Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 3 : Réponse d'un système mécanique

Travaux dirigés

Exercice faisant uniquement appel à des outils mathématiques ____ $\sqrt{x}$
Exercice facile et/ou proche du cours ____ 🌡
Exercice accessible mais demandant du recul sur le cours et/ou sur les outils mathématiques ____ 🌡
Exercice complexe, de par son côté calculatoire et/ou astucieux ____ 🌡

Il est normal de « bloquer » sur les **exercices** : personne ne s'attend à ce que vous sachiez les faire en cinq minutes seulement. Il faut cependant persévérer, avoir le cours à côté afin de voir si un raisonnement similaire a déjà été abordé, et ne pas hésiter à parler avec vos camarades ou votre professeur.

Les **problèmes** sont issus d'annales de concours et/ou d'examens. Ils sont au moins aussi importants à aborder que les exercices, car ils sont les plus proches (en terme de rédaction et de questions « bout-à-bout ») de ce que vous aurez en devoir surveillé ainsi qu'au concours.

Chapitre 1 : Dynamique du point matériel

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le cas d'un mouvement rectiligne.	1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, problème

Questions de cours

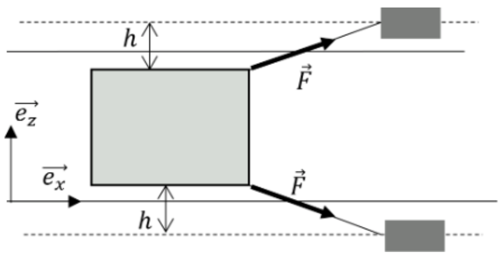
- ☐ Énoncer le principe des actions réciproques.
- ☐ Énoncer le principe fondamental de la dynamique ainsi que ses conditions d'application.
- ☐ Donner l'équation du mouvement d'un système masse-ressort horizontal à l'aide du PFD.
- ☐ Déterminer l'équation horaire d'un point matériel chutant dans le champ de pesanteur avec frottements à l'aide du PFD.

Exercices

1.1 Halage d'un bateau

Deux chevaux tractent un navire le long d'un canal. Leurs trajectoires, en pointillés sur le schéma, et celle du bateau sont parallèle aux berges.

On note $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ les forces de traction de chaque cheval, celles-ci étant communiquées au navire à l'aide de cordes de longueur $\ell = 20\,\mathrm{m}$. La norme chaque force de traction est $F = 750\,\mathrm{N}$.



Le bateau, de masse $m = 5\,\mathrm{tonnes}$, flotte grâce à la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$ qui compensent exactement le poids. L'eau exerce une force de frottements fluides $\vec{f} = -\lambda.\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse du bateau.

Données : $\lambda = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{SI}$ et $h = 3{,}0\,\mathrm{m}$.

1. Montrer que l'ensemble des forces exercées par les chevaux peut s'écrire $\vec{F'} = 2F \times \sqrt{1 - \dfrac{h^2}{\ell^2}}.\overrightarrow{e_x}$. Calculer la norme de cette nouvelle force.
2. Déterminer l'équation du mouvement du bateau.
3. En régime permanent, que vaut la vitesse limite v_{lim} du bateau ? Faire l'application numérique.

