Résumé sur les incertitudes

1 Quelles incertitudes utiliser ?

- Si l'on cherche à évaluer l'incertitude sur une série de valeurs, on utilisera une **incertitude statistique** (c'est-à-dire **de type A**) ;
- Si l'on cherche à évaluer l'incertitude sur une mesure unique, on utilisera une **incertitude de type B** ;
- Si l'on cherche à évaluer l'incertitude sur une grandeur calculée unique, on utilisera une **composition d'incertitudes**.

2 À quel moment utiliser quelles incertitudes ?

- L'incertitude de type A est facile à calculer (sous Scilab ou Excel), mais demande à répéter une même expérience plusieurs fois (un grand nombre de fois, essentiellement) ;
- L'incertitude composée ne nécessite qu'une seule expérience, mais le calcul de cette incertitude peut être très longue à évaluer.

3 Quelle est la différence entre l'incertitude-type et l'incertitude élargie ?

- L'incertitude-type $u(\overline{x})$ correspond à l'erreur aléatoire sur le mesurage. Elle ne représente pas une grandeur « facile à comprendre » physiquement : il s'agit d'un ordre de grandeur de l'étalement de votre série de valeurs autour de sa moyenne $\overline{x}$;
- L'incertitude élargie $\Delta\overline{x}$ correspond à la valeur pour laquelle on peut assurer, avec 95% de certitude, que x est compris entre $\overline{x} - \Delta\overline{x}$ et $\overline{x} + \Delta\overline{x}$. L'incertitude élargie dépend donc de l'intervalle de confiance choisi, contrairement à l'incertitude-type qui est « objectif ».

La relation entre $u(\overline{x})$ et $\Delta\overline{x}$ dépend du type d'incertitude choisi (type A, type B ou composition d'incertitudes).

Dans la plupart des cas, il n'est pertinent de calculer que l'incertitude-type $u(\overline{x})$; calculer l'incertitude élargie n'est important qu'à la toute fin, lorsque l'on a une valeur de référence que l'on souhaite comparer à notre intervalle de valeurs estimé avec une confiance de 95%.

4 Incertitude de type A (pour une série de valeurs)

Estimateurs de la moyenne et de l'écart-type d'une distribution

Si l'on a $n \geq 2$ valeurs $(x_1, \ldots, x_n)$ pour une grandeur donnée x, on définit la moyenne empirique $\overline{x}$ et l'écart-type empirique s_x selon les formules ci-dessous :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Les commandes informatiques permettant de calculer les estimateurs sont :

	moyenne	écart-type
Microsoft Excel	`=MOYENNE(...)`	`=ECARTYPE.STANDARD(...)`
Scilab	`mean(L)`	`stdev(L)`

où `L = [valeur_1, valeur_2, ..., valeur_n]` est la liste de mesures à étudier.

Incertitude-type (type A)

En effectuant n mesurages indépendants, les valeurs obtenues se répartissent aléatoirement sur une gaussienne. On peut montrer mathématiquement [a] que l'incertitude-type sur une distribution $(x_1, \ldots, x_n)$ est égale à :

$$u(\overline{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

a. Il s'agit d'un des résultats du « théorème central limite ».

Incertitude élargie (type A)

Si le nombre de mesurages n est très grand, on a 95% de chances que la valeur de x se situe dans l'intervalle $[\overline{x} - 1{,}96\ u(\overline{x}); \overline{x} + 1{,}96\ u(\overline{x})]$.

En pratique, on a rarement $n \gg 1$: il faut apporter un terme correctif qui va permettre d'élargir l'intervalle. Ce coefficient multiplicatif est appelé coefficient de Student, et est noté k ; on a alors l'incertitude élargie :

$$\Delta\overline{x} = k \times u(\overline{x}) = k \times \frac{s_x}{\sqrt{n}}$$

Les valeurs de k pour un niveau de confiance de 95% sont présentes dans le tableau ci-dessous.

nombre de mesures	coefficient de Student k
2	12,71
3	4,30
4	3,18
5	2,78
6	2,57
10	2,26
15	2,15
20	2,09
30	2,05

