Chapitre 3 : Mesures et incertitudes

Objectifs :

- Utiliser le vocabulaire de base de la métrologie : mesurage, valeur vraie, grandeur d'influence, erreur aléatoire, erreur systématique.
- Identifier les sources d'erreurs lors d'une mesure.
- Savoir que l'incertitude est un paramètre associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui peuvent être raisonnablement attribuées à la grandeur mesurée.
- Procéder à l'évaluation de type A de l'incertitude-type (incertitude de répétabilité).
- Procéder à l'évaluation de type B de l'incertitude-type dans des cas simples (instruments gradués) ou à l'aide de données fourniers par le constructeur (résistance, multimètre, oscilloscope, thermomètre, verrerie...).
- Évaluer l'incertitude-type d'une mesure obtenue à l'issue de la mise en œuvre d'un protocole présentant plusieurs sources d'erreurs indépendantes dans les cas simples d'une expression de la valeur mesurée sous la forme d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient ou bien à l'aide d'une formule fournie ou d'un logiciel.
- Comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreurs.
- Associer un niveau de confiance de 95% à une incertitude élargie.
- Exprimer le résultat d'une mesure par une valeur et une incertitude associée à un niveau de confiance.
- Commenter qualitativement le résultat d'une mesure en le comparant, par exemple, à une valeur de référence.
- Analyser les sources d'erreurs et proposer des améliorations du processus de mesure.

Problème étudié

L'objectif de ce chapitre est de se familiariser avec les notions de mesure et d'incertitude de mesure. Pour cela, nous étudierons le cas concret d'un pendule simple constitué d'un fil inextensible et d'une masse à son extrémité.

Sont présents sur votre paillasse :

- 1 pendule de longueur ℓ réglable auquel est accroché une masse $m = 0{,}200\,\mathrm{kg}$;
- 1 réglet ;
- 1 chronomètre.

1 Vocabulaire

En métrologie, une **mesure** (ou un **mesurage**) est, d'après le Bureau international des poids et mesures, le « processus consistant à obtenir expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur ».

La **valeur vraie** R d'une grandeur est « sa valeur considérée comme unique et, en pratique, impossible à connaître ». Par exemple, la masse-étalon de platine, historiquement à l'origine de la définition du kilogramme, avait une masse vraie de $1\,\mathrm{kg}$. On remarque ici que l'on ne fait pas attention aux chiffres significatifs : la valeur vraie est dénuée de toute incertitude.

Les **grandeurs d'influence** sont des grandeurs extérieures à la grandeur mesurée, qui peuvent modifier sa valeur vraie. Des grandeurs d'influences classiques sont la pression et la température, qui peuvent par exemple modifier la masse volumique de l'eau liquide.

Lorsque l'on mesure une grandeur, le résultat sera possiblement différent d'un mesurage à l'autre. L'**erreur de mesure** est alors « la différence entre la valeur donnée par la mesure et la valeur exacte (bien souvent inconnue) d'une grandeur ». Cette erreur peut être décomposée en deux types (voir figure 1) :

— L'**erreur systématique** (ou **biais**) est la « composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, demeure constante ou varie de façon prévisible ». Par exemple, si une balance est mal calibrée, on peut mesurer en moyenne qu'un litre d'eau liquide, aux CNTP, a une masse de $0{,}800\,\mathrm{kg}$. Cette balance a une erreur systématique de $200\,\mathrm{g}$;

— L'**erreur aléatoire** est la « composante de l'erreur de mesure qui, dans des mesurages répétés, varie de façon imprévisible ». Par exemple, si l'on demande à différentes personnes de mesurer la pression atmosphérique, on trouvera un panel de valeurs variant autour de $1\,\mathrm{bar}$. Ce nuage de points autour de la valeur vraie correspond à l'erreur aléatoire.

