1 Dynamique du point matériel

■ À revoir ■ Maîtrisé

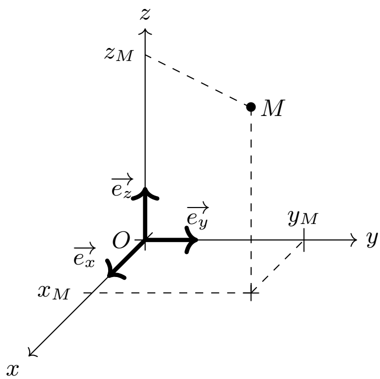
1 Vecteurs position, vitesse et accélération

Les trois coordonnées cartésiennes d'un point M dans un repère orthonormé (O, x, y, z) choisi sont rigoureusement notées x_M, y_M et z_M.

On définit le **vecteur-position** par :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x_M.\overrightarrow{e_x} + y_M.\overrightarrow{e_y} + z_M.\overrightarrow{e_z}}$$

L'ensemble des positions successives du point M définit sa **trajectoire**.



On définit le **vecteur-vitesse** $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ d'un point M dans un repère $\mathcal{R}$ par :

$$\boxed{\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}_M.\overrightarrow{e_x} + \dot{y}_M.\overrightarrow{e_y} + \dot{z}_M.\overrightarrow{e_z}}$$

- Le vecteur-vitesse est tangent, en tout point, à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement.
- Si la norme $||\vec{v}(M/\mathcal{R})||$ est constante, le mouvement du point est uniforme.
- Si le vecteur $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ a une direction constante, le mouvement du point est rectiligne.

On définit le **vecteur-accélération** $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ d'un point M dans un repère $\mathcal{R}$ par :

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}_M.\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}_M.\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}_M.\overrightarrow{e_z}}$$

2 Actions, interactions et forces

On appelle **action mécanique** toute action, exercée par un système extérieur et pouvant modifier, provoquer ou empêcher le mouvement d'un objet.

Une action mécanique exercée sur un point matériel est modélisée par un **vecteur-force** : sa norme correspond à l'intensité de la force, sa direction et son sens traduisent ceux de l'action. L'unité du Système International pour la force est le newton N.

Si deux points A et B sont en interaction, alors la force exercée par A sur B s'oppose à celle exercée par B sur A : c'est le **principe des interactions**. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\overrightarrow{F}_{B\to A}}$$

Poids

Au voisinage de la Terre, un corps subit une force appelée **poids** (noté $\overrightarrow{P}$), qui est proportionnelle à sa masse :

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m.\overrightarrow{g}}$$

où $\overrightarrow{g}$ est le champ de pesanteur, vertical et orienté vers le bas.

On considère généralement $\overrightarrow{g}$ uniforme, de norme $g = 9{,}81\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

♥ Son origine principale est l'attraction gravitationnelle de la Terre.

Force de rappel d'un ressort

Un ressort linéaire est caractérisé par sa longueur au repos ℓ_0 et sa constante de raideur k. Dans le modèle idéal, il est de masse négligeable et toute variation de sa longueur l produit sur chacune de ses extrémités la **force élastique** :

$$\boxed{\overrightarrow{F_r} = -k(\ell - \ell_0).\overrightarrow{e}_{r\to p}}$$

où $\overrightarrow{e}_{r\to p}$ est le vecteur unitaire de la direction du ressort, <u>orienté du ressort vers le point étudié</u>.

Force de frottements fluides

Quand un solide S est en mouvement dans un fluide, celui-ci exerce une **force de frottements** de sens opposé au vecteur-vitesse de S. Pour une vitesse suffisamment faible, la norme est proportionnelle à celle de la vitesse :

$$\boxed{\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}(S)}$$

Réaction du support

<u>En l'absence de frottements entre un solide S et son support</u>, la **réaction du support** $\overrightarrow{R}$ est une force orthogonale au support et orientée du support vers le solide :

$$\boxed{\overrightarrow{R} = R.\overrightarrow{n}_{\text{support}\to S}}$$

Sa norme R est *a priori* inconnue.

