - \frac{v_0}{2} \frac{R^3}{r^3} \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

6. Un écoulement est à flux conservatif si la divergence du champ des vitesses est nul. Calculons les dérivées partielles en question :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(v_0 \cos(\theta) r^2 - v_0 \frac{R^3}{r} \cos(\theta) \right) \\ &= 2v_0 \cos(\theta) r + v_0 \frac{R^3}{r^2} \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sin(\theta) v_\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-v_0 \sin^2(\theta) - \frac{v_0 R^3}{2 r^3} \sin^2(\theta) \right) \\ &= -2v_0 \sin(\theta) \cos(\theta) - v_0 \frac{R^3}{r^3} \sin(\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{1}{r^2} \times \left(2v_0 \cos(\theta) r + v_0 \frac{R^3}{r^2} \cos(\theta) \right) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin(\theta)} \times \left(-2v_0 \sin(\theta) \cos(\theta) - v_0 \frac{R^3}{r^3} \sin(\theta) \cos(\theta) \right) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin(\theta)} \times 0 \\ &= \frac{2v_0 \cos(\theta)}{r} + v_0 \frac{R^3}{r^4} \cos(\theta) \\ &\quad - \frac{2v_0 \cos(\theta)}{r} - \frac{v_0 R^3 \cos(\theta)}{r^4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'écoulement est donc bien à flux conservatif.

3 Débit massique, débit volumique

■ À revoir

■ Maîtrisé

1 Débit massique

Soit un déplacement de particules fluides dans l'espace. On note respectivement $\mu(M, t)$ et $\vec{v}(M, t)$ la masse volumique et la vitesse eulériennes de l'écoulement.

On définit alors le **vecteur densité volumique de masse** (ou **vecteur densité de flux de masse**) \vec{J} comme :

$$\vec{J} = \mu \cdot \vec{v}$$

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté \vec{v} et la masse volumique μ . Le débit massique de cet écoulement à travers une surface \mathcal{S} est égal au flux du vecteur densité de masse à travers cette surface :

$$\mathcal{D}_m = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{J}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Le débit massique s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

♥ Si la masse volumique est uniforme sur la section (donc si l'écoulement est incompressible), on a $\mathcal{D}_m = \mu \times \mathcal{D}_v$.

On peut montrer que le débit massique de cet écoulement à travers une surface \mathcal{S} est égale à la masse débitée par unité de temps :

$$\mathcal{D}_m = \frac{\Delta M}{\Delta t}$$

2 Conservation de la masse

Soit un fluide en écoulement dans un système Σ , dont on note la masse au cours du temps $\mathcal{M}(t)$. **La masse se conservant**, on a :

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \mathcal{D}_{m,e} - \mathcal{D}_{m,s}$$

où $\mathcal{D}_{m,e}$ et $\mathcal{D}_{m,s}$ sont les débits massiques respectivement entrant et sortant du système.

En appliquant cette relation à un élément mésoscopique, on en déduit l'**équation locale de conservation de la masse** :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

Pour un écoulement stationnaire, l'équation locale de conservation de la masse devient alors :

$$\text{div } \vec{J} = 0$$

On en déduit que le débit massique se conserve en régime stationnaire : $\mathcal{D}_m^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_m^{\text{sortant}}$.

3 Débit volumique

Soit un fluide en écoulement, dont le champ des vitesses est noté \vec{v} . Le **débit volumique** de cet écoulement à travers une surface \mathcal{S} est égal au flux de la vitesse à travers cette surface :

$$\mathcal{D}_v = \iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Le débit volumique s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

♥ On choisit généralement l'orientation de \mathcal{S} telle que le débit volumique soit positif.

♥ Si la vitesse est uniforme sur la section, on a $\mathcal{D}_v = v \times S$.

On peut montrer que le débit volumique de cet écoulement à travers une surface \mathcal{S} est égal au volume débité par unité de temps :

$$\mathcal{D}_v = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Si l'écoulement est stationnaire et homogène, c'est-à-dire incompressible, on a μ indépendant du temps et de l'espace. Il vient que $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ et que $\text{div}(\mu \vec{v}) = \mu \times \text{div} \vec{v}$. En régime stationnaire, la divergence du champ des vitesses d'un écoulement homogène est donc nul :

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

On en déduit qu'un écoulement incompressible est nécessairement à flux conservatif. Nécessairement, on en déduit que le débit volumique se conserve en régime stationnaire et pour un écoulement homogène : $\mathcal{D}_v^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_v^{\text{sortant}}$.