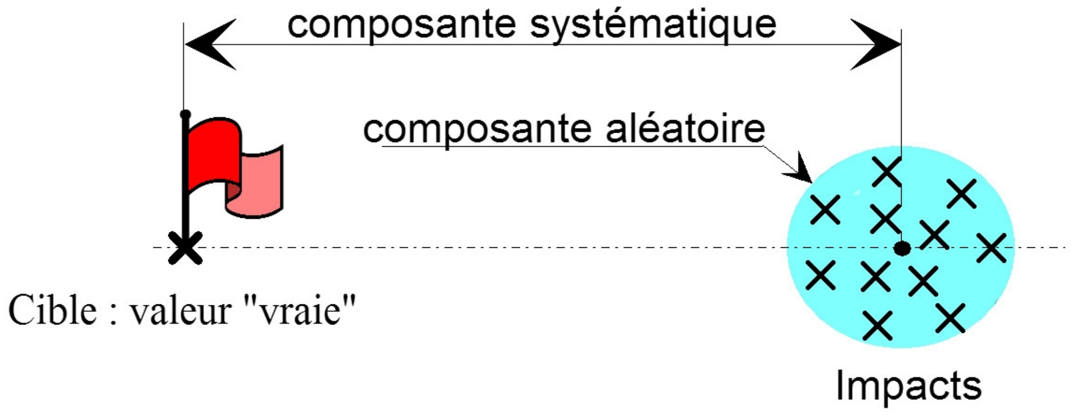


FIGURE 1 – Composantes d'une erreur de mesure. Par Aubry Gérard — Travail personnel, CC BY-SA 4.0, https ://commons.wikimedia.org/w/index.php ?curid=38136594

Exemple : masse volumique du cuivre

Un génie omnipotent et physicien décide de mesurer « aussi précisément que possible » la masse volumique du cuivre ρ_{Cu}. Il a à sa disposition une centaine de morceaux de cuivre, de différents volumes, tailles et masses. Il veille cependant à ne pas prendre des échantillons de cuivre poreux ou oxydés, pour ne pas avoir une **erreur systématique** dans ses mesures. On en déduit alors que la mesure se fait **sans biais**.

Le génie mesure, à l'aide d'un protocole rigoureux et d'instruments de mesure infiniment précis (rappelez-vous : le génie est omnipotent !), les différentes masses volumiques. Il obtient alors une première répartition grâce des masses volumiques grâce à l'histogramme de la figure 2.

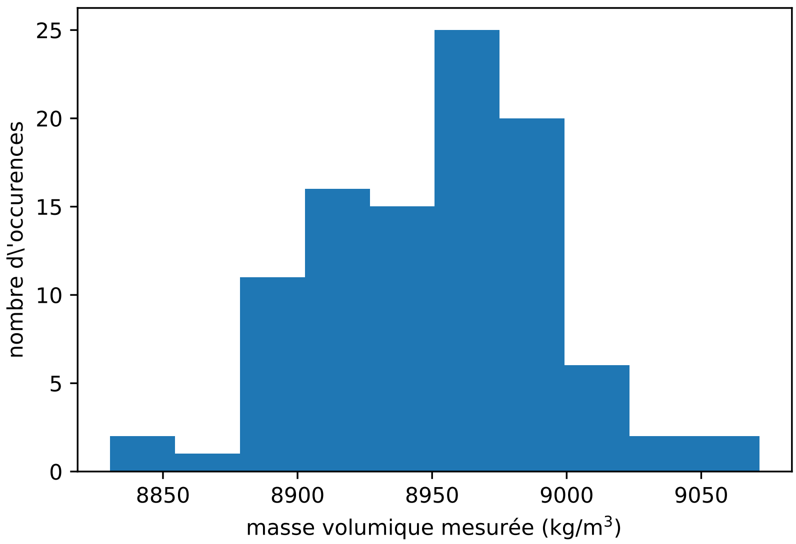


FIGURE 2 – Histogramme montrant la répartition des masses volumiques pour 100 échantillons.

Ce génie étant omnipotent, il parvient à obtenir davantage d'échantillons : une infinité, très exactement. Il mesure en un temps record chacune des masses volumiques. L'histogramme associé à cette nouvelle série de mesures est celui de la figure 3.

