Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 1 : Énergie d'un système mécanique

Travaux dirigés

Exercice faisant uniquement appel à des outils mathématiques
Exercice facile et/ou proche du cours
Exercice accessible mais demandant du recul sur le cours et/ou sur les outils mathématiques
Exercice complexe, de par son côté calculatoire et/ou astucieux

Il est normal de « bloquer » sur les **exercices** : personne ne s'attend à ce que vous sachiez les faire en cinq minutes seulement. Il faut cependant persévérer, avoir le cours à côté afin de voir si un raisonnement similaire a déjà été abordé, et ne pas hésiter à parler avec vos camarades ou votre professeur.

Les **problèmes** sont issus d'annales de concours et/ou d'examens. Ils sont au moins aussi importants à aborder que les exercices, car ils sont les plus proches (en terme de rédaction et de questions « bout-à-bout ») de ce que vous aurez en devoir surveillé ainsi qu'au concours.

Chapitre 1 : Mouvement rectiligne d'un point matériel

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Définir et utiliser la vitesse d'un point matériel	1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7
Définir et utiliser l'énergie cinétique d'un point matériel	1.2, 1.7
Interpréter géométriquement la dérivée, dériver une fonction composée	1.1, 1.4, 1.6

Questions de cours

- ☐ À quelle(s) condition(s) un système matériel peut-il se ramener à l'étude de son centre de masse ?
- ☐ Soit $x(t) = a \times t^2 + b \times e^{-t/\tau} - c \times \cos(\omega t)$ l'équation horaire d'un point matériel se déplaçant rectilignement ; déterminer la vitesse $v(t)$ de ce point matériel.
- ☐ Donner la dimension d'une énergie. Quelle est son unité dans le système international ?
- ☐ Soit un point matériel de masse $m = 5{,}0\,\mathrm{tonnes}$ et de vitesse $v = 36\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$; déterminer son énergie cinétique sans calculatrice.
- ☐ Soit un point matériel de vitesse $v = 40\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ et d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = 160\,\mathrm{MJ}$; déterminer sa masse sans calculatrice.
- ☐ Soit un point matériel de masse $m = 200\,\mathrm{g}$ et d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = 1{,}0\,\mathrm{kJ}$; déterminer sa vitesse sans calculatrice.
- ☐ Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ? Donner trois référentiels usuels. À quelle(s) condition(s) ces référentiels sont-ils galiléens ?

Exercices

1.1 Calculs de dérivées

Déterminer les dérivées (par rapport au temps t) des fonctions suivantes. Les grandeurs K_1 et K_2 sont considérées comme des constantes.

1. $a(t) = K_1 t + K_2$
2. $b(t) = 2K_1 t^2 - K_2 t$
3. $c(t) = \cos(K_1 t) - \sin(K_2 t)$
4. $d(t) = K_1 e^{-K_2 t}$

1.2 Un problème de trains

Un train, de vitesse constante $v_1 = 250\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, part de Paris à 10h du matin pour aller vers Mulhouse. Un second train part quant à lui de Mulhouse à 11h du matin pour aller vers Mulhouse, à la vitesse constante $v_2 = 83\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

La distance Paris-Mulhouse, faite en train, est $d = 480\,\mathrm{km}$.

1. Déterminer la durée, en secondes, pour que le premier train fasse son trajet.
2. Déterminer la durée, en secondes, pour que le deuxième train fasse son trajet.
3. Lequel des deux trains arrive en premier à sa gare d'arrivée ?

1.3 Chute de pièces

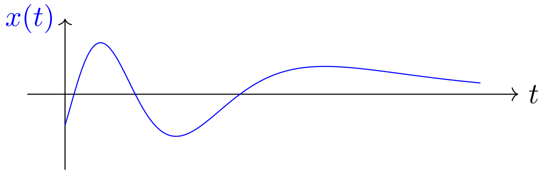
Alice décide d'aller visiter la tour Eiffel. Arrivé en haut, elle sort alors son téléphone portable pour prendre une photo, mais fait malencontreusement tomber son portefeuille au même instant.