3 Principe fondamental de la dynamique

Pour un point matériel M de masse constante m se déplaçant à l'accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soumis à des forces extérieures de somme $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$, le **principe fondamental de la dynamique** (PFD) stipule que :

$$\boxed{m.\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}}$$

Lorsque l'on veut étudier le couplage entre forces et mouvement d'un corps, on part quasi-systématiquement du PFD. Cependant, cela doit se faire en un certain nombre d'étapes :

1. Définition du système étudié ;
2. Choix du référentiel galiléen ;
3. Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) appliquées au système dans le référentiel ;
4. Application mathématique du PFD.
5. Projection, si nécessaire, du PFD, pour déterminer des équations scalaires et non plus vectorielles.

♥ S'il existe n points matériels dans le problème, alors il faudra appliquer n PFD (un à chacun des points), en faisant attention à faire un BAME différent et rigoureux à chaque fois.

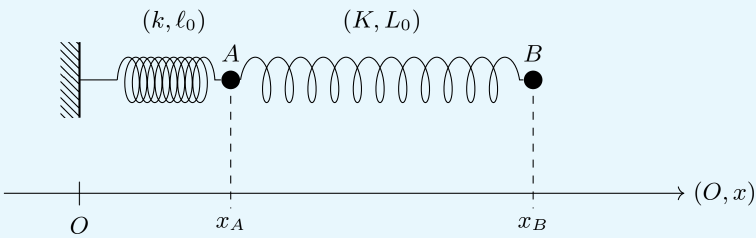
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Systèmes masse-ressort couplés

Énoncé

On considère le dispositif représenté sur le schéma ci-dessous. Le point A a une masse m_A et une abscisse x_A ; le point B a une masse m_B et une abscisse x_B.



On néglige la pesanteur et la réaction du support, et on admet qu'une force de frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}(B)$ s'applique uniquement sur le point B. Déterminer deux équations différentielles couplées portant sur x_A et x_B.

Résolution

Nous avons ici deux points matériels A et B : il faudra donc appliquer le PFD à chacun de ces points.

Anticipons les calculs et déterminons les longueurs de chacun des ressorts. Celui de gauche a une longueur $\ell_g = x_A$, et celui de droite une longueur $\ell_d = x_B - x_A$.

- Choisissons comme système le point A, que l'on étudie dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen le temps de l'expérience.

  BAME appliquées à A :

  — Force du ressort de gauche : $\overrightarrow{F}_{g\to A} = -k(\ell_g - \ell_0).\overrightarrow{e}_{O\to A} = -k(x_A - \ell_0).\overrightarrow{e_x}$;

  — Force du ressort de droite : $\overrightarrow{F}_{d\to A} = -K(\ell_d - L_0).\underbrace{\overrightarrow{e}_{B\to A}}_{-\overrightarrow{e_x}} = +K(x_B - x_A - L_0).\overrightarrow{e_x}$

  Le PFD appliqué à A donne donc : $m_A.\overrightarrow{a}(A) = \overrightarrow{F}_{g\to A} + \overrightarrow{F}_{d\to A}$, c'est-à-dire :

  $$m_A\ddot{x}_A.\overrightarrow{e_x} = -k(x_A - \ell_0).\overrightarrow{e_x} + K(x_B - x_A - L_0).\overrightarrow{e_x}$$

  Pour déterminer une équation portant sur $\dot{x}_A$, il faut donc projeter selon $\overrightarrow{e_x}$. Après réarrangement des termes, on a alors :

  $$\boxed{m_A\ddot{x}_A + (k + K)x_A = Kx_B + k\ell_0 - KL_0}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

- On a une équation portant sur x_A et x_B. Pour résoudre ce système, il nous faut donc une deuxième équation portant sur ces deux grandeurs.

  Choisissons alors comme système le point B, que l'on étudie dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen le temps de l'expérience.