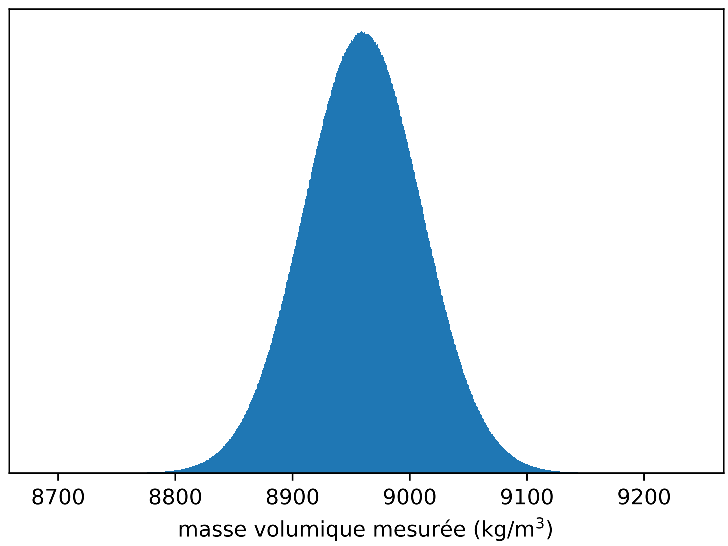


FIGURE 3 – Histogramme montrant la répartition des masses volumiques pour une infinité d'échantillons.

On conçoit aisément que la **valeur vraie** ρ_{Cu} de la masse volumique est ainsi de $8960\,\mathrm{kg/m^3}$: il s'agit de la moyenne de la répartition de la figure 3, car le génie a effectué une infinité de mesures.

En revanche, aucune des expériences ne donnera un résultat exactement égal à $8960\,\mathrm{kg/m^3}$: une **erreur aléatoire**, probablement due au mouvement irrégulier des atomes autour de leur position d'équilibre, donne des résultats de mesure tout aussi irréguliers. On peut quantifier cette possibilité d'erreur aléatoire à l'aide de l'écart-type de la distribution $\sigma\left[\rho_{\mathrm{Cu}}\right]$, qui correspond globalement à l'étendue de cette distribution autour de la moyenne. Ainsi, si $\dfrac{\sigma\left[\rho_{\mathrm{Cu}}\right]}{\rho_{\mathrm{Cu}}} \ll 1$, la distribution sera très piquée autour de sa moyenne.

On retient en particulier que la valeur vraie de la masse volumique n'est en pratique jamais accessible, car elle résulte d'une infinité de mesures effectuées par des instruments infiniment précis.

Le génie décide alors d'augmenter la température de son laboratoire. Le nouvel histogramme (en orange, sur la figure 4, est superposé à celui de la figure 3).

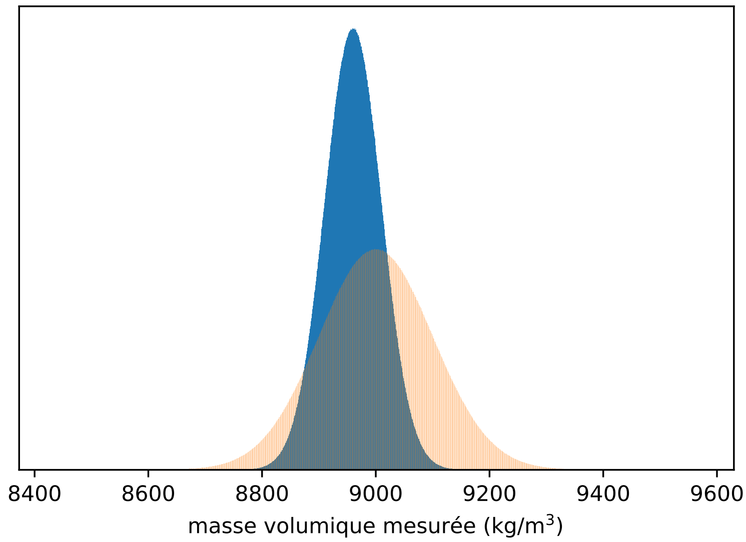


Figure 4 – Histogramme montrant la répartition des masses volumiques pour une infinité d'échantillons à une température faible (histogramme bleu) et à une température élevée (histogramme orange).