1.2 Brique sur un plan incliné

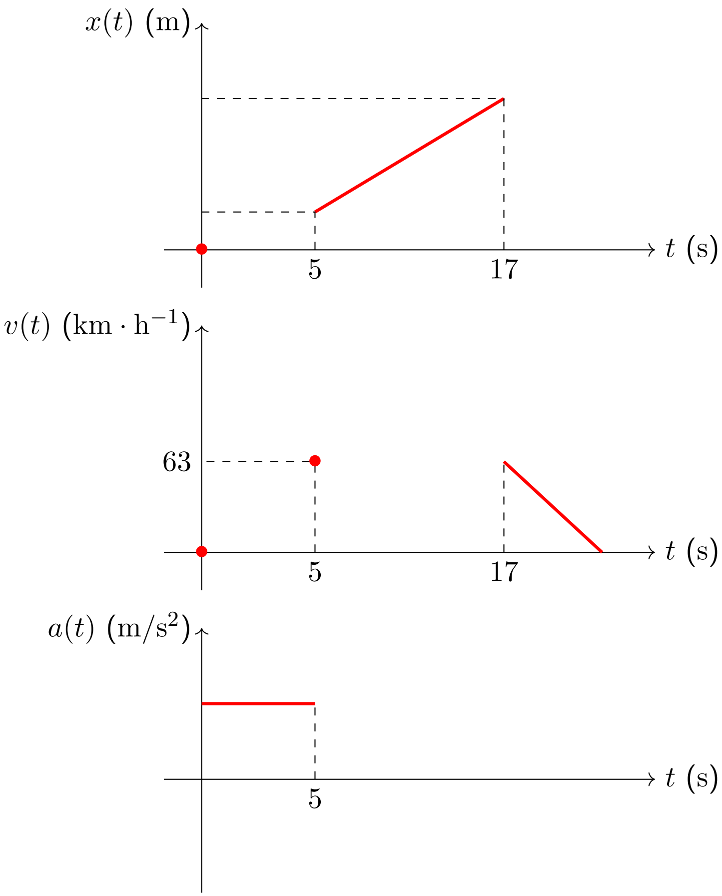
On considère un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. Une brique de masse $m = 600\,\mathrm{g}$ est lancée depuis le bas du plan vers le haut avec une vitesse $\vec{v}_0$ de norme $2{,}4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. On utilise, pour étudier le mouvement, un axe (Ox) parallèle au plan incliné et dirigé vers le haut et tel que O coïncide avec le départ de la brique.

On suppose que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottements.

1. Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de sa montée.
2. Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.

1.3 Accélération, vitesse et position

Une voiture roulant sur une route horizontale et rectiligne se déplace d'un point A à un point B distants de $300\,\mathrm{m}$. On donne les informations partielles sur la position $x(t)$, la vitesse $v(t)$ et l'accélération $a(t)$ de cette voiture pendant ce trajet :



N.B. : $(0,0)$ est un point de la courbe $x(t)$. $(0,0)$ et $(5,63)$ sont des points de la courbe $v(t)$.

1. Lors de la première phase, que peut-on dire que l'accélération ? En déduire une propriété de la vitesse puis une propriété de la position. Tracer leurs allures.
2. Lors de la seconde phase, que peut-on dire de la position ? En déduire une propriété de la vitesse puis une propriété de l'accélération. Tracer leurs allures.
3. Lors de la troisième phase, que peut-on dire de la vitesse ? En déduire une propriété de la position et une propriété de l'accélération. Tracer leurs allures.
4. En utilisant le fait que l'intégrale d'une fonction correspond à son aire sous la courbe, déterminer la durée totale pour parcourir la distance AB.

1.4 Descente à ski

Toto descend une piste à ski ; cette piste fait un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottements supposée de la forme $\vec{F} = -\lambda.\vec{v}$, où λ est un coefficient constant positif et $\vec{v}$ la vitesse de Toto.

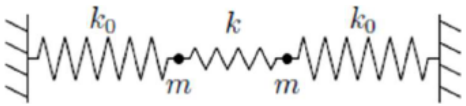
On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction exercée par la neige, et f le coefficient de frottements solides tel que $||\vec{T}|| = f||\vec{N}||$.

Soit O la position initiale de Toto. On note (O,x) l'axe parallèle à la pente, orienté vers le bas et (O,y) l'axe perpendiculaire la piste et dirigé vers le haut. Initialement, Toto possède une vitesse négligeable.

1. Faire un schéma faisant apparaître les quatre forces s'appliquant sur Toto ainsi que son accélération.
2. En appliquant le PFD à Toto et en projetant sur un axe approprié, exprimer $\vec{N}$. En déduire l'expression de sa norme N, puis celle de la réaction tangentielle T.
3. À l'aide de la seconde projection, exprimer l'accélération $a(t)$, puis la vitesse $v(t)$ de Toto à chaque instant.
4. Montrer que Toto atteint une vitesse limite v_ℓ. Application numérique : calculer v_ℓ avec $\lambda = 1{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$, $m = 80\,\mathrm{kg}$, $\alpha = 45°$ et $f = 0{,}90$.
5. Exprimer puis calculer la date t_1 où Toto a une vitesse égale à $v_\ell/2$.

