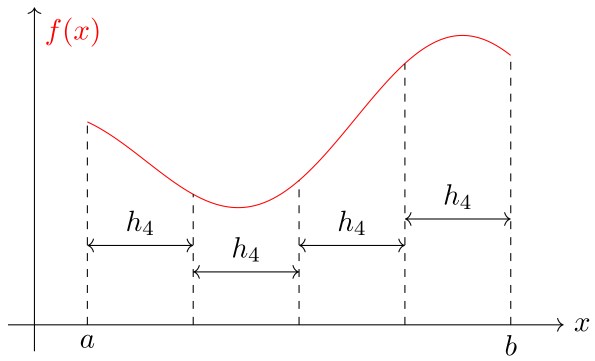
Intégration et calcul intégral

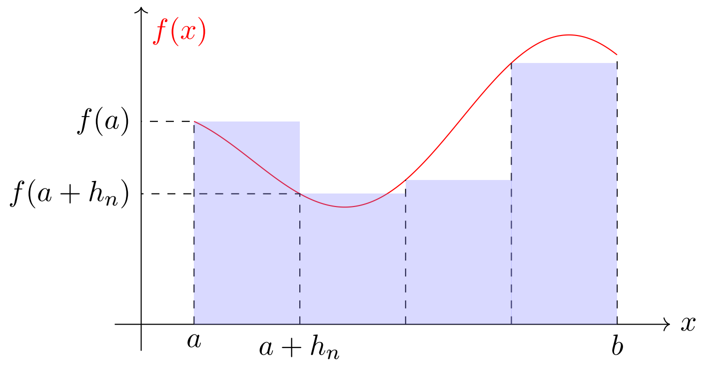
1 Rappels sur le lien entre l'intégration et la somme

1.1 À une dimension

Soit une fonction $f(x)$ définie sur $[a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $h_n = \dfrac{b-a}{n}$. Par exemple, pour $n = 4$:



Si l'on cherche à calculer l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe de f, on peut « naïvement » approximer la fonction par une fonction en escalier (voir ci-dessous).



On a alors :

$$\mathcal{A} \approx f(a) \times h_n + f(a+h_n) \times h_n + \ldots f(a+(n-1)h_n) \times h_n$$

Cette approximation est d'autant meilleure que n est grand. Lorsque $n \to \infty$, on a alors $h_n \to 0$... sans pour autant valoir 0 ! On note dès lors dx ce pas d'intégration « infinitésimal » (c'est-à-dire « très petit »).

L'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe est alors égale à la somme :

$$\mathcal{A} = f(a) \times \mathrm{d}x + f(a+\mathrm{d}x) \times \mathrm{d}x + \ldots + f(b-\mathrm{d}x) \times \mathrm{d}x$$

On décide de noter cette somme *via* le symbole[1] :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

qu'il faut lire/comprendre sous la forme :

« Somme des $f(x) \times \mathrm{d}x$ avec x variant de manière continue entre a et b »[2]

Il s'avère que, par le **théorème fondamental de l'analyse**, cette somme peut se calculer sous la forme d'une différence de primitive :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

