Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 3 : Réponse d'un système mécanique

Cours

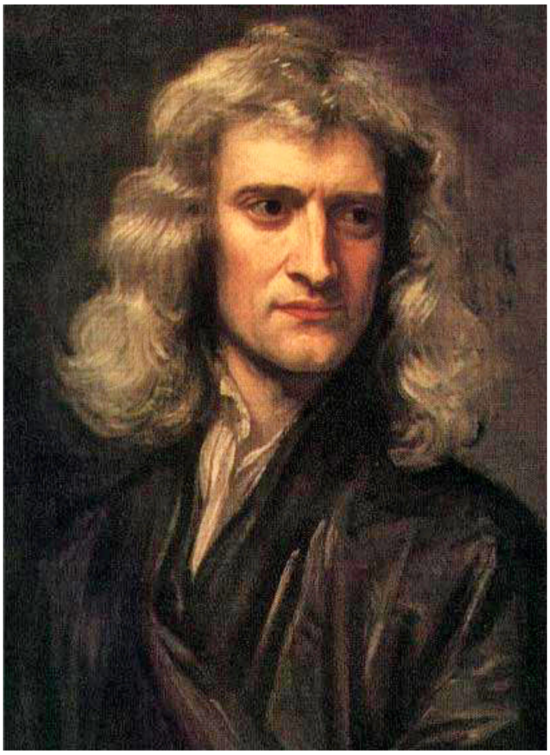


Figure 1 – Isaac Newton (1643 – 1727) est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Gottfried Wilhelm Leibniz, du calcul infinitésimal.

Table des matières

1 Dynamique du point matériel **1**
1.1 Rappels et compléments sur les coordonnées cartésiennes 1
1.2 Actions, interactions et forces 4
1.2.1 Les interactions fondamentales 4
1.2.2 Des interactions aux forces 4
1.2.3 Exemples de forces 5
1.3 Principe fondamental de la dynamique (PFD) 7
1.3.1 Énoncé 7
1.3.2 Applications du PFD 8

2 Régime sinusoïdal forcé d'un système mécanique **13**
2.1 Décomposition d'un signal 13
2.1.1 Pour un signal périodique 13
2.1.2 Pour un signal non périodique 16
2.2 Régime sinusoïdal forcé 16
2.2.1 Définition et objectif 16
2.2.2 Notation complexe 17
2.3 Application à un système masse-ressort horizontal 18
2.3.1 Position du problème 18
2.3.2 Équation du mouvement 19
2.3.3 Solutions de l'équation 20

3 Résonance d'un système mécanique **23**
3.1 Résonance en position 23
3.2 Résonance en vitesse 26

4 De la dynamique à l'énergétique **28**
4.1 Puissance d'une force 28
4.2 Travail d'une force 30
4.3 Mouvements conservatifs et énergie potentielle 32
4.4 Démonstration du théorème de la puissance mécanique 33

Chapitre 1 : Dynamique du point matériel

Objectifs :

— Énoncer le principe des actions réciproques et l'appliquer dans le cas de la réaction d'un support en l'absence de frottement solide.

— Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans le cas d'un mouvement rectiligne.

— Exprimer algébriquement les coordonnées d'un vecteur. Utiliser les systèmes de coordonnées cartésiennes.

— Interpréter géométriquement le produit scalaire et connaître son expression en fonction des coordonnées sur une base orthonormée.

Au concours ATS : Aux écrits en 2022, 2021, 2019, 2018, 2017. Tombe régulièrement aux oraux.

1.1 Rappels et compléments sur les coordonnées cartésiennes

Coordonnées cartésiennes

Les trois coordonnées cartésiennes d'un point M dans un repère orthonormé [a] $(Oxyz)$ choisi sont rigoureusement notées x_M, y_M et z_M :

- x_M est l'abscisse du point M ($x_M \in]-\infty;+\infty[$) ;
- y_M est l'ordonnée du point M ($y_M \in]-\infty;+\infty[$) ;
- z_M est la cote du point M ($z_M \in]-\infty;+\infty[$).

a. Les trois directions sont orthogonales les unes aux autres, et le vecteur directeur $\vec{e}_j$ de l'axe (Oj) a une norme égale à 1 ($j = x, y, z$).

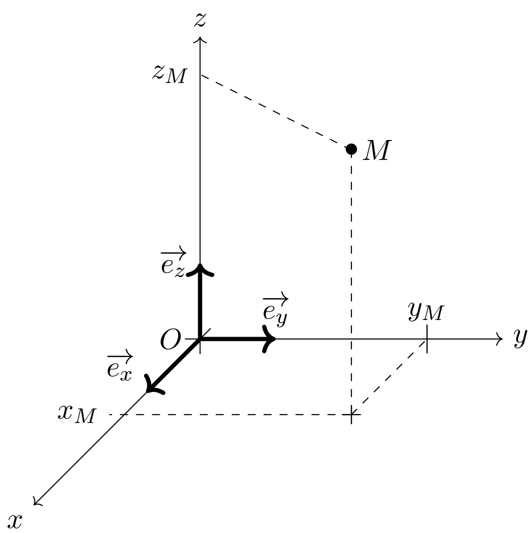


Figure 1.1 – Description de la position d'un point en coordonnées cartésiennes.

Vecteur-position

Si O est l'origine d'un repère $\mathcal{R}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé **vecteur-position** du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.
L'ensemble des positions successives du point M définit sa **trajectoire**.

Question 1 : Que valent les grandeurs $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{e_z}$? Écrire alors l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$.

Vecteur-vitesse

On définit le **vecteur-vitesse** $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ d'un point M dans un repère $\mathcal{R}$ à partir de son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

Le vecteur-vitesse est tangent, en tout point, à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement.
Si la norme $||\vec{v}(M/\mathcal{R})||$ est constante, le mouvement du point est **uniforme**.
Si le vecteur $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ a une direction constante, le mouvement du point est **rectiligne**.

Question 2 : Exprimer $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ en fonction de $v_x \triangleq \dot{x}$, $v_y \triangleq \dot{y}$ et $v_z \triangleq \dot{z}$.

Vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes

Le vecteur-vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{x}(t).\overrightarrow{e_x} + \dot{y}(t).\overrightarrow{e_y} + \dot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$$

☛ *Remarque :* Pour un mouvement vertical, on aura toujours $\vec{v} = \dot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$, que l'axe (O,z) soit vers le haut ou vers le bas ! $\dot{z}(t)$ est une fonction pouvant être positive ou négative, et le vecteur-vitesse sera donc automatiquement dans le bon sens, quel que soit le sens du vecteur $\overrightarrow{e_z}$. Il ne faut donc jamais chercher à écrire $\vec{v} = -\dot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$, même si votre intuition vous dit le contraire.

Question 3 : Soient deux points O et O' fixes l'un par rapport à l'autre dans le référentiel $\mathcal{R}$. Montrer que le vecteur-vitesse ne dépend pas, en coordonnées cartésiennes, du choix de l'origine du repère.

Vecteur-accélération

On définit le **vecteur-accélération** $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ d'un point M dans un repère $\mathcal{R}$ à partir de son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ ou de son vecteur-vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

Question 4 : Exprimer $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ en fonction de $a_x \triangleq \ddot{x}$, $a_y \triangleq \ddot{y}$ et $a_z \triangleq \ddot{z}$.

Vecteur-accélération en coordonnées cartésiennes

Le vecteur-accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \ddot{x}(t).\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}(t).\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$$

☛ *Remarque :* Même remarque que pour le vecteur-vitesse : on n'a jamais $\vec{a} = -\ddot{z}(t).\overrightarrow{e_z}$...

1.2 Actions, interactions et forces

1.2.1 Les interactions fondamentales

Les interactions fondamentales

On dit que deux systèmes interagissent quand ils exercent une influence l'un sur l'autre. L'ensemble des phénomènes observés en physique font intervenir quatre types d'interactions fondamentales, a priori très différentes.
Les deux interactions les plus connues et immédiatement perceptibles sont :

— la gravitation qu'exerce et ressent tout système physique. C'est elle qui est notamment responsable du champ de pesanteur terrestre et du mouvement des planètes. Elle joue un rôle très important en astrophysique, où elle domine dans de nombreuses situations ;

— l'interaction électromagnétique qui n'existe qu'entre des objets chargés électriquement ou aimantés. C'est elle qui est responsable de la cohésion des atomes et molécules mais aussi de tous les processus chimiques.