1. Une pièce de vingt centimes d'euros (masse $m = 5{,}74\,\mathrm{g}$ chute alors. Juste avant l'impact, elle possède une énergie cinétique de $11{,}3\,\mathrm{J}$. Quelle est la vitesse v de la pièce juste avant l'impact ?
2. Une autre pièce, de même énergie cinétique avant impact, atteint le sol avec une vitesse $v' = 86\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Déterminer, à l'aide du tableau ci-dessous, la valeur de cette pièce.

pièce	1 ct	2 ct	5 ct	10 ct	50 ct
masse	$2{,}30\,\mathrm{g}$	$3{,}06\,\mathrm{g}$	$3{,}96\,\mathrm{g}$	$4{,}10\,\mathrm{g}$	$7{,}80\,\mathrm{g}$

1.4 Exploitation d'un graphe de positions

Soit un système se déplaçant sur un axe (Ox). On représente ci-dessous la position de ce système au cours du temps.



Représenter graphiquement **les allures** (donc pas de calcul !) de la vitesse $v(t)$ et de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)$.

1.5 Voitures télécommandées

Deux voitures télécommandées se déplacent selon un axe horizontal (Ox). La vitesse de la première voiture s'exprime selon $v_1(t) = 0{,}9 + 0{,}3 \times t$, alors que celle de la deuxième voiture s'exprime selon $v_2(t) = 0{,}2 + 0{,}8 \times t$, où v_1 et v_2 sont en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et t en s. Initialement, les voitures partent du même point $x = 0$.

1. Quelles sont les vitesses initiales de chacune des deux voitures ?
2. Tracer les vitesses v_1 et v_2 dans un repère d'abscisse t. Déterminer graphiquement à quel instant t^* la voiture 2 va plus vite que la voiture 1. On ira, en abscisse, de $t = 0\,\mathrm{s}$ à $t = 2\,\mathrm{s}$.
3. Retrouver le résultat obtenu à la question précédente par un raisonnement quantitatif (c'est-à-dire en faisant des calculs).
4. La voiture 2 dépasse-t-elle la voiture 1 à partir de l'instant t^* ? Justifier (mais sans calculs).

1.6 Ballon sonde

On repère le centre d'un ballon sonde par ses coordonnées $(x(t), z(t))$. Le ballon est lâché depuis le point $O = (0, 0)$ à l'instant $t = 0$. Il acquiert quasi instantanément une vitesse verticale v_0 qui demeure constante au long du mouvement. Le vent lui communique une vitesse horizontale $v_x > 0$, orientée selon l'axe (Ox), et proportionnelle à son altitude $z > 0$ mesurée par rapport au niveau du sol : $v_x = z/\tau$ où $\tau > 0$ est une constante homogène à un temps.

1. Exprimer $z(t)$ en fonction notamment de v_0.
2. En déduire l'expression de $v_x(t)$, puis celle de $x(t)$.

1.7 Impact d'une météorite sur la Terre

Scénario catastrophe : une météorite va s'écraser sur la Terre ! L'impact est inévitable, car les deux corps ont une même direction, mais des sens opposés.

Dans le référentiel héliocentrique, la vitesse de la Terre est $v_T = 29{,}8\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$; celle de la météorite est $v_m = 5{,}7\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

1. Initialement, la surface de la Terre est à une distance $d = 2{,}5 \times 10^4\,\mathrm{km}$ de la météorite. Au bout de quelle durée Δt les deux corps entreront-ils en impact ? L'exprimer dans une unité adaptée.
2. Dans le référentiel de la Terre, la météorite va à la vitesse $v = v_T + v_m$. La masse de la météorite est $M = 500\,\mathrm{tonnes}$. Quelle est l'énergie cinétique fournie à l'impact ? À combien de bombes nucléaires du type Hiroshima ($\mathcal{E} \approx 60 \times 10^{12}\,\mathrm{J}$) cela correspond-il ?

Indications et éléments de réponse

1.3 Chute de pièces

1. $v = 62{,}7\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.
2. C'est une pièce de $2\,\mathrm{ct}$.