  BAME appliquées à B :

  — Force du ressort de droite : $\overrightarrow{F}_{d\to B} = -K(\ell_d - L_0).\overrightarrow{e}_{A\to B} = -K(x_B - x_A - L_0).\overrightarrow{e_x}$;

  — Force de frottements fluides : $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}(B) = -\lambda\dot{x}_B.\overrightarrow{e_x}$

  Le PFD appliqué à B donne donc : $m_B.\overrightarrow{a}(B) = \overrightarrow{F}_{d\to B} + \overrightarrow{f}$, c'est-à-dire :

  $$m_B\ddot{x}_B.\overrightarrow{e_x} = -K(x_B - x_A - L_0).\overrightarrow{e_x} - \lambda\dot{x}_B.\overrightarrow{e_x}$$

  Pour déterminer une équation portant sur $\dot{x}_B$, il faut donc projeter selon $\overrightarrow{e_x}$. Après réarrangement des termes, on a alors :

  $$\boxed{m_B\ddot{x}_B + \lambda\dot{x}_B + Kx_B = Kx_A + K\ell_0}$$

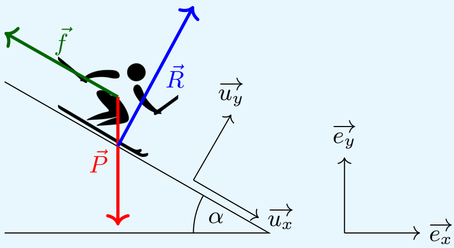
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Skieur sur une pente

Énoncé

Un skieur, assimilé à un point M de masse m, glisse le long d'une pente faisant un angle α avec l'horizontale. En plus de son poids $\overrightarrow{P}$, le skieur subit une force de frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v}$ est son vecteur-vitesse.



La base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ est celle liée à l'horizontalité et à la verticalité locale ; la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ est celle liée à la pente.

O est l'origine du repère, située en haut de la pente. Elle correspond à la position initiale du skieur, qui y possède une vitesse nulle. On note $x(t)$ la position du skieur selon la pente : $\overrightarrow{OM} = x(t).\overrightarrow{u_x}$.

1. *Déterminer l'équation différentielle portant sur $v(t)$; la résoudre.*
2. *Exprimer la norme R de la réaction du support en fonction des paramètres du problème.*

Résolution

1. Le système d'étude est le skieur, que l'on étudie dans le référentiel terrestre supposé galiléen le temps de l'expérience.

   BAME appliquées au skieur :

   — Poids $\overrightarrow{P} = m.\overrightarrow{g} = -mg.\overrightarrow{e_y}$

   — Frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v} = -\lambda\dot{x}.\overrightarrow{u_x}$

   — Réaction du support $\overrightarrow{R} = R.\overrightarrow{u_y}$

   Appliquons le PFD au skieur : $m.\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{R}$, c'est-à-dire :

$$m\ddot{x}.\overrightarrow{u_x} = -mg.\overrightarrow{e_y} - \lambda\dot{x}.\overrightarrow{u_x} + R.\overrightarrow{u_y}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Pour déterminer l'équation portant sur $v = \dot{x}$, on projette selon la direction $\overrightarrow{u_x}$, commune aux termes en $\dot{x}$ et $\ddot{x}$:

$$m\ddot{x}.\underbrace{\overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_x}}_{=1} = -mg.\underbrace{\overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{u_x}}_{=-\sin(\alpha)} - \lambda\dot{x}.\underbrace{\overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_x}}_{=1} + R.\underbrace{\overrightarrow{u_y} \cdot \overrightarrow{u_x}}_{=0}$$

Il vient donc que $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} = mg\sin(\alpha)$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{m\dot{v} + \lambda v = mg\sin(\alpha)}$$

On peut mettre cette équation sous forme canonique $\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = \frac{1}{\tau}v_{\text{éq}}$ avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$ et $v_{\text{éq}} = \frac{mg}{\lambda}\sin(\alpha)$.