Exercice résolu

■ À revoir

■ Maîtrisé

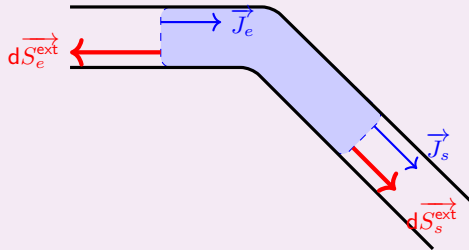
Établissement de l'équation locale de conservation de la masse en régime stationnaire

Énoncé

Établir l'équation locale de conservation de la masse en régime stationnaire.

Résolution

Soit un système Σ délimité par une surface fermée S ; on note \mathcal{V} le volume intérieur.



En régime permanent, Σ possède une masse constante. En notant $\delta M_e = \mathcal{D}_m^{\text{entrant}} \times dt$ la masse entrant pendant dt et $\delta M_s = \mathcal{D}_m^{\text{sortant}} \times dt$ la masse sortant pendant dt , on a donc $\delta M_e = \delta M_s$, c'est-à-dire : $\mathcal{D}_m^{\text{entrant}} = \mathcal{D}_m^{\text{sortant}}$.

En revenant à la définition de \mathcal{D}_m , on a alors $\iint_{S_e} \vec{J}_e \cdot (-d\vec{S}_e^{\text{ext}}) = \iint_{S_s} \vec{J}_s \cdot d\vec{S}_s^{\text{ext}}$, c'est-à-dire :

$$\iint_{S_e} \vec{J}_e \cdot d\vec{S}_e^{\text{ext}} + \iint_{S_s} \vec{J}_s \cdot d\vec{S}_s^{\text{ext}} = 0.$$

Par ailleurs, il n'y a pas de flux selon la paroi latérale : $\iint_{S_{\text{lat}}} \vec{J}_{\text{lat}} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}^{\text{ext}} = 0$. En sommant cette équation à la dernière, il vient donc, puisque $S_e + S_s + S_{\text{lat}} = S$:

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} = 0$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski, on en déduit donc que :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{J} \, dV = 0$$

pour n'importe quel volume \mathcal{V} . Il vient nécessairement que l'on a :

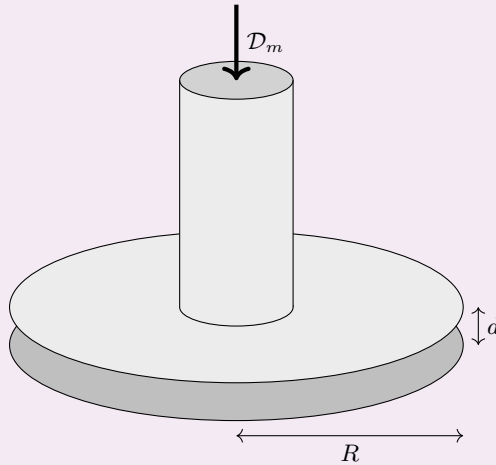
$$\boxed{\text{div } \vec{J} = 0}$$



Utilisation de la conservation du débit

Énoncé

Soit l'écoulement stationnaire produit par une pompe, imposant un débit d'eau (fluide incompressible) $\mathcal{D}_m = 200 \text{ kg} \cdot \text{min}^{-1}$ dans une canalisation cylindrique débouchant sur un espace circulaire contenu entre deux disques parallèles de rayon $R = 10 \text{ cm}$ séparés de $d = 1 \text{ cm}$.



Calculer la vitesse avec laquelle l'eau est éjectée en périphérie de la fontaine.

Résolution

Par conservation du débit (écoulement stationnaire d'eau, fluide incompressible), on a $\mathcal{D}_v^{\text{entrée}} = \mathcal{D}_v^{\text{sortie}}$. On peut écrire $\mathcal{D}_v^{\text{entrée}} = \frac{\mathcal{D}_m}{\mu_{\text{eau}}}$ et $\mathcal{D}_v^{\text{sortie}} = v_{\text{sortie}} \times 2\pi R d$, donc $v_{\text{sortie}} = \frac{\mathcal{D}_m}{2\pi \mu_{\text{eau}} R d} = 0,53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