1.4 Exploitation d'un graphe de positions

La vitesse ne représente rien d'autre que la pente de $x(t)$.

1.5 Voitures télécommandées

3. À t^*, les vitesses des deux voitures sont égales. $t^* \approx 1{,}17\,\mathrm{s}$.

1.6 Ballon sonde

2. $x(t) = \dfrac{v_0}{\tau} \times \dfrac{t^2}{2}$.

1.7 Impact d'une météorite sur la Terre

Faire un schéma représentant les deux corps et la distance d à l'instant initial !

1. $\Delta t = 11\,\mathrm{min} 42\,\mathrm{s}$.
2. Environ $5\,\mathrm{bombes}$.

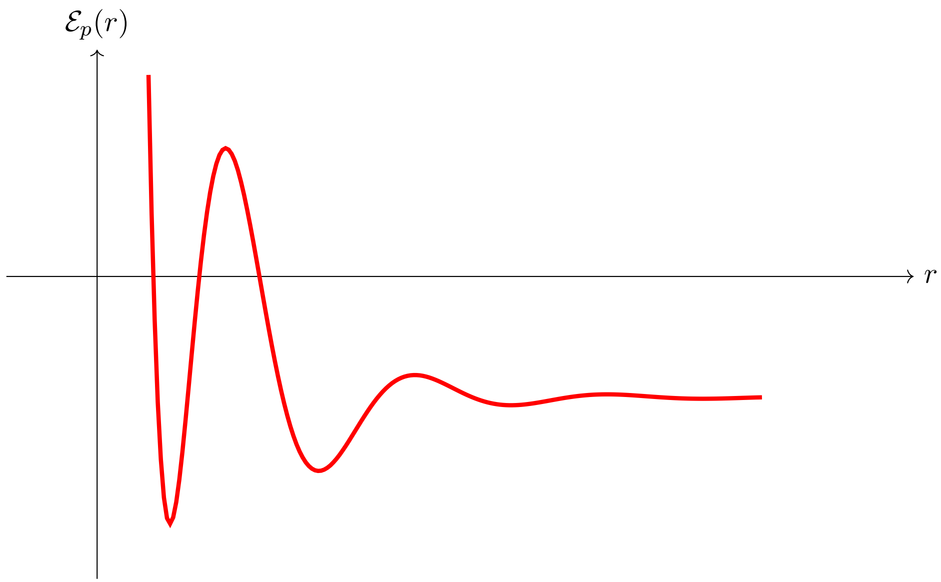
Chapitre 2 : Équilibre mécanique d'un système matériel

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Citer et utiliser les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur associée à un champ uniforme et de l'énergie potentielle élastique associée à un ressort	2.1, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7
Exploiter l'expression de l'énergie potentielle pour déterminer les éventuelles positions d'équilibre stable et instable	2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7
Dériver une fonction composée et rechercher un extremum	2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7

Questions de cours

- ☐ Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,\text{pes}}$ dans le cas d'un axe vertical ascendant et dans le cas d'un axe vertical descendant. Interpréter le lien entre $\mathcal{E}_{p,\text{pes}}$ et m, ainsi que le lien entre $\mathcal{E}_{p,\text{pes}}$ et la cote z.
- ☐ Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,\text{él}}$ d'un ressort de raideur k, de longueur ℓ et de longueur à vide ℓ_0. Interpréter la présence de l'exposant présent dans cette expression.
- ☐ Expliquer pourquoi les énergies potentielles sont définies à une constante additive près.
- ☐ Définir l'équilibre d'un système matériel. Comment traduire mathématiquement cette définition, pour un système matériel conservatif ? Comment traduire graphiquement cette condition ?
- ☐ Définir ce qu'est un équilibre stable. Comment traduire mathématiquement cette définition, pour un système matériel conservatif ? Comment traduire graphiquement cette condition ?
- ☐ Définir ce qu'est un équilibre instable. Comment traduire mathématiquement cette définition, pour un système matériel conservatif ? Comment traduire graphiquement cette condition ?
- ☐ Déterminer, sur le graphe d'énergie potentielle ci-dessous, les positions d'équilibre ainsi que leurs stabilités.