On en déduit alors que $v(t) = v_{\text{éq}} + Ae^{-t/\tau}$. Puisque la vitesse initiale du skieur est nulle, il vient que $0 = v_{\text{éq}} + A$, et donc que :

$$\boxed{v(t) = v_{\text{éq}} \times \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

2. Nous avons précédemment projeté l'équation du PFD selon $\overrightarrow{u_x}$, alors que R était selon $\overrightarrow{u_y}$. Projetons donc cette équation selon $\overrightarrow{u_y}$:

$$m\ddot{x}.\underbrace{\overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_y}}_{=0} = -mg.\underbrace{\overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{u_y}}_{=\cos(\alpha)} - \lambda\dot{x}.\underbrace{\overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{u_y}}_{=0} + R.\underbrace{\overrightarrow{u_y} \cdot \overrightarrow{u_y}}_{=1}$$

Il vient donc que $0 = -mg\cos(\alpha) + R$, c'est-à-dire que :

$$\boxed{R = mg\cos(\alpha)}$$

2 Réponse fréquentielle d'un système mécanique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Notation complexe

Supposons qu'un système matériel, repéré par sa position $x(t)$, soit soumis à une excitation sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

Si l'on attend « suffisamment de temps », c'est-à-dire en régime permanent, le système matériel oscillera à la même pulsation ω que l'excitation $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Son amplitude X_0 et son déphasage φ sont cependant *a priori* inconnus.

On associe à un signal réel $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ une grandeur complexe $\underline{x}(t)$, définie par :

$$\boxed{\underline{x}(t) = X_0\ e^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{X_0} e^{j\omega t}}$$

avec $\underline{X_0} = X_0 e^{j\varphi}$ l'**amplitude complexe** du signal $x(t)$.

On a donc $\boxed{X_0 = |\underline{X_0}|}$ et $\boxed{\varphi = \arg \underline{X_0}}$.

On en déduit que :

- Dériver n fois un signal $x(t)$ correspond à le multiplier par $(j\omega)^n$ dans sa représentation complexe. En particulier :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) \leftrightarrow j\omega\underline{x}(t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) \leftrightarrow (j\omega)^2\underline{x}(t) = -\omega^2\underline{x}(t)}$$

- Intégrer n fois un signal $x(t)$ correspond à le diviser par $(j\omega)^n$ dans sa représentation complexe. En particulier :

$$\boxed{\int x(t)\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{\underline{x}(t)}{j\omega}}$$

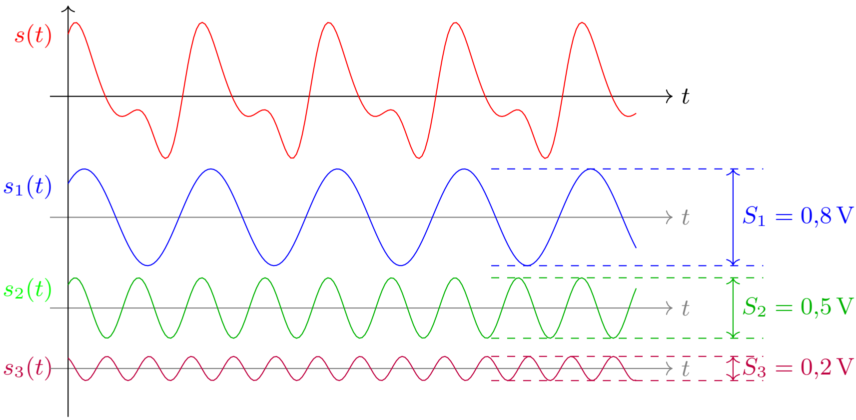
Cette représentation permet de déterminer la solution particulière (c'est-à-dire la solution en régime permanent, une fois que le régime transitoire est dépassé) d'une équation différentielle linéaire d'ordre quelconque.

♥ L'expression de la solution homogène, c'est-à-dire celle de la solution en régime transitoire, est déjà connue : c'est ce qui a été étudié dans le thème 1 !