La température est alors une **grandeur d'influence** : sans être directement l'objet de la mesure, elle peut faire sensiblement varier le résultat de la mesure.

2 Incertitudes de type A

On désigne par type A une « évaluation d'une composante de l'incertitude de mesure par une analyse statistique des valeurs mesurées obtenues dans des conditions définies de mesurage ». Concrètement, il s'agit des incertitudes que l'on peut évaluer à l'aide d'une analyse statistique sur un grand nombre de mesures.

Question 1 : Mesurer la durée T_{10} nécessaire pour dix oscillations du pendule.

Question 2 : Répéter les instructions de la dernière question 14 fois, afin d'avoir quinze mesures pour T_{10}. Remplir alors le tableau ci-dessous.

essai	1	2	3	4	5
T_{10} (s)					
essai	6	7	8	9	10
T_{10} (s)					
essai	11	12	13	14	15
T_{10} (s)					

Estimateurs de la moyenne et de l'écart-type d'une distribution

Si l'on a $n \geq 2$ valeurs $(x_1, \ldots, x_n)$ pour une grandeur donnée x, on définit la moyenne empirique $\overline{x}$ et l'écart-type empirique s_x selon les formules ci-dessous :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

On admet que ces estimateurs sont sans biais, c'est-à-dire que $\overline{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ et $s_x \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma[x]$.

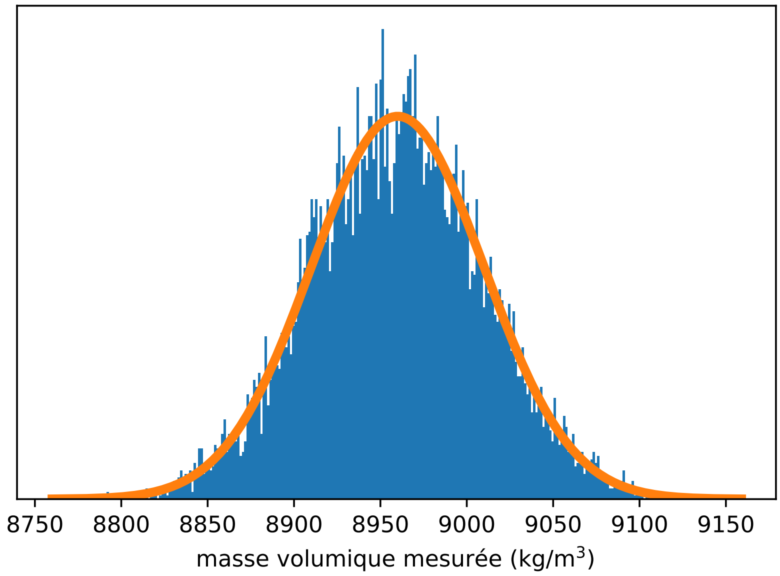
Les commandes informatiques permettant de calculer les estimateurs sont :

	moyenne	écart-type
Microsoft Excel	`=MOYENNE(...)`	`=ECARTYPE.STANDARD(...)`
Scilab	`mean(L)`	`stdev(L)`

où `L = [valeur_1, valeur_2, ..., valeur_n]` est la liste de mesures à étudier.

Question 3 : Déterminer à l'aide de Scilab la durée moyenne $\overline{T_{10}}$ pour dix oscillations ainsi que l'écart-type empirique $s_{T_{10}}$ de la distribution de cette durée.

En général, la distribution des valeurs obtenues x_i autour de la valeur moyenne suit une loi normale si n est assez grand (voir haut de la figure 5). L'allure de la loi normale est une courbe en cloche, également appelée gaussienne (courbes oranges de la figure 5).