Il existe toutefois deux autres interactions plus complexes et se manifestant de façon moins évidente :

— l'interaction (nucléaire) faible qui est responsable de certains types de radioactivité et dont il a été montré dans les années 1960–1970 qu'elle formait avec l'interaction électromagnétique deux facettes d'une seule et même interaction plus fondamentale, l'interaction électrofaible ;

— l'interaction de couleur qui s'exerce entre quarks et qui explique l'interaction (nucléaire) forte, responsable de la cohésion des noyaux atomiques.

Les deux premières interactions sont de portées illimitées : tous objets de l'Univers sont en interaction gravitationnelle, voire électromagnétique s'ils sont chargés. Les interactions faible et de couleur sont cependant de portées limitées, ne dépassant pas la taille du noyau d'un atome.

1.2.2 Des interactions aux forces

Action mécanique et force

On appelle action mécanique toute action, exercée par un système extérieur et pouvant modifier, provoquer ou empêcher le mouvement d'un objet.
Une action mécanique exercée sur un point matériel est modélisée par un vecteur-force : sa norme correspond à l'intensité de la force, sa direction et son sens traduisent ceux de l'action. L'unité du Système International pour la force est le newton N.

Principe des interactions (ou d'action-réaction, ou troisième loi de Newton)

Si deux points A et B sont en interaction, alors la force exercée par A sur B s'oppose à celle exercée par B sur A. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

Question 5 : Que peut-on en conclure sur les normes des deux forces ?

1.2.3 Exemples de forces

Poids

Poids

Au voisinage de la Terre, un corps subit une force appelée **poids** (noté $\vec{P}$), qui est proportionnelle à sa masse :

$$\vec{P} = m.\vec{g}$$

où $\vec{g}$ est le **champ de pesanteur**, vertical et orienté vers le bas.
On considère généralement $\vec{g}$ uniforme, de norme $g = 9{,}81\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$. Son origine principale est l'attraction gravitationnelle de la Terre.

Force de rappel d'un ressort

Force de rappel d'un ressort

Un ressort linéaire est caractérisé par sa longueur au repos ℓ_0 et sa constante de raideur k. Dans le modèle idéal, il est de masse négligeable et toute variation de sa longueur l produit sur chacune de ses extrémités la force :

$$\overrightarrow{F_r} = -k(\ell - \ell_0).\overrightarrow{e}_{r\to p}$$

où $\overrightarrow{e}_{r\to p}$ est le vecteur unitaire de la direction du ressort, orienté du ressort vers le point d'attache considéré.

Remarque : Il faut à tout prix retenir ce qu'est $\overrightarrow{e}_{r\to p}$: s'il y a une erreur de signe, l'équation du mouvement sera fausse !

Remarque : Dans la parenthèse, il s'agit bien de $\ell - \ell_0$, avec ℓ la longueur du ressort. Pour un bon nombre d'exercices, ℓ sera souvent assimilée à la position d'une extrémité du ressort (par exemple, figure 1.2) ; cependant, ce n'est pas toujours le cas, et remplacer ℓ par $x(t)$ sans y réfléchir davantage est une erreur courante qui coûte beaucoup de points !

Question 6 : Exprimer la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F_r}$ de la figure 1.2.

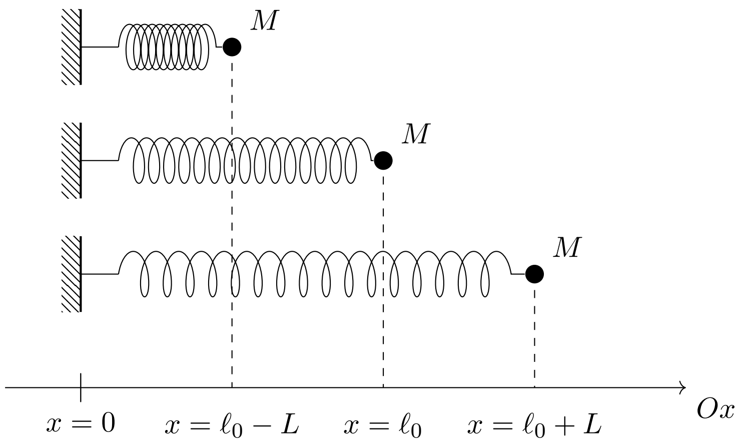


FIGURE 1.2 – Ressort compressé (haut), au repos (milieu) et tendu (bas).

Question 7 : Représenter dans la figure 1.2 les forces en chacun des points d'attache du ressort si $\ell < \ell_0$; si $\ell = \ell_0$; si $\ell > \ell_0$.

Force de réaction du support

Force de réaction du support

En l'absence de frottements entre un solide S et son support, la **réaction du support** $\overrightarrow{R}$ est une force orthogonale au support et orientée du support vers le solide :

$$\overrightarrow{R} = R.\overrightarrow{n}_{\text{support}\to S}$$

Sa norme R est *a priori* inconnue.

Force de frottements fluides

Force de frottements fluides (ou visqueux)

Quand un solide S est en mouvement dans un fluide, celui-ci exerce une **force de frottements fluides** (ou **force de frottements visqueux**) de sens opposé au vecteur-vitesse de S. Pour une vitesse suffisamment faible, la norme est proportionnelle à celle de la vitesse :

$$\vec{f} = -\lambda.\vec{v}(S)$$

☛ *Remarque :* Pour les vitesses très élevées, on a $\vec{f} = -\alpha||\vec{v}(S)||.\vec{v}(S)$ (donc de norme $\alpha \times v(S)^2$).

1.3 Principe fondamental de la dynamique (PFD)

1.3.1 Énoncé

Principe fondamental de la dynamique (PFD)

Pour un point matériel M de masse constante m se déplaçant à l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soumis à des forces extérieures de somme $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$, le principe fondamental de la dynamique (PFD) peut se simplifier en :

$$m.\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

☛ *Remarque :* Il est primordial d'avoir un référentiel galiléen pour vérifier cette relation. Prenons l'exemple d'un trajet en voiture : si l'on avance à vitesse constante, quitte à négliger les frottements, on ne subira pas les mêmes forces dans sur une ligne droite ou dans un virage. Ce dernier cas fait intervenir des forces d'inertie, qui ne sont pas au programme d'ATS.

Question 8 : Donner la dimension d'une force en fonction des dimensions fondamentales (ici : longueur, masse, temps).

Intérêt du principe fondamental de la dynamique

Le PFD est une équation tridimensionnelle (selon trois directions de l'espace), donnant donc trois équations.
Lors d'un mouvement unidirectionnel, la projection du PFD selon la direction du mouvement donnera systématiquement l'équation du mouvement, tout comme le TPM. Ainsi, le TPM et le PFD semblent équivalents...
Il y a cependant des différences notables :

- Le mouvement peut ne pas être unidirectionnel : par exemple, un ballon de football aura une trajectoire parabolique, ce qui nécessite une étude sur deux directions différentes ;
- Le TPM ne peut fournir d'informations sur la direction orthogonale à celle du mouvement, alors que l'on peut projeter le PFD sur cette direction ;
- Le système peut être composé d'une multitude de points mobiles : on peut ainsi appliquer n PFD aux n points du système, ce qui permet d'obtenir suffisamment d'équations indépendantes afin de déterminer chaque position. Le TPM ne peut, quant à lui, s'appliquer qu'au système dans sa globalité.

1.3.2 Applications du PFD

Lorsque l'on veut étudier le couplage entre forces et mouvement d'un corps, on part quasi-systématiquement du PFD. Cependant, cela doit se faire en un certain nombre d'étapes :

1. On définit le système étudié ;
2. On choisit du référentiel (en s'assurant qu'on puisse le supposer galiléen, en ATS [1]) ;
3. On trace le diagramme corps-interactions représentant le système d'étude au centre et les corps extérieurs à l'extérieur ; une double flèche entre chaque corps extérieur et le corps d'étude représente chacune des interactions ;
4. On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au système dans le référentiel, et on exprime chacune des forces associées dans une base quelconque ;
5. Application mathématique du PFD.