5 Incertitude de type B (pour une mesure unique)

Incertitude de type B

Pour un résultat de mesure ne fluctuant pas, et compris avec certitude dans l'intervalle $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, on admet que [a] :

$$\overline{x} = x_0 \qquad \text{et} \qquad u(\overline{x}) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \qquad \text{et} \qquad \Delta\overline{x} = \varepsilon$$

ε peut notamment être donné par le constructeur (par exemple : pour des instruments de verrerie) ou déterminé « avec raison » (par exemple : $\varepsilon = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ à $1\,\mathrm{mm}$ pour une règle graduée, selon l'exactitude avec laquelle la graduation tombe sur la longueur à mesurer).

a. Il faut bien comprendre que la notation $\overline{x}$ ne se rattache pas à une notion de moyenne statistique, mais plutôt ici à celle d'une médiane.

6 Incertitude composée (pour une grandeur calculée unique)

Propagation des incertitudes et incertitude-type d'une grandeur calculée

Si x est une grandeur calculée indirectement à partir de deux grandeurs y et z, deux cas se présentent :

- x est une combinaison linéaire de y et z : $x = \alpha \times y + \beta \times z$. On a alors :

$$u(\overline{x}) = \sqrt{\alpha^2 \times u(\overline{y})^2 + \beta^2 \times u(\overline{z})^2}$$

- x est le produit de puissances de y et z : $x = k \times y^\alpha \times z^\beta$. On a alors :

$$u(\overline{x}) = \overline{x} \times \sqrt{\left(\alpha \frac{u(\overline{y})}{\overline{y}}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(\overline{z})}{\overline{z}}\right)^2}$$

Incertitude élargie d'une grandeur calculée

On admet [a] que dans la plupart des cas, l'incertitude élargie d'une grandeur calculée avec une confiance de $95\,\%$ peut s'évaluer comme :

$$\Delta\overline{x} = 2 \times u(\overline{x})$$

a. Voir table 2 de l'article « *Pitfalls in uncertainty estimation : few measurements, non-gaussian distributions* » (2013) de Pétry *et al.*

Complément : estimation de l'incertitude composée à l'aide d'une simulation Monte-Carlo

Estimer l'incertitude d'une grandeur calculée unique x peut être long, avec d'autant plus d'étapes que le nombre de paramètres $y, z, t, \ldots$ dont dépend x augmente.

Un moyen rapide d'estimer ces incertitudes est de passer par une simulation informatique, dénommé **algorithme de Monte-Carlo**. L'idée est la suivante (en supposant que x s'écrive par exemple $x = y + \dfrac{z^2}{t}$, avec y, z et t des grandeurs mesurées) :

- On estime les incertitudes-type $u(\overline{y})$, $u(\overline{z})$ et $u(\overline{t})$ à l'aide des incertitudes de type A ou B, selon les cas ;
- Si l'incertitude sur y est issue d'une incertitude de type A, on tire aléatoirement y_1 selon une loi gaussienne (synonyme : loi normale) de moyenne $\overline{y}$ et d'écart-type $u(\overline{y})$; si l'incertitude sur y est issue d'une incertitude de type B, on tire aléatoirement y_1 selon une loi uniforme (synonyme : loi rectangulaire) d'intervalle $\left[\overline{y} - \sqrt{3} \times u(\overline{y}) ; \overline{y} + \sqrt{3} \times u(\overline{y})\right]$;
- Mêmes remarques pour z et t : on obtient une valeur z_1 pour z et une valeur t_1 pour t ;
- On calcule alors $x_1 = y_1 + \dfrac{z_1^2}{t_1}$ avec y_1, z_1 et t_1 qui viennent d'être tirés aléatoirement ;
- On répète l'opération un grand nombre N de fois (par exemple, $N = 100\,000$), ce qui donne $100\,000$ valeurs pour x : $(x_1, x_2, \ldots, x_{100\,000})$;
- On calcule la moyenne $\overline{x}$ de cette série de valeurs ainsi que son écart-type $s_{\overline{x}}$, qui correspond par définition à l'incertitude-type $u(\overline{x})$.