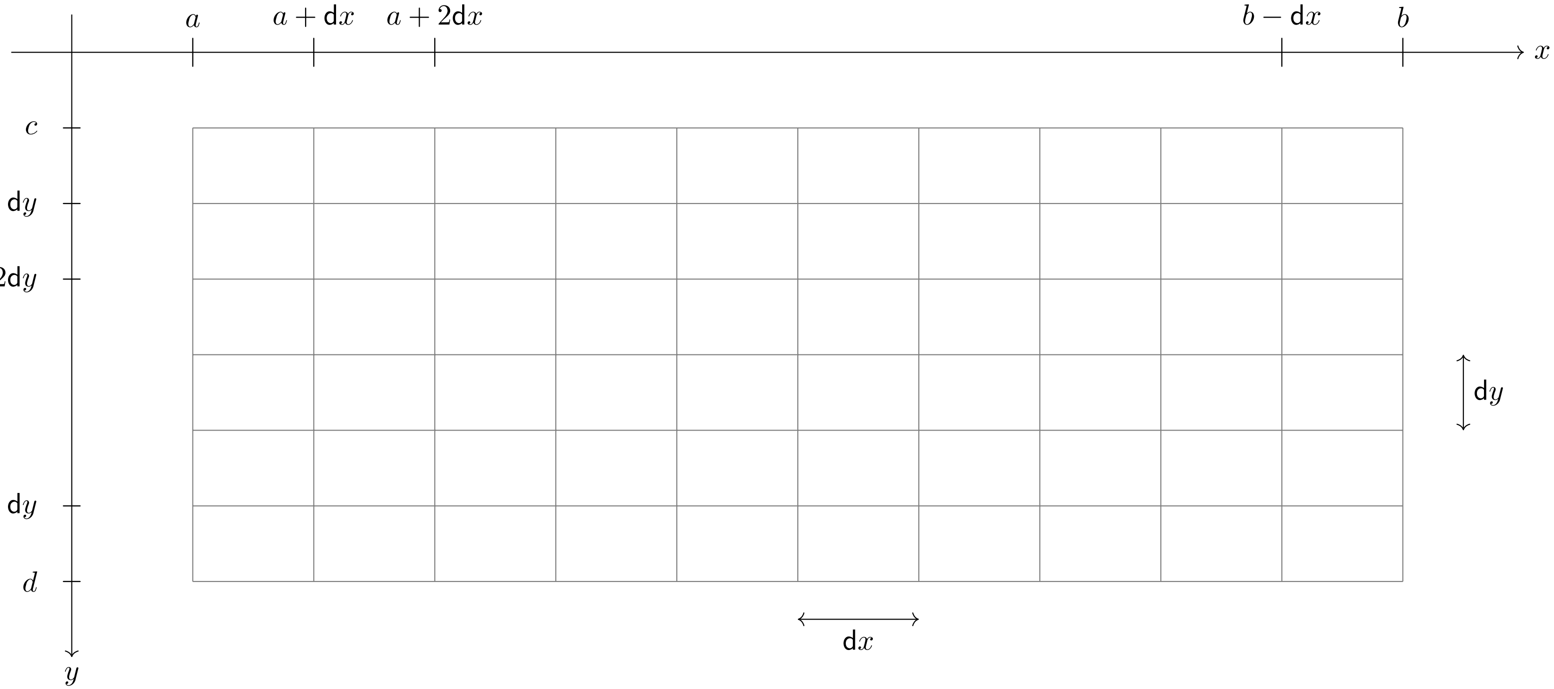
avec F une primitive de f. Ce résultat n'est cependant pas la définition de l'intégrale : il s'agit plutôt d'un moyen facile de déterminer sa valeur numérique !

On dit que cette intégrale est une intégrale à une dimension : on somme les valeurs de f selon l'unique dimension x.

1. Le symbole de l'intégrale $\int$ n'est en réalité rien d'autre qu'un « S » stylisé, représentant justement la Somme.
2. On pourrait me répondre qu'on ne va pas jusqu'à b, mais jusqu'à $b - \mathrm{d}x$... Mais il s'avère que dx tend vers 0, donc la différence est vraiment négligeable.

1.2 À deux dimensions

Supposons que l'on connaisse le champ de pressions $p(x, y)$ dans un plan de l'atmosphère.



Si l'on souhaite calculer la force totale F s'exerçant sur une plaque contenue dans ce plan (avec $x \in [a, b]$ et $y \in [c, d]$), on peut sommer les forces s'exerçant sur chacune des surfaces infinitésimales $\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y$:

$$\begin{array}{rccccccl}
 & p(a,c)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & + & p(a+\mathrm{d}x,c)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & + \;\ldots\; + & p(a+b-\mathrm{d}x,c)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & & \textbf{contribution de la ligne } y=c \\
+ & p(a,c+\mathrm{d}y)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & + & p(a+\mathrm{d}x,c+\mathrm{d}y)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & + \;\ldots\; + & p(a+b-\mathrm{d}x,c+\mathrm{d}y)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & & \textbf{contribution de la ligne } y=c+\mathrm{d}y \\
F = + & p(a,c+2\mathrm{d}y)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & + & p(a+\mathrm{d}x,c+2\mathrm{d}y)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & + \;\ldots\; + & p(a+b-\mathrm{d}x,c+2\mathrm{d}y)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & & \textbf{contribution de la ligne } y=c+2\mathrm{d}y \\
+ & \ldots & + & \ldots & + \;\ldots\; + & \ldots & & \\
+ & p(a,d-\mathrm{d}y)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & + & p(a+\mathrm{d}x,d-\mathrm{d}y)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & + \;\ldots\; + & p(a+b-\mathrm{d}x,d-\mathrm{d}y)\times \mathrm{d}x\mathrm{d}y & & \textbf{contribution de la ligne } y=d-\mathrm{d}y
\end{array}$$

Ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$F = \begin{array}{rl} & \displaystyle\int_a^b p(x,c)\mathsf{d}x\mathsf{d}y \\ + & \displaystyle\int_a^b p(x,c+\mathsf{d}y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y \\ + & \displaystyle\int_a^b p(x,c+2\mathsf{d}y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y \\ + & \dots \\ + & \displaystyle\int_a^b p(x,d-\mathsf{d}y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y \end{array} = \int_a^b \underbrace{\left[p(x,c) + p(x,c+\mathsf{d}y) + p(x,c+2\mathsf{d}y) + \ldots + p(x,d-\mathsf{d}y)\right]\mathsf{d}y}_{\displaystyle\int_c^d p(x,y)\mathsf{d}y}\,\mathsf{d}x$$

On note alors :

$$F = \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d} p(x,y)\mathsf{d}x\mathsf{d}y$$

en précisant bien dans les bornes de l'intégrale sur quel domaine opère chaque variable.