1. La plupart du temps, il suffit de dire que la durée d'étude est « suffisamment courte » pour négliger les effets non-galiléens.

Mouvement horizontal d'un point matériel entre deux ressorts

On considère le dispositif représenté sur le schéma ci-dessous. Le point A a une masse m_A et une abscisse x_A ; le point B a une masse m_B et une abscisse x_B.

On néglige la pesanteur et la réaction du support, et on admet qu'une force de frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}(B)$ s'applique uniquement sur le point B.

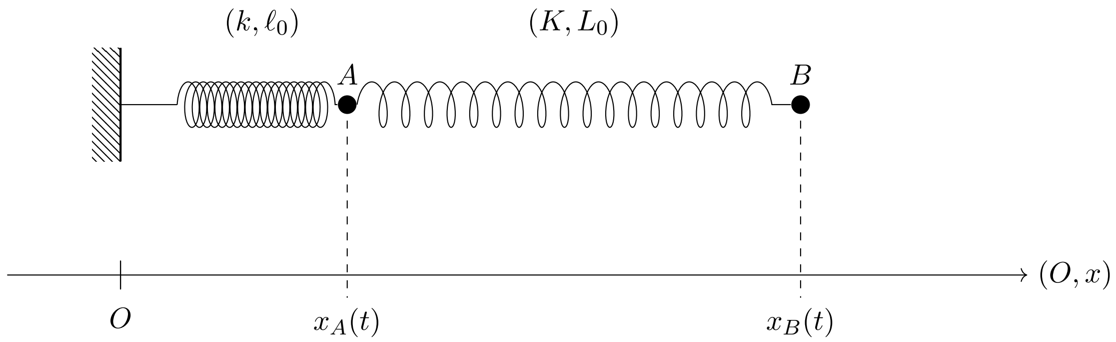


FIGURE 1.3 – Position des ressorts à un instant quelconque.

Question 9 : Déterminer les longueurs ℓ_g et ℓ_d des ressorts de gauche et de droite. Déterminer également les accélérations des points A et B.

Question 10 : Faire le bilan des actions mécaniques s'appliquant sur le point A. Les exprimer explicitement en fonction des données de l'énoncé.

Question 11 : En appliquant le PFD, déterminer l'équation du mouvement du point A.

Question 12 : Faire le BAME appliquées au point B et déterminer également l'équation du mouvement de ce point.

Déplacement d'un point matériel avec frottements fluides

Un skieur, assimilé à un point M de masse m, glisse le long d'une pente faisant un angle α avec l'horizontale. En plus de son poids $\overrightarrow{P}$, le skieur subit une force de frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ est son vecteur-vitesse (voir figure 1.4).

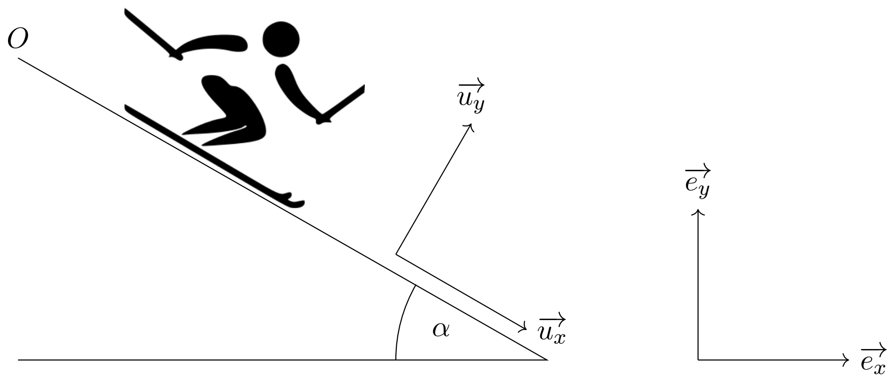


Figure 1.4 – Descente d'un skieur sur une piste.

La base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ est celle liée à l'horizontalité et à la verticalité locale ; la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ est celle liée à la pente.

O est l'origine du repère, située en haut de la pente. Elle correspond à la position initiale du skieur, qui y possède une vitesse nulle. On note $x(t)$ la position du skieur selon la pente : $\overrightarrow{OM} = x(t).\overrightarrow{u_x}$.

Question 13 : Effectuer le BAME appliquées au skieur, en les exprimant dans les bases pertinentes. Faire apparaître les vecteurs sur la figure 1.4, sans se soucier de l'échelle.

Question 14 : Dessiner la figure de changement de base entre les bases $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ et $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$. En déduire l'expression de $\overrightarrow{e_y}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$.

Question 15 : Exprimer l'accélération du skieur $\overrightarrow{a}(M)$ dans la base adaptée. Appliquer le PFD au skieur ; en déduire l'équation du mouvement en projetant selon $\overrightarrow{u_x}$.

Question 16 : Que nous apprend la projection du PFD selon $\overrightarrow{u_y}$?

Question 17 : Déterminer la vitesse $v(t)$ du skieur en fonction de $v_{\text{éq}} \triangleq \frac{mg}{\lambda}\sin(\alpha)$ et $\tau \triangleq \frac{m}{\lambda}$. On utilisera la condition initiale sur la vitesse.

Outils mathématiques

Le produit scalaire et la norme

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ s'écrit $\vec{u} \cdot \vec{v}$, et est égal par définition à $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x\ v_x + u_y\ v_y + u_z\ v_z$. On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est égal à 0.

La norme d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ se note $||\vec{u}||$, et est égale par définition à $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$. On dit qu'un vecteur est unitaire si sa norme est égale à 1.

À partir de cette définition de la norme, on peut déterminer une deuxième expression pour le produit scalaire de deux vecteurs : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

La dérivée d'un vecteur et d'un produit scalaire

La dérivée d'un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ exprimé dans une base $\mathcal{B}$ indépendante du temps revient à dériver chacune des composantes : $\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Dériver un produit scalaire revient à utiliser la règle du produit classique : $\frac{\mathrm{d}\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Énoncer le principe des actions réciproques.
- ☐ Énoncer le principe fondamental de la dynamique ainsi que ses conditions d'application.
- ☐ Donner l'équation du mouvement d'un système masse-ressort horizontal à l'aide du PFD.
- ☐ Déterminer l'équation horaire d'un point matériel chutant dans le champ de pesanteur avec frottements à l'aide du PFD.

Chapitre 2 : Régime sinusoïdal forcé d'un système mécanique

Objectifs :

— Utiliser la notation complexe modélisant un signal sinusoïdal.

— Établir en régime forcé les expressions de la position et de la vitesse d'un mobile en mouvement rectiligne oscillant.

— Exploiter un spectre, analyser la réponse du système.

Au concours ATS : Aux écrits en 2023, 2021, 2020, 2019, 2017. Tombe régulièrement aux oraux.

PROBLÉMATIQUE

Une voiture de masse m se déplace à vitesse horizontale constante V sur une route bosselée d'équation $y(x) = Y_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$, avec L l'espacement horizontal entre deux bosses successives et Y_0 l'amplitude de ces bosses.

Ce véhicule est constitué d'une suspension et d'un amortisseur, respectivement équivalents à un ressort de constante de raideur k et à une force de frottements fluides de coefficient λ.

On note $z(t)$ l'altitude du centre de masse du véhicule par rapport à sa position d'équilibre ; quelle est son expression en régime permanent ?

2.1 Décomposition d'un signal

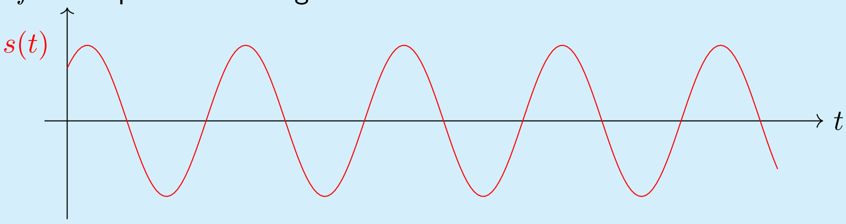
2.1.1 Pour un signal périodique

Signal pur

Un signal périodique est **pur** s'il peut être mis sous forme sinusoïdale :

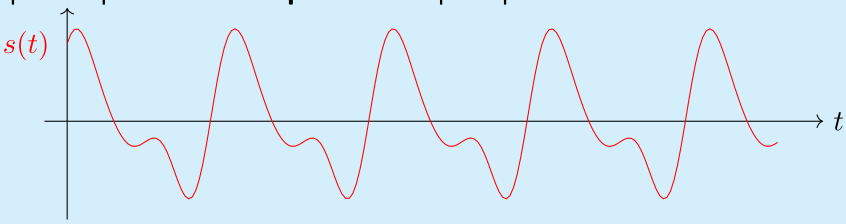
$$s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la pulsation du signal.