2 Décomposition d'un signal périodique

Un signal périodique $s(t)$ de pulsation ω peut toujours se décomposer comme somme de sinusoïdes de pulsations ω, 2ω, 3ω, ... :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

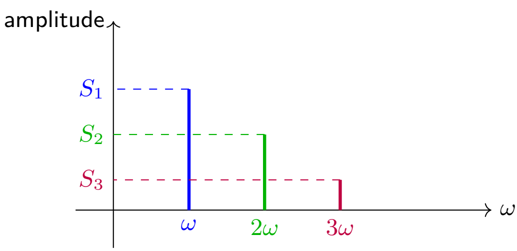


Les amplitudes S_n et déphasages φ_n dépendent de la forme du signal $s(t)$.

Le **spectre** d'un signal périodique est la représentation graphique des différentes fréquences le constituant. Un trait vertical correspond à la présence d'une fréquence donnée par l'abscisse ; la longueur de ce trait correspond à l'amplitude de cette fréquence.

La raie présente à la pulsation ω du signal correspond au **fondamental** ; les autres raies sont appelées **harmoniques** (la n-ième raie est l'harmonique de rang n).

Ainsi, le spectre du signal $s(t)$ représenté ci-dessus est :



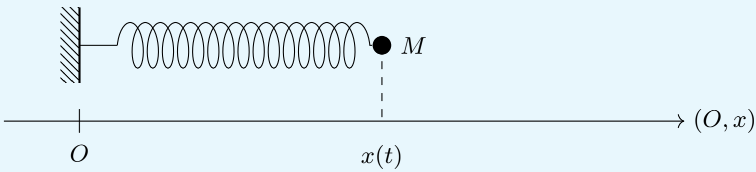
Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Système masse-ressort amorti en régime sinusoïdal forcé

Énoncé

Soit un point matériel M de masse m relié à un ressort (k, ℓ_0). On note $x(t)$ l'abscisse du point M, correspondant à l'extrémité droite du ressort.



Des frottements fluides $\overrightarrow{f} = -\lambda.\overrightarrow{v}(M)$ ralentissent le point M, qui est également excité par une force extérieure $\overrightarrow{F} = F_0 \cos(\omega t).\overrightarrow{e_x}$. La pesanteur est négligée, ainsi que toute réaction du support.

1. *On pose $z(t) = x(t) - \ell_0$. Montrer que l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$.*
2. *Déterminer l'expression de $z(t)$ en régime permanent, en supposant que $\omega < \omega_0$.*

Résolution

1. On choisit comme système le point M, étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
   BAME appliquées à M :

   — Force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F_r} = -k(x(t) - \ell_0).\overrightarrow{e_x}$
   — Frottements fluides : $\overrightarrow{f} = -\lambda\dot{x}.\overrightarrow{e_x}$
   — Force d'excitation : $\overrightarrow{F} = F_0 \cos(\omega t).\overrightarrow{e_x}$

   PFD appliqué à M : $m\ddot{x}.\overrightarrow{e_x} = -k(x(t) - \ell_0).\overrightarrow{e_x} - \lambda\dot{x}.\overrightarrow{e_x} + F_0 \cos(\omega t).\overrightarrow{e_x}$.
   On projette selon $\overrightarrow{e_x}$ et on met tous les termes en x ou $x - \ell_0$ à gauche de l'équation :

   $$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + k(x - \ell_0) = F_0 \cos(\omega t)$$

   Puisque $z(t) = x(t) - \ell_0$, alors $\dot{z} = \dot{x}$ et $\ddot{z} = \ddot{x}$ (car $\ell_0 =$ cste). On en déduit que :

   $$m\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = F_0 \cos(\omega t)$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Si l'on divise par m l'équation, on a alors :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}}$ et $\boxed{E_0 = \frac{F_0}{k}}$.