1.5 Système à deux masses

On considère le dispositif représenté sur le schéma ci-dessous.



On note $x_1(t)$ la position du premier point et $x_2(t)$ celle du deuxième point ; l'origine des abscisses est prise au niveau du bâti de gauche. Tous les ressorts ont la même longueur à vide ℓ_0 ; L représente la distance entre le bâti de gauche et celui de droite.

1. En appliquant le PFD sur le premier point, déterminer une équation du mouvement liant x_1 et x_2.
2. Faire de même pour le deuxième point.
3. On pose $X(t) = x_1(t) + x_2(t)$ et $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$. En sommant et en soustrayant les deux équations précédentes, montrer que l'on obtient une équation portant sur $X(t)$ et une équation portant sur $x(t)$.
4. Les résoudre, sachant que $x_1(t=0) = \ell_0/2$, $\dot{x}_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 2\ell_0$ et $\dot{x}_2(t=0) = 0$.
5. En déduire les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Problème

À l'approche de Noël, le Père Noël décide de partir en voyage pour vérifier que son traîneau et ses rennes se déplacent correctement.

On modélise le Père Noël ainsi que son traineau par un point matériel M de masse m. Les deux rennes R_1 et R_2 tirant celui-ci exercent respectivement une force $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$, de normes respectives $T_1 = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{N}$ et $T_2 = 2{,}0 \times 10^3\,\mathrm{N}$.

Durant le déplacement du traineau, le Père Noël remarque que le rennes R_1 tire trop vers la gauche, alors que le renne R_2 tire trop vers la droite. Soient A_1 et A_2 les points d'attache de R_1 et R_2 sur le traîneau. On note $\alpha_1 = 45°$ l'angle que forme la corde R_1A_1 par rapport à l'axe du traîneau ; de même, on note $\alpha_2 = 30°$ celui que forme la corde R_2A_2 par rapport à l'axe du traîneau.

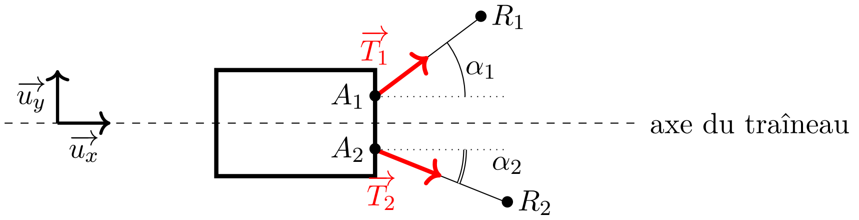


FIGURE 1.1 – Représentation du problème en vue du dessus. Le vecteur $\overrightarrow{u_z}$, non représenté ici, est selon la verticale du milieu.

On notera que les angles α_1 et α_2 sont positifs. Des frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur-vitesse du traîneau, le ralentissent. Le mouvement se fait horizontalement : le poids est exactement compensé par la réaction du support.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. En déduire l'expression de $\overrightarrow{T} \triangleq \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}$, force totale de traction des deux rennes, dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.
2. On donne : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}71$; $\sqrt{3} \approx 1{,}74$. Calculer numériquement chacune des composantes de $\overrightarrow{T}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. Représenter alors le vecteur $\overrightarrow{T}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, en utilisant une échelle de $1\,\mathrm{cm}$ pour $200\,\mathrm{N}$.
3. On admet que $\arctan(\theta) \approx \theta$ lorsque $\theta < 1$ et θ est exprimé en radians. De plus, on donne : $\dfrac{3}{25} = 0{,}12$. Montrer (sans utiliser un rapporteur) que le vecteur $\overrightarrow{T}$ fait un angle φ d'environ $7°$ avec l'axe du traîneau. Ce décalage se fait-il vers la gauche ou vers la droite du traîneau ?

On se place à présent en régime permanent : le Père Noël, ainsi que son traîneau, se déplacent à vitesse constante.