Signal composé

Un signal périodique est dit **composé** s'il ne peut pas être mis sous forme sinusoïdale.



Une des découvertes majeures de Joseph Fourier (1738–1830), mathématicien et physicien français, a consisté à comprendre qu'un son périodique de fréquence f peut en fait se « décomposer » en une somme de sons purs de fréquences respectives f, $2 \times f$, $3 \times f$, etc. C'est ce que l'on appelle l'analyse de Fourier, qui a ouvert tout un pan des mathématiques, et a permis à Fourier de résoudre des problèmes sur le transport de la chaleur.

Par exemple, on peut analyser mathématiquement le signal composé précédent, et s'apercevoir qu'il s'agit en fait d'une somme de trois signaux purs (figure 2.1).

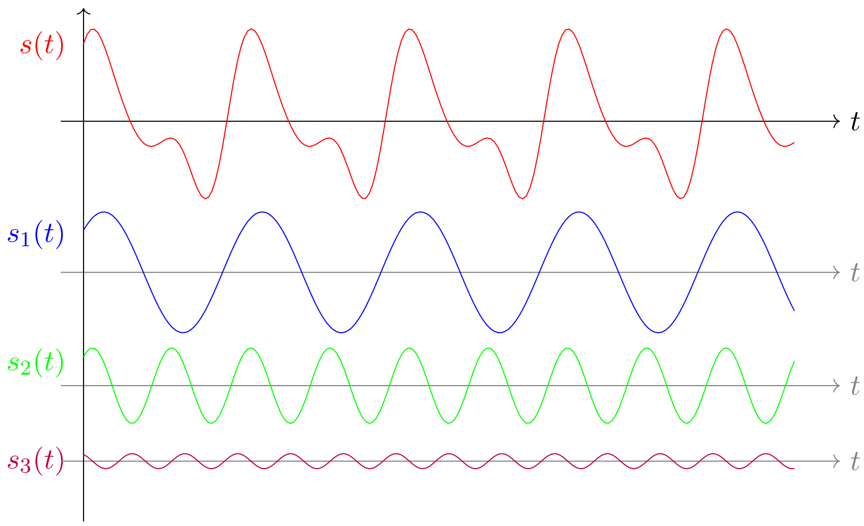


Figure 2.1 – Décomposition du signal $s(t)$ en somme de signaux sinusoïdaux.

Dans la figure 2.1, on a donc $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$ avec chaque $s_n(t)$ de la forme $s_n(t) = S_n \cos(n \times \omega t + \varphi_n)$, où ω est la pulsation de $s(t)$.

Décomposition en série de Fourier

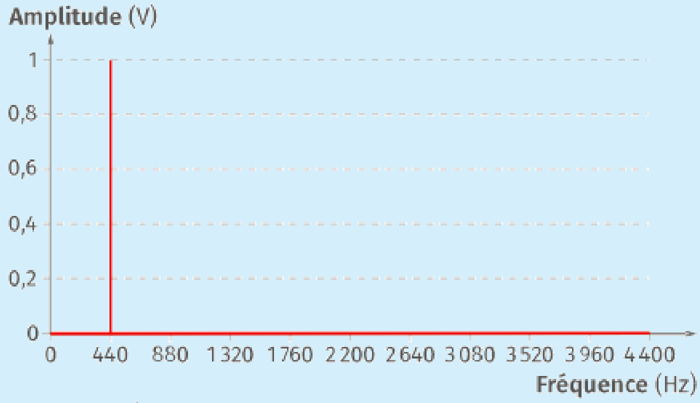
Soit un signal périodique $s(t)$ de pulsation ω. On peut décomposer ce signal en une somme, potentiellement infinie, de signaux sinusoïdaux :

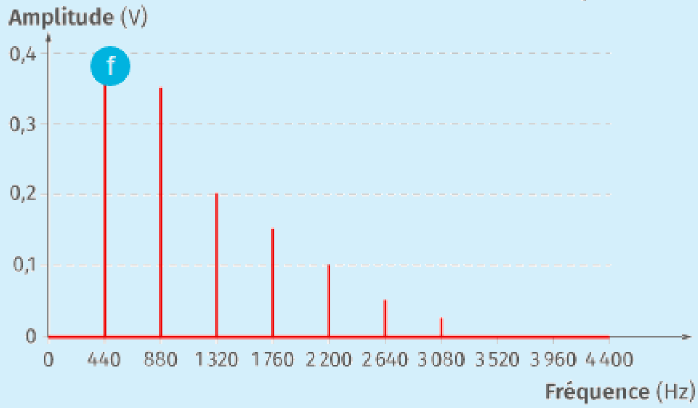
$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

où S_0 est la **valeur moyenne** de $s(t)$. Cette décomposition se nomme **décomposition en série de Fourier**, et la suite des (S_n) est la suite des **coefficients de Fourier** du signal $s(t)$.

Spectre de Fourier, fondamental et harmoniques

Le **spectre** d'un signal périodique est la représentation graphique des différentes fréquences le constituant. Un trait vertical correspond à la présence d'une fréquence donnée par l'abscisse ; la longueur de ce trait correspond à l'amplitude de cette fréquence.
La raie présente à la pulsation ω du signal correspond au **fondamental** ; les autres raies sont appelées **harmoniques** (la n-ième raie est l'harmonique de rang n).
Ci-dessous sont les spectres d'un signal pur et d'un signal composé.





L'intérêt de pouvoir décomposer un signal périodique composé en signaux sinusoïdaux est de pouvoir simplifier l'étude du signal composé. En effet, si l'on sait comment réagit un système à une excitation sinusoïdale d'amplitude A et de pulsation ω, il suffira d'additionner les réponses pour chacune des excitations afin d'obtenir la réponse totale du système.

Question 1 : Tracer les spectres en amplitude et en phase du signal : $e(t) = 3\cos(\omega t) - 5\cos(2\omega t) + \sin(4\omega t)$.

2.1.2 Pour un signal non périodique

Si l'on pousse les mathématiques un peu plus loin, on peut démontrer que quasiment tous les signaux physiques peuvent se décomposer en sinusoïdes, qu'ils soient périodiques ou non.

Par exemple, une impulsion (voir figure 2.2) possède un spectre ; celui-ci est juste continu, à l'inverse du spectre de raies d'un signal périodique. La somme se transforme alors en :

$$s(t) = \int_0^\infty S(\omega)\cos(\omega t + \varphi_\omega)\mathrm{d}\omega$$

où $S(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal $s(t)$.

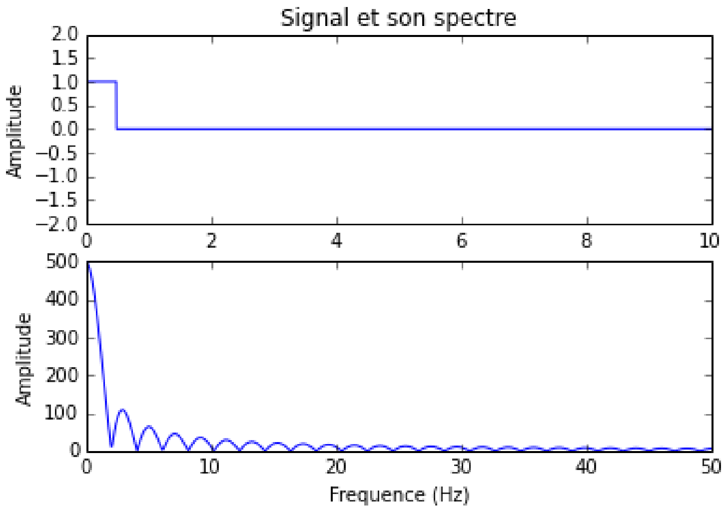


FIGURE 2.2 – Spectre d'une impulsion.