Exercices

2.1 Des ordres de grandeur

Sans calculatrice !

1. Calculer l'énergie qu'il faut dépenser pour monter trois étages, en supposant qu'un étage fait $2{,}5\,\mathrm{m}$. À comparer avec la valeur énergétique d'un *Mars* : $450\,\mathrm{kcalorie}$ avec $1\,\mathrm{calorie} = 4{,}18\,\mathrm{J}$.
2. Calculer l'énergie qu'il faut pour comprimer de 10% un ressort d'amortisseur de voiture ($k = 45 \times 10^3\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et $\ell_0 = 28\,\mathrm{cm}$).

2.2 Calcul de dérivées composées

Une fonction composée f est de la forme $f = g \circ h$, où g et h sont deux fonctions. Ainsi, $f(x) = g(h(x))$. Par exemple, $f : x \mapsto \sqrt{2x-1}$ est la composition des fonctions $h : x \mapsto 2x - 1$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

La dérivée d'une fonction composée $f = g \circ h$ s'exprime par la formule : $f'(x) = h'(x) \times g'(h(x))$. Si l'on revient à notre exemple, on a $h'(x) = 2$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x-1}}$.

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, en explicitant au préalable les fonctions « g » et « h » :

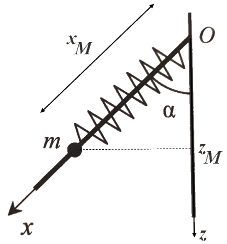
1. $f_1(x) = (x-2)^2$;
2. $f_2(x) = \sqrt{x^3 - 1}$;
3. $f_3(\theta) = \dfrac{2}{3} mL^2 \sin^2(\theta)$;
4. $f_4(y) = \dfrac{a}{1 - \dfrac{y}{L}}$.

2.3 Système masse-ressort vertical à l'équilibre

Soit un système masse-ressort vertical à l'équilibre. Le ressort est fixé à son extrémité haute O, fixe, à l'origine de l'axe (O, z) vertical descendant. On note ℓ_0 la longueur à vide du ressort et k sa constante de raideur. On repère l'extrémité basse du ressort, constitué d'une masse m, par un point M de coordonnée $z_M > 0$ selon l'axe (O, z). L'ensemble est présent dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g.\vec{e_z}$.

1. Faire un schéma de la situation, en faisant notamment apparaître z_M.
2. Quelle est l'énergie potentielle totale du système masse-ressort ?
3. Par un calcul de dérivée, déterminer la position d'équilibre du système.
4. Par un calcul de dérivée seconde, déterminer si cette position est stable ou instable. Est-ce cohérent, physiquement ?

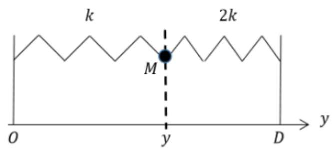
2.4 Ressort sur tige inclinée



Considérons une masse m accrochée à un ressort (k, ℓ_0) et pouvant glisser sans frottement sur une tige inclinée d'un angle α par rapport à la verticale. On définit un axe (O, x) selon la direction de la tige, avec l'origine O à l'autre extrémité du ressort.

1. Exprimer z_M en fonction de x_M et α.
2. Déterminer l'énergie potentielle totale (pesanteur inclue) $\mathcal{E}_p(x)$ de la masse m.
3. En déduire la position d'équilibre stable $x_{éq}$.

2.5 Système à deux ressorts

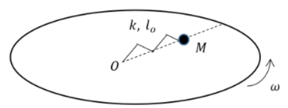


On considère un point matériel M de masse m attaché à deux ressorts de mêmes longueurs à vide ℓ_0, mais de raideur k pour celui de gauche, et $2k$ pour celui de droite. Les effets de pesanteur sont négligés.

L'ensemble est confiné sur un espace de longueur $D < 2\ell_0$.

1. Exprimer les longueurs ℓ_g et ℓ_d des ressorts de gauche et de droite en fonction de y et D.
2. En déduire l'énergie potentielle totale du système.
3. Déterminer la position d'équilibre du système, ainsi que sa stabilité.