2. Posons $\underline{z}(t) = Z_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{Z_0} e^{j\omega t}$ avec $\underline{Z_0} = e^{j\varphi}$. Si l'on passe l'équation différentielle en représentation complexe, il vient donc que :

$$(j\omega)^2 \underline{z} + \frac{\omega_0}{Q} \times j\omega\underline{z} + \omega_0^2 \times \underline{z} = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t}$$

On peut factoriser le membre de gauche par $\underline{z}$, puis utiliser le fait que $\underline{z} = \underline{Z_0} e^{j\omega t}$. L'équation devient alors :

$$\left(-\omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2\right) \times \underline{Z_0} e^{j\omega t} = \omega_0^2 E_0 e^{j\omega t}$$

On simplifie alors par $e^{j\omega t}$, et on en déduit l'expression de l'amplitude complexe $\underline{Z_0}$:

$$\underline{Z_0} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}$$

Nécessairement, il vient que :

- $Z_0 = |\underline{Z_0}| = \left|\dfrac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q}}\right| = \dfrac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}}$
- $\varphi = \arg(\underline{Z_0}) = \underbrace{\arg(\omega_0^2 E_0)}_{=0} - \arg\left(\underbrace{\omega_0^2 - \omega^2}_{>0} + j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right) = -\arctan\left(\dfrac{\omega_0\omega}{Q\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\right)$

On en déduit finalement que :

$$\boxed{z(t) = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)^2}} \times \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega_0\omega}{Q\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\right)\right)}$$

3 Résonance d'un système mécanique

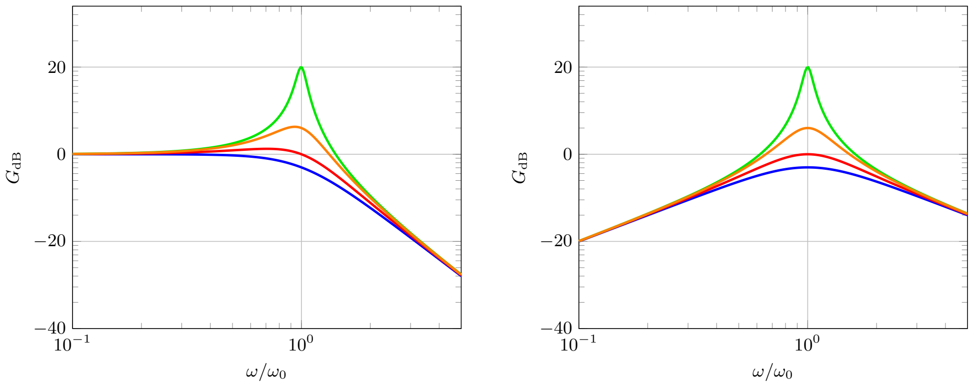
■ À revoir ■ Maîtrisé

La **résonance** est une situation très générale dans laquelle l'excitation périodique d'un système à une fréquence ω_r provoque une réponse de très forte amplitude.

Pour un système mécanique, les phénomènes de résonance ne peuvent exister que pour un oscillateur harmonique forcé ou un oscillateur amorti forcé (systèmes d'ordre 2) :

- La **résonance en position** (forte amplitude pour $x(t)$) a lieu à la pulsation $\omega_r^x = \omega_0 \times \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}$ et pour un facteur de qualité $Q > 1/\sqrt{2}$;
- La **résonance en vitesse** (forte amplitude pour $v(t)$) a lieu à la pulsation $\omega_r^v = \omega_0$ et pour un facteur de qualité $Q > 1$.

♥ Ces résultats ne sont pas à savoir par cœur, mais à savoir redémontrer (voir exercice résolu).