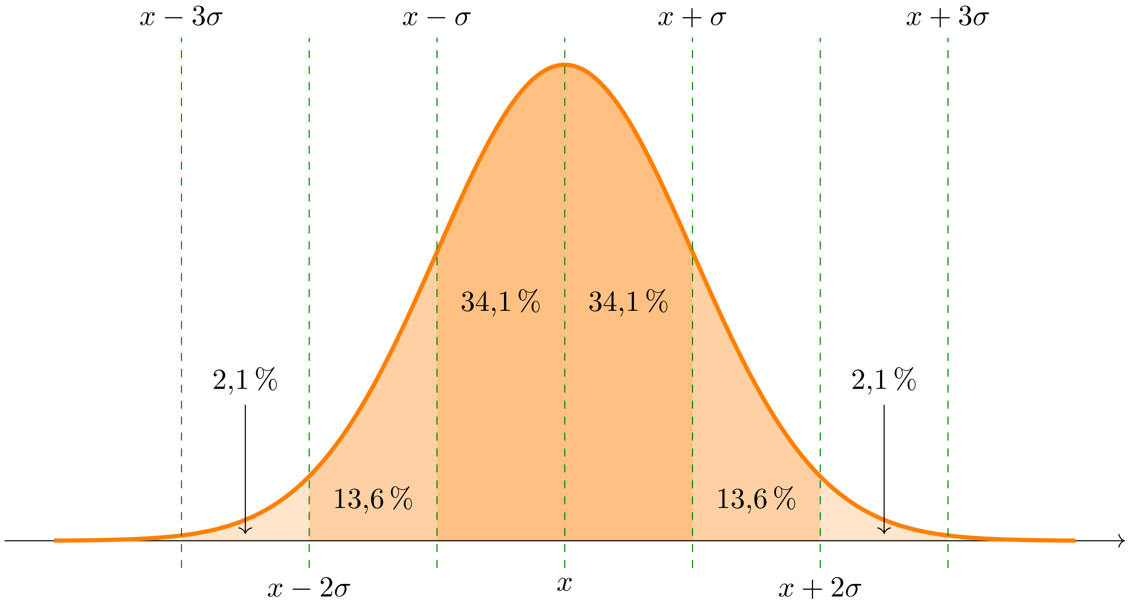


Figure 5 – Haut : rapprochement des mesures vers une loi normale. Bas : courbe de Gauss, avec la moyenne réelle x et l'écart-type réel $\sigma \triangleq \sigma[x]$.

Incertitude-type

En effectuant n mesurages indépendants, les valeurs obtenues se répartissent aléatoirement sur une gaussienne. Donc, lorsqu'on prend la valeur moyenne de ces n mesures, les écarts à la valeur vraie se compensent statistiquement, avec d'autant plus d'efficacité que n est grand. Ainsi, plus nous ferons de mesurages, plus nous serons sûrs de la position de la valeur vraie de x.

On appelle ainsi **incertitude-type** l'incertitude sur la valeur moyenne mesurée $\overline{x}$. On peut montrer mathématiquement [a] que l'incertitude-type sur une distribution $(x_1, \ldots, x_n)$ est égale à :

$$u(\overline{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Elle correspond à l'erreur aléatoire sur le mesurage.

a. Il s'agit d'un des résultats du « théorème central limite ».

Incertitude élargie

Si le nombre de mesurages n est infini, on a 68% de chances que la valeur de x se situe dans l'intervalle $[\overline{x} - u(\overline{x}), \overline{x} + u(\overline{x})]$ (voir figure 5). On préfère cependant généralement un niveau de confiance de 95%, qui correspond environ à l'intervalle $[\overline{x} - 1,96\ u(\overline{x}), \overline{x} + 1,96\ u(\overline{x})]$: la précision sur la mesure est alors $\Delta\overline{x} = \pm 1,96 \times u(\overline{x})$.