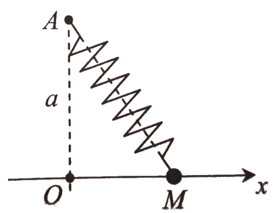
2.6 Ressort tournant



Un ressort horizontal est placé sur un plateau circulaire tournant à la vitesse angulaire constante ω. On note $r > 0$ la distance entre O et M. Les effets de pesanteur sont négligés.
De la rotation découle une énergie potentielle centrifuge : $\mathcal{E}_{p,\text{rot}} = -\dfrac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

1. Vérifier que $\mathcal{E}_{p,\text{rot}}$ est bien homogène à une énergie.
2. Exprimer l'énergie potentielle totale de M en fonction de r.
3. Déterminer la position d'équilibre du système, et montrer que l'on a nécessairement $\omega < \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
4. Préciser la stabilité de cet équilibre.
5. Que se passe-t-il si $\omega > \sqrt{\dfrac{k}{m}}$?

2.7 Oscillateur anharmonique



Un petit anneau, assimilé à un point M de masse m, est astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale, choisie comme axe (Ox). Il est relié à un ressort (k, ℓ_0) dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est $AO = a$, et les effets de pesanteur sont négligés.

1. Exprimer l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(x)$.
2. Montrer que $x_{\text{éq}} = 0$ est toujours une position d'équilibre, et que $x_{\text{éq}} = \pm\sqrt{\ell_0^2 - a^2}$ est une position d'équilibre si $\ell_0 > a$.
3. Étudier les stabilités de ces équilibres sans calcul (c'est-à-dire « instinctivement »), en séparant les cas $\ell_0 > a$ et $\ell_0 < a$.

Indications et éléments de réponse

2.3 Système masse-ressort vertical à l'équilibre

3. et 4. $z_M^{\text{éq}} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$: c'est un équilibre stable.

2.4 Ressort sur une tige inclinée

3. $x_M^{\text{éq}} = \ell_0 + \dfrac{mg\cos(\alpha)}{k}$: c'est un équilibre stable.

2.5 Système à deux ressorts

3. $y_{\text{éq}} = \dfrac{2D - \ell_0}{3}$: c'est un équilibre stable.

2.6 Ressort tournant

3. et 4. $r_{\text{éq}} = \dfrac{\ell_0}{1 - \dfrac{m}{k}\omega^2}$: c'est un équilibre stable.

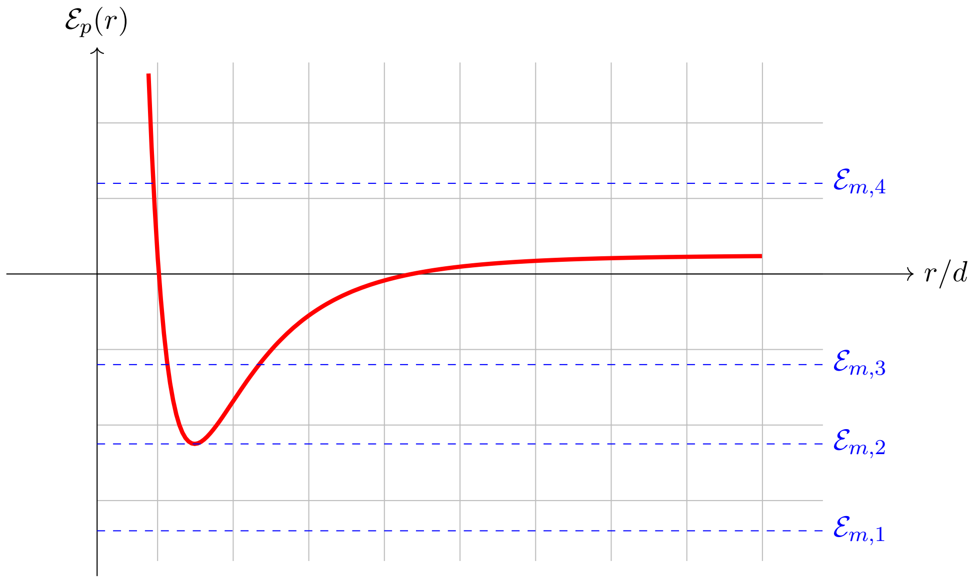
Chapitre 3 : Conservation de l'énergie mécanique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Déduire d'un graphe d'énergie potentielle ou d'une expression d'une énergie mécanique une vitesse ou une position en des points particuliers	3.2, 3.4
Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement borné ou non de la trajectoire	3.1, 3.2, 3.4
Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique	3.1, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7
Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives (TPM)	3.2