Il peut arriver que l'on décider de sommer la pression – par exemple – selon une surface infinitésimale qui n'est pas rectangulaire, c'est-à-dire qui n'est pas de la forme $\mathsf{d}x\mathsf{d}y$. Cette situation arrive notamment lorsque les problèmes sont à symétrie cylindrique ou sphérique.

On note alors, de manière plus générale, la double intégrale sous la forme :

$$F = \iint_{M\in\mathsf{plaque}} p(M)\ \mathsf{d}S_M$$

où les bornes de l'intégrale ont été remplacées par la surface physique sur laquelle il faut sommer, et $\mathsf{d}S_M$ représente l'aire infinitésimale d'intégration (précédemment, on avait donc $\mathsf{d}S = \mathsf{d}x\mathsf{d}y$) localisée autour d'un point M de la plaque. On n'indique en particulier pas de quoi dépend p, car il n'est pas pertinent d'utiliser les variables x et y si l'on est en coordonnées sphériques, par exemple.

1.3 À trois dimensions

Les problèmes précédents peuvent également se poser à trois dimensions. Prenons par exemple la Terre, que l'on supposera sphérique et constituée de couches concentriques (le noyau interne, le noyau externe, le manteau inférieur, le manteau extérieur et la croûte).

Ces couches ont des compositions différentes, et donc des masses volumiques μ_i différentes. Si l'on cherche à exprimer la masse totale m de la Terre, on va alors écrire :

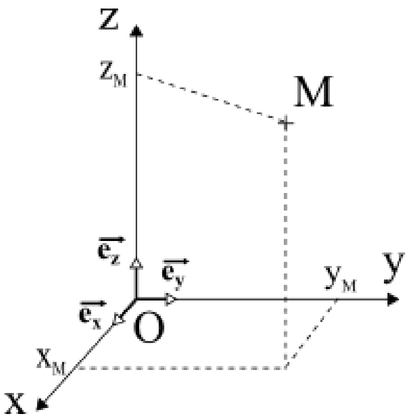
$$m = \sum_{\text{couches } i} \mu_i \times V_i$$

Si l'on cherche à être encore plus précis, on peut tout simplement dire qu'à chaque élément de volume infinitésimal $\mathrm{d}V_M$ situé en un point M de la Terre, on peut associer une masse $\mathrm{d}m = \mu(M) \times \mathrm{d}V_M$. Puisque l'on somme dans trois directions, on note alors que le calcul de la masse totale se fait *via* une triple intégrale :

$$m = \iiint_{M \in \text{Terre}} \mu(M)\ \mathrm{d}V_M$$

2 Systèmes de coordonnées

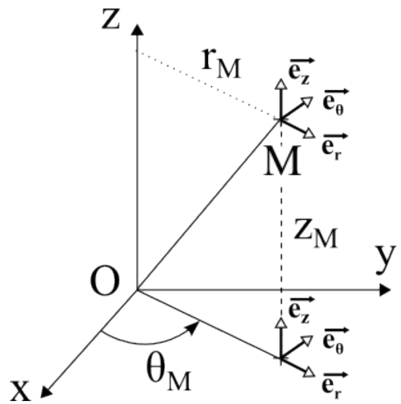
2.1 Coordonnées cartésiennes



On a :

- $x_M \in]-\infty, +\infty[$;
- $y_M \in]-\infty, +\infty[$;
- $z_M \in]-\infty, +\infty[$.

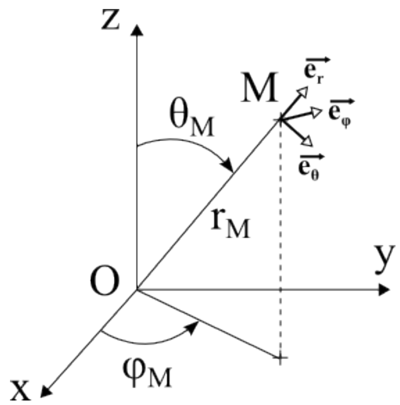
2.2 Coordonnées cylindriques



On a :

- $r_M \in [0, +\infty[$;
- $\theta_M \in [0, 2\pi[$;
- $z_M \in]-\infty, +\infty[$.