Ainsi, la décomposition d'une excitation en sinusoïdes permet toujours de revenir à la réponse totale du système, en sommant tout simplement les réponses pour chacune des fréquences concernées.

2.2 Régime sinusoïdal forcé

2.2.1 Définition et objectif

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des systèmes mécaniques dont l'excitation extérieure était constante (par exemple, le poids). Or, il existe des systèmes mécaniques étant soumis à une excitation périodique : vibration des cordes vocales à une pulsation Ω donnée, mouvement d'une éolienne...

Cette excitation extérieure périodique $e(t)$ peut être décomposée, par le théorème de Fourier, en une multitude de signaux sinusoïdaux $e_1(t) = E_1\cos(\Omega t + \phi_1)$, $e_2(t) = E_2\cos(2\Omega t + \phi_2)$, et ainsi de suite. Lorsque l'équation régissant le mouvement d'un système est linéaire [1], on peut alors s'intéresser à chacune des harmoniques $e_n(t)$, déterminer la solution $z_n(t)$ associée, puis retrouver la solution totale $z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t)$.

Le **régime sinusoïdal forcé** correspond alors au cas où l'excitation mécanique extérieure impose une périodicité sinusoïdale au système : $E(t) = E_0\cos(\omega t)$.

Tout comme les études précédentes, l'évolution des grandeurs mécaniques se fait en deux étapes : un régime transitoire, qui disparaît au bout d'un temps caractéristique Δt, et un régime permanent. Dans cette partie, nous allons négliger toute étude du régime transitoire, et uniquement nous intéresser à la solution particulière que constitue le régime permanent.

1. C'est-à-dire ne faisant intervenir que des grandeurs du type z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, et pas de $\sqrt{z}$ ou $\exp(\dot{z}$ par exemple.

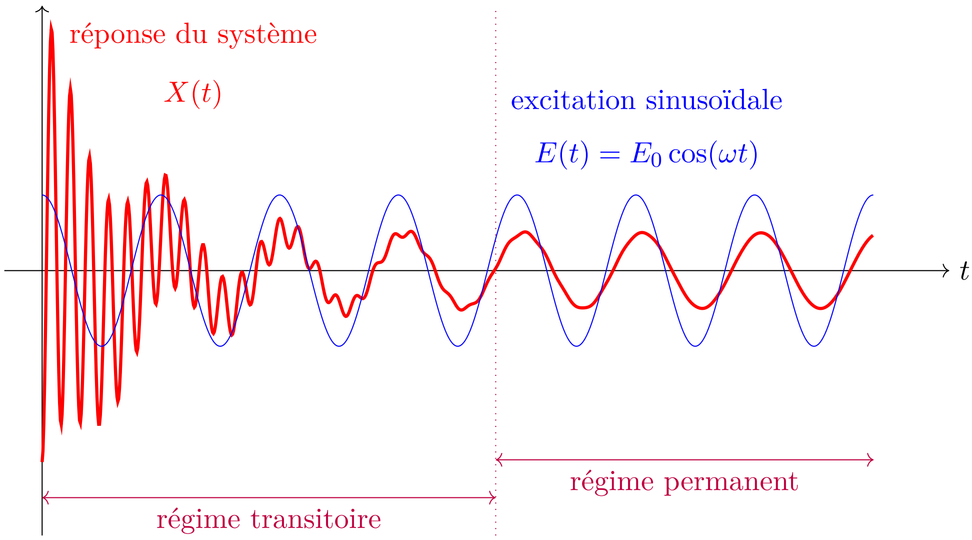


FIGURE 2.3 – Régime transitoire et régime permanent en régime sinusoïdal forcé. On observe que la réponse du système possède la même fréquence que l'excitation extérieure, en régime permanent, mais pas forcément la même amplitude, et elle peut également avoir un retard.

2.2.2 Notation complexe

En régime sinusoïdal forcé permanent, toutes les grandeurs sont de la forme $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$, où ω est la pulsation imposée par le générateur.

Représentation complexe d'un signal

On associe à un signal réel $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$ excité à la pulsation ω une grandeur complexe $\underline{g}(t)$, définie par :

$$\underline{g}(t) = g_0 \; e^{j(\omega t + \varphi)}$$

On peut passer de l'écriture complexe à l'écriture réelle par la formule $g(t) = \mathrm{Re}(\underline{g}(t))$. Pour simplifier davantage l'écriture, on utilise la propriété $e^{a+b} = e^a e^b$ qui nous permet d'écrire $\underline{g}(t) = \underline{g_0} e^{j\omega t}$ avec $\underline{g_0} = g_0 e^{j\varphi}$.

Question 2 : Exprimer g_0 et φ en fonction de $\underline{g_0}$ et d'opérateurs agissant sur les nombres complexes.

Module et argument d'un signal complexe

Si l'on associe à un signal réel $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ un signal complexe $\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{X_0} e^{j\omega t}$, alors :

$$X_0 = |\underline{X_0}| \qquad ; \qquad \varphi = \arg\left(\underline{X_0}\right)$$

Question 3 : Donner une expression de $\frac{\mathrm{d}\underline{g}}{\mathrm{d}t}(t)$ en fonction de ω et $\underline{g}(t)$. De même, donner une expression de $\int \underline{g}(t)dt$ en fonction de ω et $\underline{g}(t)$.

Opérations sur les grandeurs complexes

- Dériver n fois un signal $\underline{g}(t)$ correspond à le multiplier par $(j\omega)^n$. En particulier :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{g}}{\mathrm{d}t}(t) \leftrightarrow j\omega \times \underline{g}(t) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2\underline{g}}{\mathrm{d}t^2}(t) \leftrightarrow (j\omega)^2 \times \underline{g}(t) = -\omega^2 \underline{g}(t)$$

- Intégrer n fois un signal $\underline{g}(t)$ correspond à le diviser par $(j\omega)^n$. En particulier :

$$\int \underline{g}(t)\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{\underline{g}(t)}{j\omega}$$

2.3 Application à un système masse-ressort horizontal

2.3.1 Position du problème

On s'intéresse à un système masse-ressort composé d'une masse m, modélisée par un point matériel M, liée à un point O fixe par un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k. On note $x(t)$ la position du point M au cours du temps.

Des frottements fluides de coefficient λ s'opposent au mouvement du point M, qui est excité par une force extérieure $\vec{F}(t) = F_0 \cos(\omega t)\vec{e_x}$.

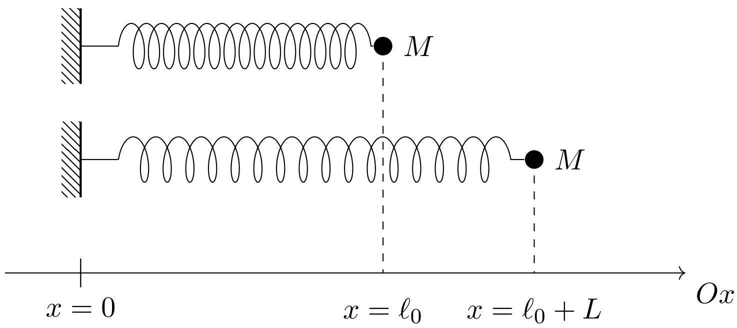


Figure 2.4 – Ressort au repos (haut) et tendu (bas).

2.3.2 Équation du mouvement

Question 4 : Faire un bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au point M.

Question 5 : Appliquer le PFD au point M dans le référentiel du laboratoire pour déterminer une équation différentielle à mettre sous la forme : $\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+\omega_0^2(x-\ell_0)=\omega_0^2 E_0\cos(\omega t)$. Donner les expressions de ω_0, Q et E_0.

On pose $X(t)=x(t)-\ell_0$. On a alors $\dot{X}=\dot{x}$ et $\ddot{X}=\ddot{x}$, ce qui nous donne l'équation différentielle :

$$\ddot{X}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{X}+\omega_0^2 X=\omega_0^2 E_0\cos(\omega t)$$

Puisque l'excitation (terme de droite de l'équation différentielle) est sinusoïdale, on aura une réponse sinusoïdale pour $X(t)$ en régime permanent. En particulier, $X(t)$ oscillera à la même fréquence $f=\frac{\omega}{2\pi}$ que l'excitation. On écrit alors $X(t)=X_0\cos(\omega t+\varphi)$ avec X_0 et φ deux inconnues à déterminer.