En pratique, on n'a jamais $n \to \infty$: il faut apporter un terme correctif qui va permettre d'élargir l'intervalle. Ce coefficient multiplicatif est appelé coefficient de Student, et est noté k ; on a alors l'**incertitude élargie** :

$$\Delta\overline{x} = k \times u(\overline{x}) = k \times \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Les valeurs de k pour un niveau de confiance de 95% sont présentes dans le tableau ci-dessous.

nombre de mesures	coefficient de Student k
2	12,71
3	4,30
4	3,18
5	2,78
6	2,57
10	2,26
15	2,15
20	2,09
30	2,05

On remarque notamment que si $n \to \infty$, alors $k \to 1,96$.

Question 4 : Calculer l'incertitude de type A élargie $\Delta\overline{T_{10}}$ sur la valeur moyenne que vous avez obtenue.

Présentation du résultat d'un mesurage

Il existe deux conventions pour présenter le résultat d'un mesurage :

- Soit : $x = \overline{x} \pm \Delta\overline{x}$, avec $\Delta\overline{x}$ possédant un unique chiffre significatif et $\overline{x}$ exprimé avec la même « précision » que $\Delta\overline{x}$;
- Soit : donner $\overline{x}$ et $u(\overline{x})$, avec généralement $u(\overline{x})$ possédant deux chiffres significatifs et $\overline{x}$ exprimé avec la même « précision » que $u(\overline{x})$.

Dans tous les cas, il est sous-entendu que l'on a $x \in [\overline{x} - \Delta\overline{x}, x + \Delta\overline{x}]$ avec une confiance de $95\,\%$.

Question 5 : Présenter le résultat de votre mesure de deux manières.

3 Incertitudes de type B

On désigne par type B une « évaluation d'une composante de l'incertitude de mesure par d'autres moyens qu'une évaluation de type A de l'incertitude ». Concrètement, trois cas peuvent exister :

— On effectue le mesurage d'une grandeur ne présentant pas de variabilité, par exemple le mesurage de la longueur « fixe » d'une feuille à l'aide d'une règle graduée ;

— On effectue un unique mesurage ne permettant pas d'effectuer une analyse statistique, par exemple par manque de temps ;

— On effectue le mesurage d'une grandeur devant imprécise suite à l'intervention du métrologue, par exemple l'utilisation d'un chronomètre, dont la précision n'est pas de l'ordre du centième de seconde mais plutôt de l'ordre du temps de réaction de l'expérimentateur.

Incertitude de type B

Pour un résultat de mesure ne fluctuant pas, et compris avec certitude dans l'intervalle $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, on admet que [a] :

$$\overline{x} = x_0 \qquad \text{et} \qquad u(\overline{x}) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad \Delta\overline{x} = \varepsilon$$

ε peut notamment être donné par le constructeur (par exemple : pour des instruments de verrerie) ou déterminé « avec raison » (par exemple : $\varepsilon = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ à $1\,\mathrm{mm}$ pour une règle graduée, selon l'exactitude avec laquelle la graduation tombe sur la longueur à mesurer).

a. Il faut bien comprendre que la notation $\overline{x}$ ne se rattache pas à une notion de moyenne statistique, mais plutôt ici à celle d'une médiane.

Question 6 : Évaluer l'incertitude-type $u_{\text{chrono}}(\overline{T_{10}})$ et l'incertitude élargie $\Delta_{\text{chrono}}\overline{T_{10}}$ dues à la précision de votre mesure au chronomètre.

Question 7 : De plus, mesurer la longueur ℓ du pendule, définie comme étant la longueur entre le point d'attache à la potence et le centre de gravité de la masse. Évaluer l'incertitude élargie sur cette mesure. Présenter le résultat sous la forme $\ell = \overline{\ell} \pm \Delta\overline{\ell}$.

4 Comment concilier les incertitudes de type A et de type B ?

Les incertitudes de type A et de type B sont complémentaires. La première est issue de l'expérience pure et simple, tandis que la seconde correspond à l'incertitude prévue par la théorie et certains critères de l'expérimentateur.