2.3 Coordonnées sphériques



On a :

- $r_M \in [0, +\infty[$;
- $\theta_M \in [0, \pi[$;
- $\varphi_M \in [0, 2\pi[$.

Attention : θ_M et φ_M sont « inversées » en coordonnées cylindriques et sphériques... leurs domaines sont également modifiés.

3 Éléments d'intégration

Soit un système n'ayant pas nécessairement une répartition de masse uniforme (voir exemple précédent de la Terre). Cependant, la répartition de masse est parfaitement connue en tout point (c'est-à-dire la masse volumique $\rho(M)$ à trois dimensions, en $\mathrm{kg/m^3}$; la masse surfacique $\sigma(M)$ à deux dimensions, en $\mathrm{kg/m^2}$; la masse linéique à une dimension, en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$).

Afin de déterminer la masse m du système, il suffit de faire appel à une intégrale (des $\rho \mathrm{d}V$, $\sigma \mathrm{d}S$ ou $\lambda \mathrm{d}\ell$ selon les cas). Cependant, les **éléments d'intégration** $\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}S$ et $\mathrm{d}\ell$ ne sont a priori pas connus, contrairement aux répartitions de masse ρ, σ et λ.

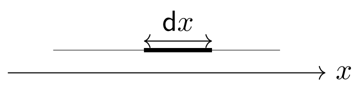
Le but de cette partie est alors de déterminer des expressions simples pour chaque élément d'intégration, selon la géométrie du problème.

3.1 Intégration curviligne

L'objectif est d'exprimer $\mathrm{d}\ell$ dans l'intégrale à une dimension :

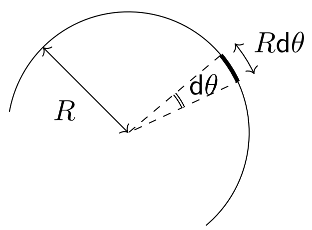
$$m = \int_{\text{contour}} \lambda(M)\ \mathrm{d}\ell_M$$

3.1.1 Lorsque l'on intègre selon une droite



$$\boxed{\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x}$$

3.1.2 Lorsque l'on intègre selon un (arc de) cercle



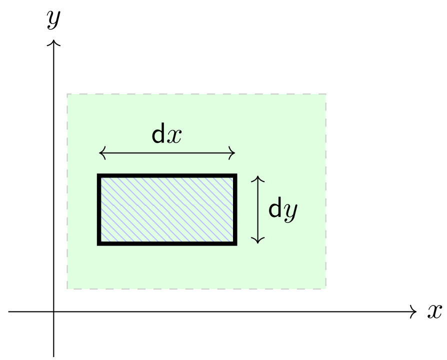
$$\boxed{\mathrm{d}\ell = R\mathrm{d}\theta}$$

3.2 Intégration surfacique

L'objectif est d'exprimer $\mathrm{d}S$ dans l'intégrale à deux dimensions :

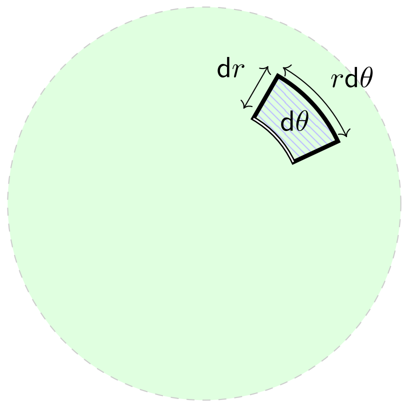
$$m = \iint_{\text{surface}} \sigma(M)\ \mathrm{d}S_M$$

3.2.1 Lorsque l'on intègre sur un plan



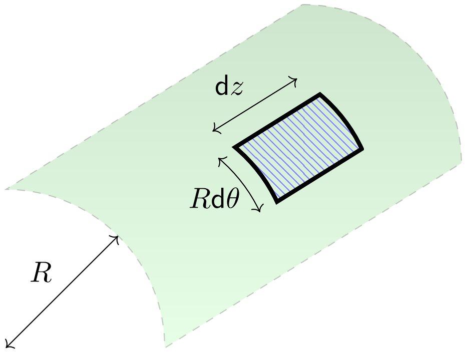
$$\boxed{\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