Question 6 : En passant à la notation complexe, montrer que l'on a $\left(-\omega^2+j\frac{\omega\omega_0}{Q}+\omega_0^2\right)\underline{X_0}e^{j\omega t}=\omega_0^2 E_0 e^{j\omega t}$.

Écriture complexe d'une équation différentielle

Soit une équation différentielle du type :

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$$

En utilisant la notation complexe, on se rapporte alors à l'équation :

$$\left(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)\underline{X_0} = \omega_0^2 E_0$$

2.3.3 Solutions de l'équation

Question 7 : Déduire de la dernière équation une expression de $\underline{X_0}$. Que vaut alors X_0 ?

Question 8 : Donner les expressions possibles de φ selon la valeur de ω.

Question 9 : En déduire l'expression de la vitesse. Quelle remarque peut-on faire par rapport au déphasage ?

☛ *Remarque :* Nous avons seulement déterminé ici l'expression de la position et de la vitesse en régime permanent. Le régime transitoire s'établit avec facilité : il s'agissait des solutions non constantes abordées dans le premier thème (mathématiquement : les solutions de l'équation homogène).

Comme précisé précédemment, lorsqu'on étudie le régime sinusoïdal forcé, on ne s'intéresse généralement pas au régime transitoire permettant d'y accéder.

RÉPONSE À LA PROBLÉMATIQUE

Puisque le véhicule se déplace à vitesse horizontale constante, on a $x = V \times t$, et donc $y(t) =$. La force du ressort est alors $\vec{F} = -k(z(t) - y(t)).\overrightarrow{u_z}$, ce qui donne l'équation du mouvement :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 Z\cos(\omega t)$$

avec $\omega_0 =$, $Q =$, $Z =$ et $\omega =$.

En régime permanent, on peut alors écrire $z(t) = z_0\cos(\omega t + \varphi)$; soit, en notation complexe : $\underline{z}(t) = \underline{z_0}e^{j\omega t}$ avec $\underline{z_0} =$.

On en déduit alors, à l'aide de l'équation du mouvement, que :

$$\underline{z_0} =$$

et donc que :

$$z_0 = \qquad \text{et} \quad \varphi =$$

Complément : pourquoi la notation complexe fonctionne-t-elle ?

Comment justifier rigoureusement le fait qu'une équation du type :

$$\frac{\mathrm{d}^2X(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 X(t) = \omega_0^2 E\cos(\omega t)$$

puisse se « transformer » en :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{X}(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\underline{X}(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \underline{X} = \omega_0^2 E e^{j\omega t}$$

avec $X(t) = X_0\cos(\omega t + \varphi)$ et $\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$? En d'autres termes, comment justifier que l'équation différentielle complexe est tout aussi valable que l'équation différentielle réelle ?

Notons $\underline{X}^*(t) = X_0 e^{-j(\omega t+\varphi)}$ le complexe conjugué de $\underline{X}(t)$. On a donc $X(t) = \dfrac{\underline{X}(t)+\underline{X}^*(t)}{2}$ et $E\cos(\omega t) = E\dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$. Ainsi, l'équation différentielle de départ peut se réécrire, en multipliant par 2 :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{X}(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\underline{X}^*(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\left[\frac{\mathrm{d}\underline{X}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\underline{X}^*(t)}{\mathrm{d}t}\right] + \omega_0^2\left[\underline{X}(t)+\underline{X}^*(t)\right] = \omega_0^2 E\left[e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right]$$

Or $\underline{X}(t) = X_0 e^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{X_0}e^{j\omega t}$ et $\underline{X}^*(t) = X_0 e^{-j\varphi}e^{-j\omega t} = \underline{X_0}^* e^{-j\omega t}$. Une propriété mathématique[2] permet alors de dire que si l'on a $a_1 e^{j\omega t} + a_2 e^{-j\omega t} = b_1 e^{j\omega t} + b_2 e^{-j\omega t}$, alors $a_1 = b_1$ et $a_2 = b_2$. Nécessairement, on en déduit les deux équations suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{X}(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\underline{X}(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\underline{X} = \omega_0^2 E e^{j\omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{X}^*(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\underline{X}^*(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\underline{X}^* = \omega_0^2 E e^{-j\omega t}$$

Ces deux équations reflètent en réalité la même chose : si l'on applique la transformation « complexe conjugué » à la deuxième équation, on retombe en fait sur la première. Ainsi, l'équation différentielle réelle implique nécessairement l'équation différentielle complexe, sur laquelle on peut établir les raisonnements.

Outils mathématiques

$$\left|\frac{\underline{a}\times\underline{b}}{\underline{c}}\right| = \frac{|\underline{a}|\times|\underline{b}|}{|\underline{c}|}$$

$$\arg\left(\frac{\underline{a}\times\underline{b}}{\underline{c}}\right) = \arg\underline{a} + \arg\underline{b} - \arg\underline{c}$$

$$\arg(x+iy) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } x>0$$

$$\arg(x+iy) = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \text{ si } x<0$$

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit le signal réel $u(t) = U\cos(\omega t+\varphi)$. Donner l'expression du signal complexe $\underline{u}(t)$; expliciter notamment son amplitude complexe $\underline{U}$.
- ☐ Démontrer que dériver un signal réel correspond à multiplier le signal complexe correspondant par $j\omega$.
- ☐ Déterminer la solution de $5\dot{u} + \dfrac{1}{\tau}u = 3\cos(\omega t)$ en régime permanent.

2. Il s'agit, rigoureusement, du fait que $t\mapsto e^{j\omega t}$ et $t\mapsto e^{-j\omega t}$ forme une famille libre : vous verrez cette propriété plus tard dans l'année en mathématiques.

Chapitre 3 : Résonance d'un système mécanique

Objectifs :

— Établir la possibilité de l'existence d'une résonance en amplitude.

— Simplifier et interpréter les solutions dans les cas limites basses fréquences et hautes fréquences ; tracer des diagrammes asymptotiques fréquentiels.

— Exploiter un spectre, analyser la réponse du système.

Au concours ATS : Aux écrits en 2023, 2021, 2020, 2019, 2017. Tombe régulièrement aux oraux.

PROBLÉMATIQUE

Une voiture se déplace à vitesse horizontale constante V sur une route bosselée d'équation $y(x) = Y_0 \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$, avec L l'espacement horizontal entre deux bosses successives et Y_0 l'amplitude de ces bosses.

Quelle est la valeur de vitesse V pour laquelle les oscillations de la voiture seront les plus importantes ?

Résonance

La **résonance** est une situation très générale dans laquelle l'excitation périodique d'un système à une fréquence ω_r provoque une réponse de très forte amplitude.

3.1 Résonance en position

Soit un système masse-ressort amorti et forcé, dont l'équation du mouvement est $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \times E_0 \cos(\omega t)$.

On rappelle que, si l'on utilise la notation complexe, on a alors $\left(-\omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2\right)\underline{X_0} = \omega_0^2 E_0$ avec $\underline{X_0}$ l'amplitude complexe de $x(t)$.

Question 1 : Exprimer l'amplitude réelle $|\underline{X_0}|$; montrer que l'on peut l'écrire sous la forme : $|\underline{X_0}| = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{u(\omega)}}$ où $u(\omega)$ est une fonction à déterminer.

Question 2 : Si l'amplitude est maximale, que peut-on dire de $u(\omega)$? De sa dérivée par rapport à ω ?

Question 3 : Exprimer explicitement $u(\omega)$ en tant que somme de monômes. En déduire l'expression de sa dérivée, et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\omega} = 4\omega\left(\omega^2 + a\right)$ où a est une constante dont l'expression est à déterminer.

Question 4 : Si $\omega = 0$, que vaut $u(\omega)$? Et donc $|\underline{X_0}|$?

Question 5 : Montrer que le signe de a ne dépend que de la valeur de Q. Quelle condition sur Q doit-on poser pour que $\omega^2 + a$ possède des solutions ?