4 Théorème de Bernoulli et applications

■ À revoir

■ Maîtrisé

1 Énoncé du théorème de Bernoulli

Soit un fluide parfait, incompressible et soumis uniquement à son poids et aux forces de pression. On s'intéresse à son écoulement considéré comme stationnaire. Le **théorème de Bernoulli** indique que la **charge** $X = p + \mu g z + \frac{1}{2} \mu v^2$ se conserve sur une ligne de courant. En d'autres termes, si A et B sont sur une même ligne de courant, alors :

$$p_A + \mu g z_A + \frac{1}{2} \mu v_A^2 = p_B + \mu g z_B + \frac{1}{2} \mu v_B^2$$

2 Théorème de Bernoulli généralisé

Soit un fluide incompressible et soumis à son poids et aux forces de pression. On s'intéresse à son écoulement considéré comme stationnaire. Le fluide reçoit une puissance utile \mathcal{P}_u de la part de l'extérieur. Si A et B sont sur une même ligne de courant, avec A en amont et B en aval, alors :

$$p_B + \mu g z_B + \frac{1}{2} \mu v_B^2 = p_A + \mu g z_A + \frac{1}{2} \mu v_A^2 + \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{D}_v}$$

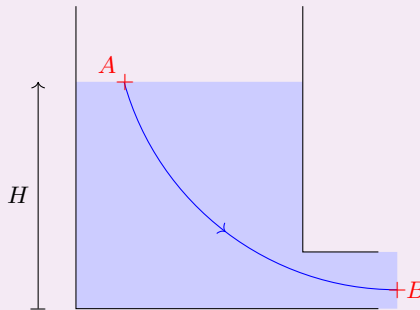
- ♥ Dans le cas d'une pompe, on a $\mathcal{P}_{\text{méca}} > 0$.
- ♥ Dans le cas d'une perte de charge singulière (changement de forme ou d'orientation de l'écoulement) ou d'une perte de charge régulière (effets de viscosité du fluide), on a $\mathcal{P}_{\text{méca}} < 0$.



Vidange de Torricelli

Énoncé

Soit une cuve cylindrique de section S remplie d'un fluide de masse volumique μ . Un tuyau de section $s \ll S$ permet de faire la vidange de la cuve. On note H la hauteur d'eau, A un point de la surface libre et B un point du tuyau en contact avec l'extérieur, tels que A et B font partie d'une même ligne de courant.



Déterminer la vitesse de l'écoulement en B .

Résolution

On a, par conservation du débit, $Sv_A = sv_B$, donc $\frac{v_B}{v_A} = \frac{s}{S}$. Or $s \ll S$, donc $\frac{s}{S} \ll 1$, $v_B \ll v_A$.

Il vient nécessairement que l'on peut considérer que $H \approx \text{cste}$.

Par ailleurs, on a $p_A = p_{\text{atm}}$ et $p_B \approx p_{\text{atm}}$ car la section en B est suffisamment faible pour considérer que l'on est quasiment à l'air libre.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre A et B , on a donc $p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\mu v_A^2 + \mu gH = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\mu v_B^2 + \mu g \times 0$, donc $\frac{1}{2}\mu(v_B^2 - v_A^2) = \mu gH$. Or $v_A \ll v_B$, donc on peut écrire que $v_B^2 - v_A^2 \approx v_B^2 : \frac{1}{2}v_B^2 \approx gH$.

Il vient alors que $v_B \approx \sqrt{2gH}$.



Dimensionnement d'une pompe

Énoncé

Supposons que l'on veuille dimensionner une pompe pour qu'elle élève de l'eau d'une hauteur $H = 10 \text{ m}$ à un débit volumique $\mathcal{D}_v = 20 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$. Le conduit de transport a une section constante. Déterminer la puissance $\mathcal{P}_{\text{alim}}$ à apporter à la pompe pour qu'elle fonctionne en respectant ce cahier des charges, sachant qu'elle possède un rendement $\eta = 55 \%$.

Résolution

Notons B un point juste après la pompe et A un point juste avant la pompe.

On souhaite que la pompe élève l'eau en gardant un débit volumique constant. Puisque la section de la conduite est constante, on a donc $v_A = v_B$.

De plus, l'écoulement n'a lieu que si la pression en amont de la pompe est supérieure à celle en aval. On se place dans le cas limite où la pompe suffit tout juste à élever l'eau sans variation de pression sensible entre A et B : $p_B \approx p_A$.

Il vient donc que $\mu g H = \mu g \times 0 + \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\mathcal{D}_v}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{\text{méca}} = \mu g H \mathcal{D}_v = 1 \times 10^3 \times 10 \times 10 \times 3,3 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 33 \text{ W}$.

La puissance d'alimentation doit alors être $\mathcal{P}_{\text{alim}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{méca}}}{\eta} = 60 \text{ W}$.