4. Faire le bilan des actions mécaniques appliquées au point M. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que l'on a alors $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\lambda}.\overrightarrow{T}$.
5. Selon quelle direction se déplace le Père Noël en régime permanent ? S'il souhaitait se déplacer selon l'axe du traîneau, lequel des deux rennes devrait diminuer sa force de traction ? Justifier.
6. On donne $\lambda = 30\,\mathrm{SI}$. Déterminer la valeur numérique, en $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, de la norme de la vitesse du Père Noël en régime permanent.

Indications et éléments de réponse

1.1 Halage d'un bateau

1. Projeter chaque force dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$, puis utiliser les règles trigonométriques pour exprimer les angles.
3. Que vaut l'accélération en régime permanent ? En déduire ce que devient l'équation du mouvement.

1.2 Brique sur un plan incliné

2. Que vaut la vitesse lorsque la brique s'arrête ?

1.3 Accélération, vitesse et position

4. On a $x(t_f) - x(t=0) = \int_{t=0}^{t_f} v(t)\mathrm{d}t$. Le membre de gauche est connu, et celui de droite peut s'interpréter comme la somme de trois aires faciles à calculer en fonction de notamment t_f. Isoler t_f.

1.4 Descente à ski

Adapter l'exercice du skieur vu en cours.

Chapitre 2 : Réponse fréquentielle d'un système mécanique

Contient également des notions du chapitre 3 : Résonance d'un système mécanique.

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Utiliser la notation complexe modélisant un signal sinusoïdal	2.2, 2.3, problème
Établir en régime forcé les expressions de la position et de la vitesse d'un mobile en mouvement rectiligne oscillant	2.3, problème
Simplifier et interpréter les solutions dans les cas limites basses fréquences et hautes fréquences ; tracer des diagrammes asymptotiques fréquentiels	2.4
Exploiter un spectre, analyser la réponse du système	2.4
Établir la possibilité de l'existence d'une résonance en amplitude	problème

Questions de cours

- ☐ Soit le signal réel $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$. Donner l'expression du signal complexe $\underline{u}(t)$; expliciter notamment son amplitude complexe $\underline{U}$.
- ☐ Démontrer que dériver un signal réel correspond à multiplier le signal complexe correspondant par $j\omega$.
- ☐ Déterminer la solution de $5\dot{u} + \dfrac{1}{\tau}u = 3\cos(\omega t)$ en régime permanent.

- ☐ Qu'appelle-t-on résonance en position pour un système mécanique ? Qu'appelle-t-on résonance en vitesse pour un système mécanique ?
- ☐ Soit un système mécanique dont l'équation du mouvement est $\ddot{X} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \times E_0\cos(\omega_0 t)$. Déterminer la pulsation de résonance ω_r en position du système.
- ☐ Soit un système mécanique dont l'équation du mouvement est $\ddot{X} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \times E_0\cos(\omega_0 t)$. Déterminer la pulsation de résonance ω_r en vitesse du système.

Exercices

2.1 Maniement des complexes

1. Déterminer les modules des nombres complexes suivants :

$$A = 1 + 4j \quad ; \quad B = \frac{2-j}{j} \quad ; \quad C = \frac{3+3j}{-1+j}$$

$$D = 2e^{2j+5} \quad ; \quad E = e^{2j\pi/3}$$

2. Déterminer les arguments des nombres suivants :

$$A = 1+j \quad ; \quad B = -3 \quad ; \quad C = \frac{-1+j}{2} \quad ; \quad D = \sqrt{2}j \quad ; \quad E = e^{10j\pi}$$

2.2 Passage entre représentations réelle et complexe

Donner l'amplitude complexe ou le signal réel dans les cas suivants, en supposant le régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.

Exemple : $x(t) = X_0\cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{X_0} = X_0 e^{j\varphi}$.