Questions de cours

- ☐ Donner la dimension d'une puissance. Quelle est son unité dans le système international ?
- ☐ Donner la définition de l'énergie mécanique d'un système. À quelle(s) condition(s) l'énergie mécanique d'un système est-elle conservée ?
- ☐ Soit un système mécanique dont le graphe de l'énergie potentielle en fontion de la position est donné ci-dessous, avec d une longueur caractéristique :



Déterminer les positions accessibles au système mécanique selon la valeur de son énergie mécanique $\mathcal{E}_m$.

- ☐ Donner l'énoncé du théorème de la puissance mécanique (TPM).
- ☐ Qu'appelle-t-on équation du mouvement ? Et équation horaire ?
- ☐ On a $\ddot{x}(t) = 5 \times t^2 - 3$. Déterminer $x(t)$, sachant que $\dot{x}(t=0) = 8$ et que $x(t=0) = -2$.
- ☐ Soit un point matériel M de masse m repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une hauteur h avec une vitesse v_0 vers le bas. On néglige tout frottement. Déterminer sa vitesse v^* juste avant de toucher le sol à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique (à justifier).
- ☐ Soit un point matériel M de masse m repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une hauteur h avec une vitesse v_0 vers le bas. On néglige tout frottement. Déterminer l'équation horaire $z(t)$ de ce point à l'aide du théorème de la puissance mécanique.

Exercices

3.1 Jeu de billes

On considère une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, lancée sur un plan horizontal. La direction du mouvement est l'axe (O, x) ; on note alors $x(t)$ la position de la bille. On néglige les frottements, qu'ils soient solides ou fluides.

1. La bille est lancée initialement avec une vitesse v_0. Montrer que l'énergie cinétique de la bille est conservée au cours de son mouvement.
2. À l'aide d'un graphe d'énergie potentielle, montrer que la trajectoire de la bille n'est pas bornée.
3. Un peu plus loin, la bille rencontre une bille plus lourde de masse m', initialement statique. On suppose que l'énergie cinétique se répartit de manière égale entre les deux billes. Déterminer les vitesses v et v' de chacune des deux billes.

3.2 Hauteur maximale atteinte

On lance une balle, assimilée à un point matériel M de masse m, vers le haut avec une vitesse v_0. On repère l'altitude du point M par $z(t)$ (l'axe (O, z) est ascendant) ; initialement, on a $z(t = 0) = 0$.

1. Déterminer l'équation du mouvement portant sur $z(t)$.
2. Déterminer l'équation horaire $z(t)$ à l'aide des conditions initiales.
3. Que vaut la vitesse au point le plus haut atteint par M ? En déduire à quel instant t_{max} l'altitude du point M est maximale.
4. Que vaut cette hauteur maximale z_{max} ?
5. Retrouver ce résultat à l'aide d'un graphe portant sur l'énergie potentielle.

3.3 Sport d'hiver

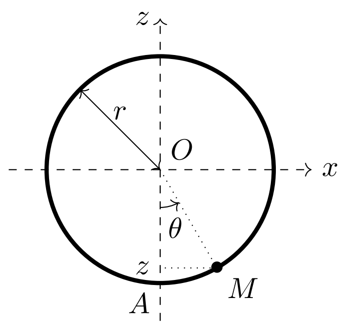
Une skieuse de masse $m = 60\,\text{kg}$ part de l'arrêt au sommet d'une pente de hauteur $H = 60\,\text{m}$ et descend sans utiliser ses bâtons.