Phénomène de résonance en position sur un diagramme fréquentiel d'un filtre passe-bas d'ordre 2. Bleu : $Q = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$; rouge : $Q = 1$; orange : $Q = 2$; vert : $Q = 10$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Conditions pour obtenir une résonance en position

Énoncé

Soit un système dont l'équation d'évolution est $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E_0 \cos(\omega t)$. *On cherche une solution particulière sous la forme* $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Déterminer les conditions sur ω *et* Q *pour que l'on observe une résonance en position.*

Résolution

Posons $\underline{X_0} = X_0 e^{j\varphi}$. On montre, en passant aux signaux complexes, que l'on a $\underline{X_0} = \dfrac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\dfrac{\omega_0 \omega}{Q}}$. On en déduit, en passant au module, que :

$$X_0 = \frac{\omega_0^2 E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}}$$

On cherche à savoir à quelle pulsation ω il y a résonance en position, c'est-à-dire à quelle pulsation X_0 est maximal. Puisque le numérateur est indépendant de ω, on convient qu'il faut minimiser le dénominateur selon ω.

Posons $u(\omega) = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2 = \omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 + \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2$.

Si $u(\omega)$ est minimal, alors $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\omega} = 0$. Or :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\omega} &= 0 - 4\omega_0^2\omega + 4\omega^3 + 2\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega \\ &= 4\omega \times \left(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{2Q^2}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = 0$ ou $\omega^2 = \omega_0^2 - \dfrac{\omega_0^2}{2Q^2}$. La première solution correspond à une fréquence d'excitation nulle : il n'y a pas de mouvement périodique, et donc pas de résonance.

Nécessairement, on a $\omega^2 = \omega_0^2 \times \left(1 - \dfrac{1}{2Q^2}\right)$. Puisque $\omega^2 > 0$, il faut que $1 - \dfrac{1}{2Q^2} > 0$, c'est-à-dire : $\boxed{Q > 1/\sqrt{2}}$.

On a alors résonance à la pulsation : $\boxed{\omega_r = \omega_0 \times \sqrt{1 - \dfrac{1}{2Q^2}}}$.

4 De la dynamique à l'énergétique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Puissance et travail d'une force

Soit M un point matériel en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ et soumis à une force $\vec{F}$. La **puissance** de $\vec{F}$ dans $\mathcal{R}$ est définie par :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(M/\mathcal{R})}$$

Dans le système international, la puissance s'exprime en watt W.

♥ La puissance est positive si $\overrightarrow{F}$ est dans le même sens que $\overrightarrow{v}$; négative si elle est dans le sens opposé à $\overrightarrow{v}$.
♥ Par bilinéarité du produit scalaire, on a $\mathcal{P}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \mathcal{P}(\vec{F}_1) + \mathcal{P}(\vec{F}_2)$: on peut sommer les puissances de chacune des forces pour déterminer la puissance totale.

On définit le **travail élémentaire** d'une force $\vec{F}$ sur un **déplacement élémentaire** $\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y.\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z.\overrightarrow{e_z}}$ par :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Le **travail** de la force $\overrightarrow{F}$ le long d'une trajectoire allant de A à B est alors :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}$$

Il correspond physiquement à l'énergie fournie par l'action mécanique au corps mobile le long de son mouvement. Dans le système international, le travail s'exprime en joule J.

♥ Si $W_{A\to B}(\vec{F}) > 0$, on parle de travail moteur ; sinon, on parle de travail résistant.

☞ Si $\overrightarrow{F}$ est constamment orthogonale au déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, alors $W_{A\to B}(\vec{F}) = 0$.
☞ Si $\overrightarrow{F}$ est constant (en norme, en direction et en sens) au cours du déplacement, alors $W_{A\to B}(\vec{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2 Mouvements conservatifs et énergie potentielle

On dit qu'une force $\vec{F}$ est *conservative* si son travail $W_{A\to B}(\vec{F})$ sur un point M ne dépend pas de la trajectoire suivie par ce point mais uniquement des points d'arrivée et de départ.

- Le poids et la force de rappel d'un ressort sont des forces conservatives.
- Les frottements sont des forces non conservatives.

Toute force conservative $\vec{F}_c$ dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Mathématiquement, cela signifie que l'on peut toujours écrire :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}_c) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p}$$

où $\mathcal{E}_p$ est une fonction ne dépendant <u>que de la position</u>.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Énergie potentielle de pesanteur

Énoncé

Montrer que le poids est une force conservative. Déterminer alors l'expression de l'énergie potentielle lui étant associée.