3.2.2 Lorsque l'on intègre sur un disque



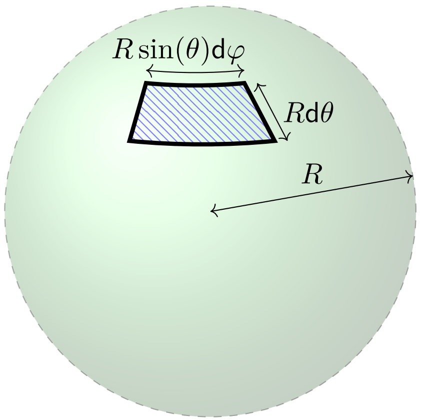
$$\boxed{\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta}$$

3.2.3 Lorsque l'on intègre sur la paroi latérale d'un cylindre



$$\boxed{\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z}$$

3.2.4 Lorsque l'on intègre sur une sphère



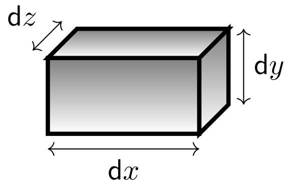
$$\boxed{\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\theta \times R\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi}$$

3.3 Intégration volumique

L'objectif est d'exprimer dV dans l'intégrale à trois dimensions :

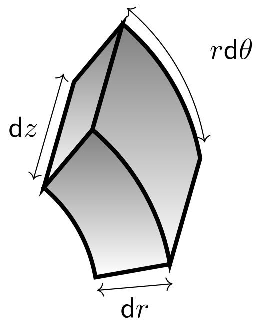
$$m = \iiint_{\mathsf{espace}} \rho(M)\ \mathrm{d}V_M$$

3.3.1 Lorsque l'on intègre dans un parallélépipède



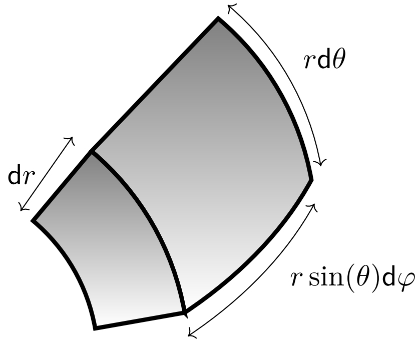
$$\boxed{\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z}$$

3.3.2 Lorsque l'on intègre dans un cylindre



$$\boxed{\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z}$$

3.3.3 Lorsque l'on intègre dans une boule



$$\boxed{\text{d}V = \text{d}r \times r\text{d}\theta \times r\sin(\theta)\text{d}\varphi}$$

4 [TD] Calculs de longueurs, surfaces et volumes

Déterminer, à l'aide des éléments d'intégration :

1. Le périmètre d'un cercle de rayon a ;
2. L'aire d'un disque de rayon a ;
3. L'aire de la paroi latérale d'un cylindre de hauteur H et de rayon a ;
4. L'aire d'une sphère de rayon a ;
5. Le volume d'un cylindre de hauteur H et de rayon a ;
6. Le volume d'une boule de rayon a.

Périmètre d'un cercle

Le périmètre d'un cercle de rayon R est $2\pi R$.

Aire d'un disque

L'aire d'un disque de rayon R est πR^2.

Aire de la paroi latérale d'un cylindre

L'aire de la paroi latérale d'un cylindre de hauteur h et de rayon R est $2\pi Rh$.

Aire d'une sphère

L'aire d'une sphère de rayon R est $4\pi R^2$.

Volume d'un cylindre

Le volume d'un cylindre de hauteur h de rayon R est $\pi R^2 h$.

Volume d'une boule

Le volume d'une boule de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

5 [TD] Calculs de masses

Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer la masse du système étudié. Penser à vérifier l'homogénéité du résultat final !

1. Masse d'un cerceau de rayon a et de densité linéique de masse $\lambda = \lambda_0(2 + \cos(\theta/3))$;
2. Masse d'un disque de rayon a et de densité surfacique de masse $\sigma = \sigma_0 \dfrac{r}{a}$.
3. Masse d'une couronne de rayon intérieur a, de rayon extérieur b et de densité surfacique de masse $\sigma = \sigma_0 \dfrac{b-a}{r}$.
4. Masse d'un tube cylindrique de rayon a, de hauteur H ($z \in [0, H]$) et de densité surfacique de masse $\sigma = \sigma_0 \cos(\theta/4) \sin\left(\pi \dfrac{z}{3H}\right)$.
5. Masse d'un cylindre de rayon a, de hauteur H de masse volumique $\mu = \mu_0 \dfrac{r}{a}$.
6. Masse totale d'une distribution volumique à symétrique sphérique $\rho = \rho_0 \dfrac{a^2}{r^2} e^{-r/a}$ ($r \in [a, \infty[$).