- $u(t) = U_0\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$
- $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t - \psi)$
- $s(t) = S_m\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$
- $\underline{U_L} = U_m\, e^{-j\pi/3}$
- $\underline{I_1} = -\dfrac{jU_0}{R}$
- $\underline{I} = -I_m e^{j\pi/6}$

2.3 Circuit RC série en régime forcé

L'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC série s'écrit :

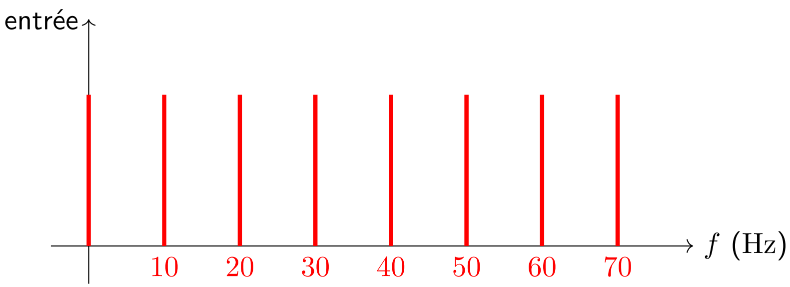
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{1}{\tau}e(t)$$

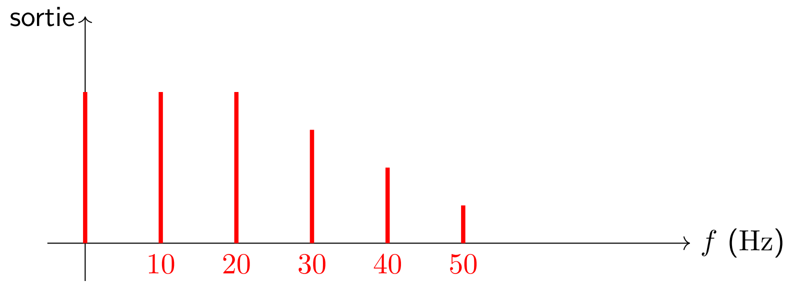
Ici, on se situe en régime forcé : $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On cherche une solution particulière sous la forme $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

1. Écrire l'équation différentielle en termes des amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{E}$.
2. Résoudre cette équation pour déterminer $\underline{U}$.
3. En déduire l'expression de U_0 et de φ.
4. On rappelle que la relation intensité-tension pour un condensateur est : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Déduire des questions précédentes l'amplitude complexe $\underline{I}$ de l'intensité puis son amplitude réelle I_0.

2.4 Analyse qualitative d'un spectre

On fournit le spectre d'un signal d'entrée ainsi que celui du signal de sortie d'un filtre.





En déduire l'allure du diagramme fréquentiel du système.

Problème

On se propose d'étudier le principe de fonctionnement des accéléromètres présents dans nos téléphones. Dans toute la suite :

— On note $\mathcal{R}_T$ le référentiel terrestre supposé galiléen, de centre O et muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ fixe dans ce référentiel. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre, et on prendra $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

— On note $\mathcal{R}$ le référentiel lié au téléphone. Dans un premier temps, $\mathcal{R}$ est astreint à un mouvement de translation selon la direction (O, x).

On donne ci-dessous une schématisation simplifiée de l'accéléromètre étudié :

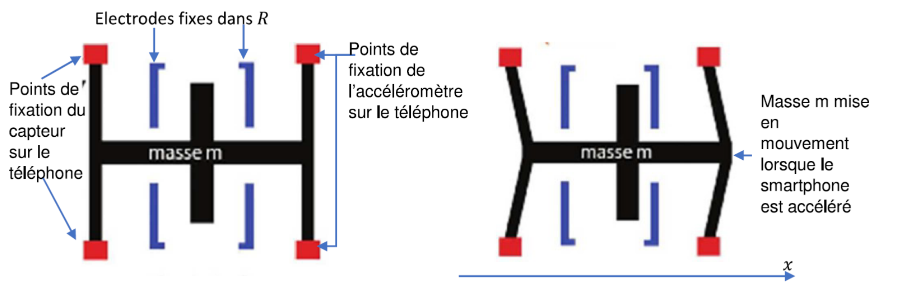
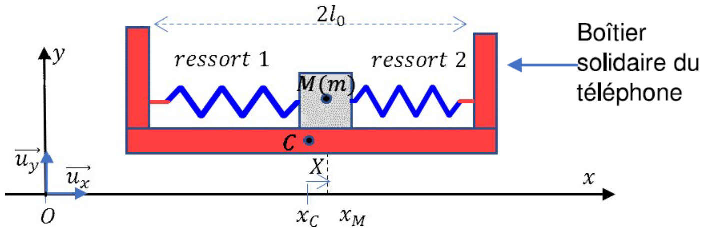