Résolution

Notons (O,z) l'axe vertical ascendant : on a alors $\overrightarrow{P} = -mg.\overrightarrow{e_z}$.
On en déduit que le travail élémentaire du poids vaut :

$$\begin{aligned}\delta W(\overrightarrow{P}) &= \overrightarrow{P} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= -mg.\overrightarrow{e_z} \cdot (\mathrm{d}x.\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y.\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z.\overrightarrow{e_z}) \\ &= -mg\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Ce travail ne dépend que de la position z (et pas de la vitesse $\dot{z}$ ou du temps t) : on en déduit que le poids est une force conservative.

On peut calculer son énergie potentielle car $\mathrm{d}\mathcal{E}_p(\overrightarrow{P}) = -\delta W(\overrightarrow{P}) = mg\mathrm{d}z$.
Nécessairement :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p(\overrightarrow{P}) &= \int mg\mathrm{d}z \\ &= mgz + \text{cste}\end{aligned}$$

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Démonstration du TPM à partir du PFD

Énoncé

Démontrer le théorème de la puissance mécanique à partir du principe fondamental de la dynamique.

Résolution

Soit un point M de masse m, d'accélération $\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$, soumis à des forces extérieures conservatives $\sum\limits_i \overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}}$ et à des forces extérieures non conservatives $\sum\limits_j \overrightarrow{F_{\mathrm{nc},j}^{\mathrm{ext}}}$.

Le PFD appliqué au point M donne alors que : $m.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_i \overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}} + \sum\limits_j \overrightarrow{F_{\mathrm{nc},j}^{\mathrm{ext}}}$.

Faisons le produit scalaire de cette équation par la vitesse $\overrightarrow{v}$:

$$m.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{v} = \sum_i \overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}} \cdot \overrightarrow{v} + \sum_j \overrightarrow{F_{\mathrm{nc},j}^{\mathrm{ext}}} \cdot \overrightarrow{v}$$

- Par la formule $(u^2)' = 2uu'$, on en déduit que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}^2}{\mathrm{d}t}$, et donc que $m.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2\right) = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t}$ avec $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}mv^2$ l'énergie cinétique du système ;
- Puisque $\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$, il vient que $\overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}} \cdot \overrightarrow{v} = \dfrac{\overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\delta W(\overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}})}{\mathrm{d}t}$. Or, $\overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}}$ étant une force conservative, on sait que $\delta W(\overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,i}$, où $\mathcal{E}_{p,i}$ est l'énergie potentielle associée à la force $\overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}}$.
  Nécessairement, $\overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}} \cdot \overrightarrow{v} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,i}}{\mathrm{d}t}$, et alors $\sum\limits_i \overrightarrow{F_{\mathrm{c},i}^{\mathrm{ext}}} \cdot \overrightarrow{v} = \sum\limits_i -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,i}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t}$, avec $\mathcal{E}_p = \sum\limits_i \mathcal{E}_{p,i}$ l'énergie potentielle totale du système.
- Enfin, par définition, $\overrightarrow{F_{\mathrm{nc},j}^{\mathrm{ext}}} \cdot \overrightarrow{v} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{\mathrm{nc},j}^{\mathrm{ext}}})$, donc $\sum\limits_j \overrightarrow{F_{\mathrm{nc},j}^{\mathrm{ext}}} \cdot \overrightarrow{v} = \mathcal{P}_{\mathrm{nc}}$ avec $\mathcal{P}_{\mathrm{nc}} = \sum\limits_j \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{\mathrm{nc},j}^{\mathrm{ext}}})$ la puissance totale des forces non conservatives.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Si l'on remplace chacun des termes, il vient alors que :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_{\mathrm{nc}}$$

Soit, en mettant les termes énergétiques du même côté :

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p\right)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\mathrm{nc}}$$

En notant $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ l'énergie mécanique du système, on en déduit alors le théorème de la puissance mécanique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\mathrm{nc}}}$$