Résonance en position

Pour un système amorti du deuxième ordre, on a **résonance en position** si $Q > 1/\sqrt{2}$.

Question 6 : Quelle est alors la pulsation de résonance ω_r du système, si $Q > 1/\sqrt{2}$?

Question 7 : En déduire l'expression de $u(\omega_r)$, puis celle de $|\underline{X_0}|$ si $\omega = \omega_r$.

Question 8 : On admet que, pour toute valeur positive de Q, on a toujours $\dfrac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}} \geq 1$ (le cas d'égalité n'arrive que si $Q = 1/\sqrt{2}$). En déduire si $|\underline{X_0}|(\omega = \omega_r)$ est plus grand ou plus petit que $|\underline{X_0}|(\omega = 0)$.

Question 9 : Si $Q \to \infty$, vers quelle valeur tend ω_r ? Et vers quelle valeur tend $|\underline{X_0}|(\omega = \omega_r)$?

3.2 Résonance en vitesse

Question 10 : On note $\underline{V_0}$ l'amplitude complexe de la vitesse. Exprimer $\underline{V_0}$ en fonction de $\underline{X_0}$ et ω. Montrer alors que l'on peut écrire $\underline{V_0} = \dfrac{\omega_0 E_0}{\dfrac{1}{Q} + j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$.

Question 11 : Exprimer alors V_0, amplitude réelle de la vitesse. Pour quelle valeur de ω l'amplitude de la vitesse est-elle maximale ?

Question 12 : Que vaut alors l'amplitude en question V_{max} ? Q doit-il être supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ pour que la résonance en vitesse soit observée ?

Résonance en vitesse

Pour un système amorti du deuxième ordre, on a **résonance en vitesse** à la pulsation $\omega_r = \omega_0$. On observe cette résonance pour $Q > 1$.

Réponse à la problématique

Puisque l'on roule à vitesse constante, on peut exprimer x en fonction de V et t : $x =$.
En notant $z(t)$ l'altitude du centre de masse du véhicule par rapport à sa position d'équilibre, on trouve alors l'équation du mouvement :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 Z \cos(\omega t)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$, $Z = Y_0$ et $\omega = \frac{2\pi V}{L}$.

Il y a résonance si Q , et elle a alors lieu lorsque ω vaut $\omega_0 \times \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

On en déduit que $V =$.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Qu'appelle-t-on résonance en position pour un système mécanique ? Qu'appelle-t-on résonance en vitesse pour un système mécanique ?
- ☐ Soit un système mécanique dont l'équation du mouvement est $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \times E_0 \cos(\omega_0 t)$. Déterminer la pulsation de résonance ω_r en position du système.
- ☐ Soit un système mécanique dont l'équation du mouvement est $\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 \times E_0 \cos(\omega_0 t)$. Déterminer la pulsation de résonance ω_r en vitesse du système.

Chapitre 4 : De la dynamique à l'énergétique

Objectifs :

— Définir le travail et la puissance d'une force.

— Calculer le travail d'une interaction conservative.

— Calculer la puissance d'une force dissipative.

— Établir que le théorème de la puissance mécanique découle du principe fondamental de la dynamique.

Au concours ATS : Aux écrits en 2023, 2022, 2019. Tombe régulièrement aux oraux.

Problématique

Une voiture de masse $m = 1500\,\mathrm{kg}$ se déplace à vitesse $V = 70\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ sur une route faisant un angle $\beta = 5°$ par rapport à l'horizontale.

En apercevant un lapin à une distance $d = 150\,\mathrm{m}$, le conducteur freine instantanément ; la force constante F des freins vaut $5000\,\mathrm{N}$.

Le lapin est-il sauvé ?

4.1 Puissance d'une force

Prenons l'exemple d'une voiture roulant sur une pente d'angle β par rapport à l'horizontale (voir figure 4.1). Cette force est soumise à quatre actions mécaniques : son poids $\overrightarrow{P}$, la réaction du support $\overrightarrow{R}$, des frottements fluides $\overrightarrow{f}$ et une force de traction provenant du moteur $\overrightarrow{F_t}$.

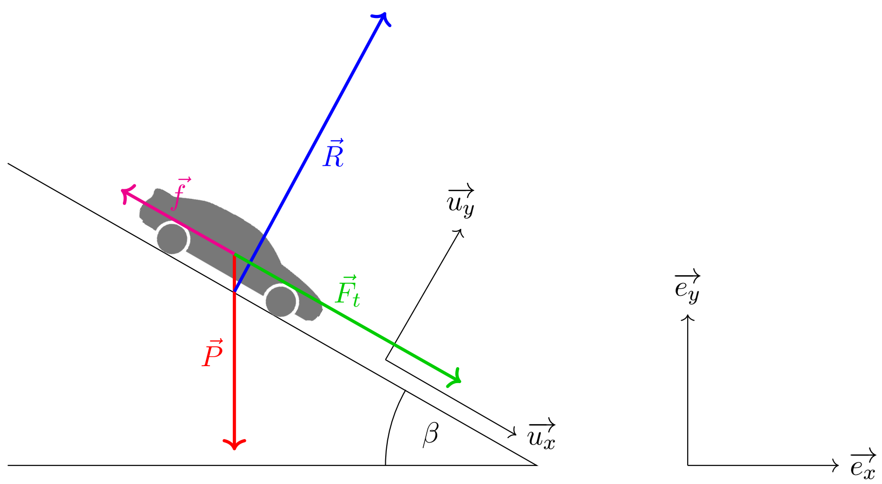


Figure 4.1 – Descente d'un voiture selon une pente.

On souhaite évaluer à quel point chaque action mécanique contribue à faire avancer la voiture dans la direction $\overrightarrow{u_x}$.

Question 1 : Répondre qualitativement à cette problématique. On pourra « changer de base » en dirigeant le vecteur $\overrightarrow{u_y}$ selon la verticale ascendante.

Puissance d'une force

Soit M un point matériel en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et soumis à une force $\vec{F}$. La **puissance** de $\vec{F}$ dans $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

Ainsi, si l'on note α l'angle entre la vitesse et la force, on a $\mathcal{P}(\vec{F}) = Fv\cos(\alpha)$.
Dans le système international, la puissance s'exprime en watt W.

Puissance motrice, puissance résistante

- Si la puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ est positive, on dit que la force est **motrice** ;
- Si la puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ est négative, on dit que la force est **résistante**.

Question 2 : Déterminer quelles forces sont motrices et quelles forces sont résistantes. Que dire de la réaction du support ? Est-ce en accord avec les prévisions qualitatives ?

4.2 Travail d'une force

Intéressons-nous à un point matériel M se déplaçant dans l'espace. On note O l'origine du repère d'étude.

Question 3 : Montrer que la puissance d'une force est bien homogène au rapport d'une énergie par une durée.

Travail élémentaire d'une force

On appelle **travail élémentaire** $\delta W(\vec{F})$ **d'une force** $\overrightarrow{F}$ l'énergie apportée par cette force au cours d'une durée infinitésimale dt :

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(\vec{F}) \times \mathrm{d}t$$

☛ *Remarque :* Le δ présent devant W signifie qu'il s'agit d'une grandeur infinitésimale. On n'utilise pas la lettre d, qui désigne une variation : le travail existe, ou n'existe pas ; on ne peut pas gagner du travail ou en perdre.

Question 4 : En utilisant la définition de la puissance, puis celle de la vitesse, montrer que $\delta W(\vec{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \left(\overrightarrow{OM}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t)\right)$.

Déplacement élémentaire d'un point

On définit le **déplacement élémentaire** $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ d'un point M comme :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t)$$

Il s'agit du vecteur-déplacement du point M pendant la durée infinitésimale dt.

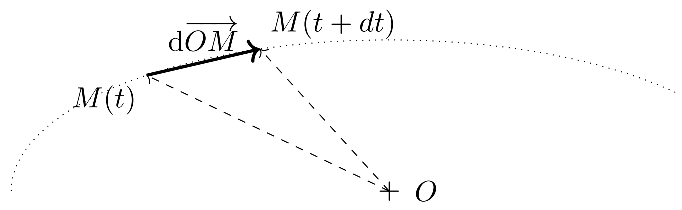


FIGURE 4.2 – Vecteur-déplacement élémentaire du point M. La trajectoire est représentée en pointillés.