Figure 1 : Smartphone immobile dans R_T

Figure 2 : Smartphone accéléré dans R_T

Source : « Smartphonique » d'Ulysse Delabre (Dunod)

Pour cette étude mécanique, nous ne prendrons pas en compte les électrodes du capteur, fixes dans $\mathcal{R}$. Lorsque le téléphone est accéléré horizontalement selon (O,x) (figure 2), le bloc de masse m du capteur est mis en mouvement. Il s'ensuit des oscillations de la masse m qui peuvent être décrites de manière analogue à un système mécanique de type masse-ressorts. Dans la suite, nous allons donc modéliser l'accéléromètre en l'assimilant à une masse m repérée par le point M et reliée à deux ressorts. Ces deux ressorts sont fixés à un boîtier de centre C qui est lui-même solidaire du téléphone :



Ce modèle suppose que les deux ressorts sont identiques, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On note $\overrightarrow{f_1}$ la force qu'exerce le ressort 1 sur M et $\overrightarrow{f_2}$ la force qu'exerce le ressort 2 sur M. Le boîtier est de longueur $2\ell_0$. Le point C, repéré par l'abscisse $x_C(t)$, est animé d'un mouvement rectiligne et accéléré par rapport à $\mathcal{R}_T$ et son accélération sera notée $\overrightarrow{a_C} = a_C.\overrightarrow{u_x}$. La masse m, dont la position est repérée par le point M d'abscisse $x_M(t)$ à l'instant t, est astreinte à un mouvement horizontal. Dans la suite, on pose $X = x_M - x_C$: ainsi, $X = 0$ si l'accéléromètre est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre.

1. Exprimer $\overrightarrow{f_1}$ puis $\overrightarrow{f_2}$ en fonction de k et X.

Le mobile M subit donc une force $\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} = -2kX.\overrightarrow{u_x}$ de la part des ressorts et subit également la réaction normale du support, son poids ainsi qu'une force de frottements donnée par $\overrightarrow{f_3} = -\alpha\left(\dot{x}_M - \dot{x}_C\right).\overrightarrow{u_x}$ où α est une constante.

2. En utilisant le principe fondamental de la dynamique pour étudier le mouvement de M dans le référentiel terrestre, montrer que $X(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = -a_C$$

où ω_0 et Q sont deux constantes dont on précisera les expressions en fonction des données du sujet.

3. Donner les unités de ω_0 et Q ainsi que les significations physiques de ces deux grandeurs.

Dans la suite, nous allons chercher à déterminer les conditions pour lesquelles le déplacement X est proportionnel à l'accélération a_C que l'on cherche à mesurer. Pour cela, on va étudier la réponse du capteur en régime sinusoïdal forcé tel que $a_C = a_m\cos(\omega t)$ où ω est la pulsation à laquelle oscille le téléphone et $a_m > 0$ est une constante. Dans ces conditions, on écrit $X(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)$ où $X_m > 0$ et φ sont des constantes pour une valeur de ω donnée. En utilisant la notation complexe, on écrit $\underline{X} = X_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\underline{a_C} = a_m e^{j\omega t}$.

4. En posant $u = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, montrer que $X_m = \dfrac{a_m}{\omega_0^2\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\dfrac{u}{Q}\right)^2}}$.

Dans la suite, on prendra $Q = 5$ et $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 5\,\mathrm{kHz}$.

5. Montrer qu'il est possible d'observer un phénomène de résonance en élongation à la fréquence $f_r = f_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$.
6. Proposer une estimation de la valeur de f_r.
7. Expérimentalement, on stimule le capteur à des fréquences $f \ll f_r$, montrer alors que $X_m \approx K a_m$ où K est une constante que l'on exprimera en fonction des données du sujet.
8. Pour cette question, on impose une accélération a_C constante telle que $a_C = g$. Estimer alors la valeur finale de X en nm.