Pour savoir si l'on doit passer par une incertitude statistique ou théorique, on peut observer deux premières situations :

1. Le mesurage est unique (à cause d'un manque de temps, d'une invariabilité du résultat de la mesure...) : l'incertitude de type A n'a pas de sens, seule celle de type B peut être évaluée ;
2. On a effectué une série de mesures. Dans les faits, on retrouve alors généralement trois sous-cas :
   (a) $u_A(\overline{x}) \gg u_B(\overline{x})$: l'incertitude-type statistique et expérimentale est bien plus importante que l'incertitude-type prévue par l'instrumentation et les critères de l'expérimentateur. Celui-ci n'a donc pas pris en compte toutes les causes de variabilité de l'expérience ;
   (b) $u_A(\overline{x}) \ll u_B(\overline{x})$: l'incertitude-type statistique et expérimentale est bien plus faible que l'incertitude-type prévue par l'instrumentation et les critères de l'expérimentateur. Celui-ci a donc surestimé les erreurs lors de son approche théorique ;
   (c) $u_A(\overline{x}) \sim u_B(\overline{x})$: l'incertitude-type statistique et expérimentale est du même ordre que l'incertitude-type prévue par l'instrumentation et les critères de l'expérimentateur. Celui-ci a donc bien intégré tous les problèmes inhérents à la mesure.

On voit donc que l'incertitude de type A couvre toutes les situations lors d'une série de mesures.

Question 8 : En comparant vos incertitudes-type de type A et de type B sur la grandeur T_{10}, commenter vos démarches.

Faut-il faire appel aux incertitudes de type A ou de type B ?
Il est toujours préférable de faire une série de mesures pour une grandeur donnée, et donc de faire appel à l'incertitude de type A et à un traitement statistique.
Cependant, si une série de mesures est impossible à mettre en œuvre (unique mesure due à un manque de temps, résultat de mesure invariable...), on fera appel à des incertitudes de type B.

5 Incertitude sur une grandeur calculée

Propagation des incertitudes et incertitude-type d'une grandeur calculée
Si x est une grandeur calculée indirectement à partir de deux grandeurs y et z, deux cas se présentent :
– x est une combinaison linéaire de y et z : $x = \alpha \times y + \beta \times z$. On a alors :

$$u(\overline{x}) = \sqrt{\alpha^2 \times u(\overline{y})^2 + \beta^2 \times u(\overline{z})^2}$$

– x est le produit de puissances de y et z : $x = y^\alpha \times z^\beta$. On a alors :

$$u(\overline{x}) = \overline{x} \times \sqrt{\left(\alpha \frac{u(\overline{y})}{\overline{y}}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(\overline{z})}{\overline{z}}\right)^2}$$

Incertitude élargie d'une grandeur calculée
On admet [a] que dans la plupart des cas, l'incertitude élargie d'une grandeur calculée avec une confiance de $95\,\%$ peut s'évaluer comme :

$$\Delta\overline{x} = 2 \times u(\overline{x})$$

a. Voir table 2 de l'article « *Pitfalls in uncertainty estimation : few measurements, non-gaussian distributions* » (2013) de Pétry *et al.*

Question 9 : On note T la période d'une seule oscillation. Déterminer $\overline{T}$ et $u(\overline{T})$ à l'aide de votre analyse statistique. Présenter le résultat sous la forme $T = \overline{T} \pm \Delta\overline{T}$.

La théorie du pendule simple montre que la grandeur $g \triangleq \dfrac{4\pi^2 \ell}{T^2}$ doit être égale à $g_{\text{réf}} = 9{,}806\,65\,\mathrm{m/s^2}$, intensité de la pesanteur.

Question 10 : Calculer $\overline{g}$ et $u(\overline{g})$. Proposer une valeur de g sous la forme $g = \overline{g} \pm \Delta\overline{g}$.

6 Résultats des mesurages

Comparaison des incertitudes à la référence

Une fois l'incertitude composée et la moyenne déterminées, il faut comparer ces résultats à la valeur tabulée (c'est-à-dire la valeur de référence) $x_{\text{réf}}$.

Les résultats sont cohérents si l'on a :

$$x_{\text{réf}} \in [\overline{x} - \Delta\overline{x}; \overline{x} + \Delta\overline{x}]$$

Question 11 : Commenter votre mesure de g.