Question 5 : Déterminer l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes.

Autre définition du travail élémentaire d'une force

On définit le travail élémentaire $\delta W(\vec{F})$ d'une force $\vec{F}$ s'appliquant sur un point M comme :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ du point M s'écrit, en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y.\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z.\overrightarrow{e_z}$$

Travail d'une force le long d'une trajectoire

Si une force $\vec{F}$, potentiellement dépendante du temps ou de la position du point M, s'applique sur ce dernier le long d'une trajectoire allant de A à B, alors on définit le **travail de la force le long de cette trajectoire** comme :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Ce travail correspond à l'énergie fournie par la force au point M du début (A) jusqu'à la fin (B) du mouvement.
Si $W_{A\to B}(\vec{F}) > 0$, on parle de **travail moteur** ; si $W_{A\to B}(\vec{F}) < 0$, on parle de **travail résistant**.

☛ *Remarque :* On pourrait également dire, au vu des définitions précédentes, que $W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t$ (et cette définition est tout à fait valide, aussi bien mathématiquement que physiquement). Cependant, le calcul explicite du travail par cette méthode est impossible sans résoudre l'équation du mouvement ; en effet : $\vec{v}(t)$ est a priori inconnu, et donc $\mathcal{P}(\vec{F})$ également... En revanche, $\vec{F}$ est généralement bien connue.

Question 6 : Comment se simplifie l'expression du travail si $\vec{F}$ est constamment orthogonale au déplacement ?

Question 7 : Montrer que, si le vecteur $\vec{F}$ est constant alors $W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

4.3 Mouvements conservatifs et énergie potentielle

Force conservative

On dit qu'une force $\vec{F}$ est *conservative* si son travail $W_{A\to B}(\vec{F})$ sur un point M ne dépend pas de la trajectoire suivie par ce point mais uniquement des points d'arrivée et de départ.

Question 8 : Montrer que le poids $\vec{P} = -mg.\overrightarrow{e_z}$ est conservatif.

Question 9 : Expliquer pourquoi la force de frottements fluides n'est pas conservative.

Énergie potentielle

Toute force conservative $\vec{F_c}$ dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Mathématiquement, cela signifie que l'on peut toujours écrire $\delta W(\vec{F_c}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$, où $\mathcal{E}_p$ est une fonction ne dépendant que de la position.

Question 10 : Exprimer le travail élémentaire du poids. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

4.4 Démonstration du théorème de la puissance mécanique

Prenons un point matériel M de masse m. Celui-ci est soumis à des forces extérieures, conservatives ou non. On peut donc écrire que $\sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{c}}} + \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{nc}}}$.

Si l'on se place dans un référentiel galiléen, le PFD donne alors que $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(M)}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{c}}} + \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{nc}}}$, ou encore :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)}{\mathrm{d}t} - \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{c}}} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}^{\text{nc}}}$$

Question 11 : Effectuer le produit scalaire de cette équation avec la vitesse $\vec{v}(M)$. Que reconnaît-on dans le membre de droite de l'équation ?

Question 12 : En observant que $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\vec{u}^2}{2}\right)$, que devient le premier terme du membre de gauche de l'équation ?

Question 13 : En utilisant la définition de la vitesse $\vec{v}(M)$, montrer que le second terme du membre de gauche peut s'écrire $-\sum \frac{\delta W(\vec{F}^{\text{c}}_{\text{ext}})}{\text{d}t}$. Y reconnaître la dérivée temporelle de l'énergie potentielle.

Question 14 : Enfin, montrer que l'on retrouve le théorème de la puissance mécanique.

Compléments sur les théorèmes énergétiques

Théorème de la puissance cinétique

Revenons sur la démonstration du théorème de la puissance mécanique : on a, d'après le PFD, $m\frac{\text{d}\vec{v}}{\text{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$. En faisant le produit scalaire de cette équation par la vitesse $\vec{v}$, on trouve alors :

$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}} \cdot \vec{v}$$

On en déduit le **théorème de la puissance cinétique** :

$$\frac{\text{d}\mathcal{E}_c}{\text{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}}$$

où $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ représente la puissance de toutes les forces extérieures, qu'elles soient conservatives ou non.

L'intérêt de ce théorème réside dans le cas où des forces « non classiques » (c'est-à-dire, dans notre cas, différentes du poids ou de la force élastique d'un ressort) sont présentes dans un énoncé : on n'a pas à se demander si lesdites forces sont conservatives ou non !

Théorème de l'énergie mécanique

Reprenons le TPM : $\frac{\text{d}\mathcal{E}_m}{\text{d}t} = \mathcal{P}^{\text{n.c.}}_{\text{ext}}$. On décide d'intégrer cette équation par rapport au temps, entre un instant initial t_i et un instant final t_f :

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{\text{d}\mathcal{E}_m}{\text{d}t}\text{d}t = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{P}^{\text{n.c.}}_{\text{ext}}\text{d}t$$

Le terme de gauche correspond à $\mathcal{E}_m(t_f) - \mathcal{E}_m(t_i)$, c'est-à-dire à la variation $\Delta\mathcal{E}_m$ de l'énergie mécanique entre l'instant initial et l'instant final.

Par ailleurs, on a démontré précédemment que $\mathcal{P}(\vec{F})\mathrm{d}t = \delta W(\vec{F})$ où $\vec{F}$ est une force quelconque et δW est le travail élémentaire de cette force. On a donc $\int_{t_i}^{t_f} \mathcal{P}_{\text{ext}}^{\text{n.c.}} \mathrm{d}t = W_{i\to f}^{\text{ext, n.c.}}$, le travail total des forces extérieures non conservatives entre l'instant initial et l'instant final.

On en déduit le **théorème de l'énergie mécanique** :

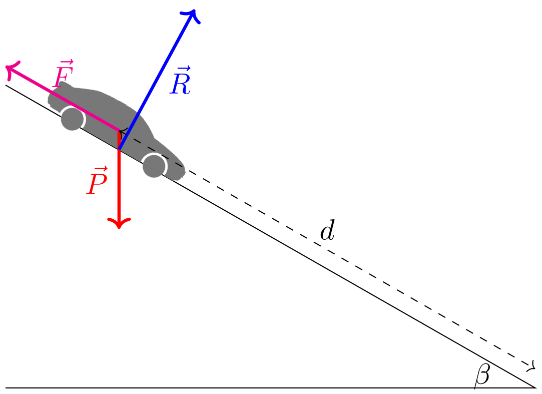
$$\Delta\mathcal{E}_m = W_{\text{ext}}^{\text{n.c.}}$$

On remarque que, dans le cas d'un mouvement conservatif, on a alors conservation de l'énergie mécanique : $\Delta\mathcal{E}_m = 0$.

Le théorème de l'énergie mécanique est très utile dans le cas où les forces extérieures non conservatives sont constantes : leur travail est alors simplement $W = \vec{F}\cdot\overrightarrow{M_iM_f}$ (avec M_i la position initiale et M_f la position finale), et on peut en déduire une grandeur recherchée (vitesse finale ou position finale) aisément.

Réponse à la problématique

Notons L la distance nécessaire pour que le véhicule s'arrête.



La variation d'énergie cinétique est $\Delta\mathcal{E}_c =$.

Par ailleurs, il existe une relation entre L, β et la dénivellation h entre l'instant initial et l'instant final : $h =$. On en déduit la variation d'énergie potentielle : $\Delta\mathcal{E}_p =$.

Enfin, le travail de la réaction du sol vaut $W(\vec{R}) =$ car $\vec{R}$ est au sol.

Par ailleurs, le travail de la force $\vec{F}$ peut s'écrire $W(\vec{F}) =$.

Il vient donc que $-\frac{1}{2}mV^2 - mgL\tan(\beta) = -FL$ par le théorème de l'énergie mécanique. On en déduit l'expression de L :

$$L =$$

L'application numérique donne $L =$ m, ce qui est à la distance d.

On en déduit que le lapin est .

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Définir le travail et la puissance d'une force ; donner leurs interprétations physiques, et le lien entre ces deux grandeurs.
- ☐ Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ; établir l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort.
- ☐ Établir que le théorème de la puissance mécanique se déduit du principe fondamental de la dynamique.