Chapitre 2 : Dérivation

1 Dériver un polynôme

Dérivée d'un monôme

Soit la fonction $f : x \mapsto k \times x^n$ avec n un entier naturel et k une constante.
La dérivée de f est $f' : x \mapsto n \times k \times x^{n-1}$.

☛ *Remarque :* Cette proposition est également vraie si n est un réel quelconque.

Dérivée d'une somme

Soit f une fonction somme de deux autres fonctions : $f = u + v$.
La dérivée de f est $f' = u' + v'$. En d'autres termes, $(u+v)' = u' + v'$.

Dérivée d'un polynôme

Soit un polynôme $P : x \mapsto a_0 + a_1 \times x + a_2 \times x^2 + a_3 \times x^3 + \ldots + a_n \times x^n$.
On déduit des deux propriétés précédentes que la dérivée de P est

$$P' : x \mapsto a_1 + 2a_2 \times x + 3a_3 \times x^2 + \ldots + na_n \times x^{n-1}$$

Exercice 1

Déterminer les dérivées des monômes suivants :

- $a(x) = x$
- $b(x) = x^3$
- $c(x) = 2$
- $d(x) = 5x^4$
- $e(x) = -3x^2$
- $f(x) = 8x^8$
- $g(x) = \dfrac{2}{3}x^5$
- $h(x) = \dfrac{5}{7}x^7$
- $i(x) = \dfrac{3}{4}x^8$

Exercice 2

Déterminer les dérivées des polynômes suivants :

- $a(x) = x + x^2$
- $b(x) = x^3 - 5x$
- $c(x) = 2 - x^4$
- $d(x) = 5x^4 + 3x^2$
- $e(x) = -x^2 + 6x^5$
- $f(x) = 2x^8 - 12x^4$
- $g(x) = \dfrac{4}{3}x^4 + 3x$
- $h(x) = \dfrac{5}{6}x^7 - \dfrac{3}{2}x^2$
- $i(x) = \dfrac{6}{7}x^5 - 12x^4$

Exercice 3 (*)

En admettant que $\sqrt{x} = x^{1/2}$, montrer que la dérivée de la fonction racine carrée est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Généraliser le résultat pour une racine n-ième, en admettant que $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Exercice 4 (*)

En admettant que $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$, montrer que la dérivée de la fonction inverse est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.
Généraliser le résultat pour l'inverse d'une puissance, en admettant que $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$.

2 Dériver une fonction rationnelle

Dérivée de l'inverse d'une fonction

Soit v une fonction quelconque dérivable.
La dérivée de la fonction $\dfrac{1}{v}$ est $\dfrac{-v'}{v^2}$. En d'autres termes, $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Dérivée de l'inverse d'une fonction

Soit f une fonction quotient de deux autres fonctions : $f = \dfrac{u}{v}$.
La dérivée de f est $\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$. En d'autres termes :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$$

☛ *Remarque :* Il est rarement très utile de développer la fonction v^2 au dénominateur. On cherchera plutôt à simplifier autant que possible le numérateur.

Exercice 1

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $a(x) = \dfrac{1}{x+2}$
- $b(x) = \dfrac{1}{x^3+x}$
- $c(x) = \dfrac{2}{2+3x}$
- $d(x) = \dfrac{5}{x^3-6x^5}$
- $e(x) = \dfrac{1}{\frac{7}{5}x^5+x}$
- $f(x) = \dfrac{-3}{8x^8-3x+x^2}$

Exercice 2

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $a(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
- $b(x) = \dfrac{x^2}{x^3-x}$
- $c(x) = \dfrac{2x^4+x}{2+3x}$
- $d(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3-x^4}$
- $e(x) = \dfrac{1}{\frac{4}{3}x^6+x+2}$
- $f(x) = \dfrac{x^4-5x+2}{8x^8-3x+x^2}$

3 Dériver une fonction produit

Dérivées usuelles

On rappelle les dérivées de quelques fonctions usuelles :

- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

☛ *Remarque :* On peut aussi bien noter $\exp(x)$ que e^x pour la fonction exponentielle.

Dérivée d'un produit de fonctions

Soit f une fonction produit de deux autres fonctions : $f = u \times v$.
La dérivée de f est $u' \times v + u \times v'$. En d'autres termes :

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

Exercice

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $a(x) = x^2 \times \cos(x)$
- $b(x) = x^5 \times e^x$
- $c(x) = \ln(x) \times x^2$
- $d(x) = \cos(x) \times \sin(x)$
- $e(x) = e^x \times \ln(x)$
- $f(x) = x \times \ln(x) - x$

4 Dériver une fonction composée

Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction composée : $f = u \circ v$ (c'est-à-dire que $f(x) = u(v(x))$).
La dérivée de f est $v' \times (u' \circ v)$. En d'autres termes :

$$(u \circ v)' = v' \times (u' \circ v)$$

C'est-à-dire que $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$.

☛ *Remarque :* Une fonction du type $f(x) = (v(x))^n$ peut se décomposer sous la forme $f(x) = u(v(x))$ avec $u(x) = x^n$.

☛ *Exemple :* Prenons la fonction $f : x \mapsto \cos(\ln(x))$. On a $v(x) = \ln(x)$ et $u(x) = \cos(x)$. Leurs dérivées sont respectivement $v'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $u'(x) = -\sin(x)$.

On en déduit que $f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = \dfrac{1}{x} \times -\sin(\ln(x)) = -\dfrac{\sin(\ln(x))}{x}$.

Exercice 1

Soit u une fonction quelconque dérivable. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- e^u
- $\ln(u)$
- $\cos(u)$
- $\sin(u)$

Exercice 2

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $a(x) = \cos(3x)$
- $b(x) = \sin(2x)$
- $c(x) = e^{-4x}$
- $d(x) = \ln(5x)$
- $e(x) = \exp(-x^2/2)$
- $f(x) = \sin(x^2)$

Exercice 3 (*)

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $a(x) = \cos\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)$
- $b(x) = \sin(e^x)$
- $c(x) = e^{-\sin(x)}$
- $d(x) = \ln(\cos(x))$
- $e(x) = \cos^4(x)$
- $f(x) = \ln^3(x)$