1. Exprimer son énergie potentielle au départ. On choisira l'origine de l'énergie potentielle au bas de la pente.
2. En négligeant les frottements, exprimer et calculer sa vitesse théorique au bas de la pente.
3. En fait, elle atteint le bas avec une vitesse $v_f = 8{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Quelle est l'énergie totale perdue par frottements ?

3.4 Looping ou non ?

Soit un anneau M de masse $m = 1\,\text{kg}$ pouvant coulisser sans frottements sur un cercle fixe de centre O et de rayon $r = 1\,\text{m}$ placé dans un plan vertical. On note A le point le plus bas du cercle, et on le choisit comme étant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur.

À $t = 0$, l'anneau est lancé du point A avec une vitesse v_0 vers la droite. On repère la position de M au choix par son altitude z ou par l'angle θ qu'il forme par rapport à la verticale descendante.



1. Exprimer $\mathcal{E}_p(z)$, énergie potentielle de M en un point d'altitude z quelconque.
2. Déterminer l'expression de la vitesse v de M en fonction de θ, puis en fonction de z.
3. Discuter de la possibilité de faire un tour complet en fonction de la valeur de v_0 à l'aide d'un graphe portant sur l'énergie potentielle.
4. Retrouver le résultat précédent mathématiquement.

3.5 Canon à électrons

Un électron est accéléré dans un canon de longueur d. À l'entrée du canon règne un potentiel électrique V_E, et à sa sortie un potentiel V_S, tel que $V_E - V_S = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{V}$. On néglige l'influence de la gravité, et on admet qu'une charge q soumise à un potentiel électrique V a une énergie potentielle électrique $\mathcal{E}_{p,\text{élec}} = qV$.

Exprimer et calculer la vitesse de sortie v_S de l'électron en supposant sa vitesse négligeable en entrée.

Données : charge d'un électron $q_e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ et masse d'un électron $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

3.6 Le bond du Marsupilami

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin. Ses capacités physiques sont remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante : le Marsupilami peut notamment sauter en enroulant sa queue comme un ressort entre lui et le sol.

On note $\ell_0 = 2\,\mathrm{m}$ la longueur à vide du ressort équivalent à la queue du Marsupilami. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur minimale du ressort est $\ell_m = 50\,\mathrm{cm}$. On supposera que le Marsupilami pèse $m = 50\,\mathrm{kg}$ et que sa queue quitte le sol lorsque le ressort mesure ℓ_0 ; lorsque le Marsupilami est dans l'air, sa queue reste alors à la longueur ℓ_0.

1. Déterminer la constante de raideur de la queue du Marsupilami s'il est capable de sauter jusqu'à une hauteur $h = 10\,\mathrm{m}$.
2. Quelle est la vitesse du Marsupilami lorsque sa queue quitte le sol ?

3.7 Répulsion coulombienne

Soit deux masses m, chargées électriquement avec une charge q, maintenues initiales immobiles à une distance d l'une de l'autre. La masse en O est considérée fixe.

L'interaction électrique entre deux charges est conservative, de sorte qu'on peut la traduire à l'aide de l'énergie potentielle suivante : $\mathcal{E}_{p,\text{Coul}} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

On libère la deuxième masse sans vitesse initiale. Quelle est la position finale de cette masse ? Exprimer alors sa vitesse finale.

Indications et éléments de réponse

De manière générale : si les actions mécaniques extérieures sont toutes conservatives, alors l'énergie mécanique est constante. On peut en déduire des résultats sur l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle, au choix, connaissant les conditions initiales.

3.2 Hauteur maximale atteinte

3. $t_{\text{max}} = \dfrac{v_0}{g}$.

3.3 Looping ou non ?

4. Il faut que la vitesse au point le plus haut ne soit pas nulle. $v_0 \geq \sqrt{4gr}$.

3.5 Canon à électrons

$v_S = 1{,}9 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

3.6 Le bond du Marsupilami

1. Faire un bilan d'énergie mécanique entre l'instant où la queue du Marsupilami est totalement comprimée et l'instant où il est à son point le plus haut. $k = 4{,}1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.
2. $v = 13\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

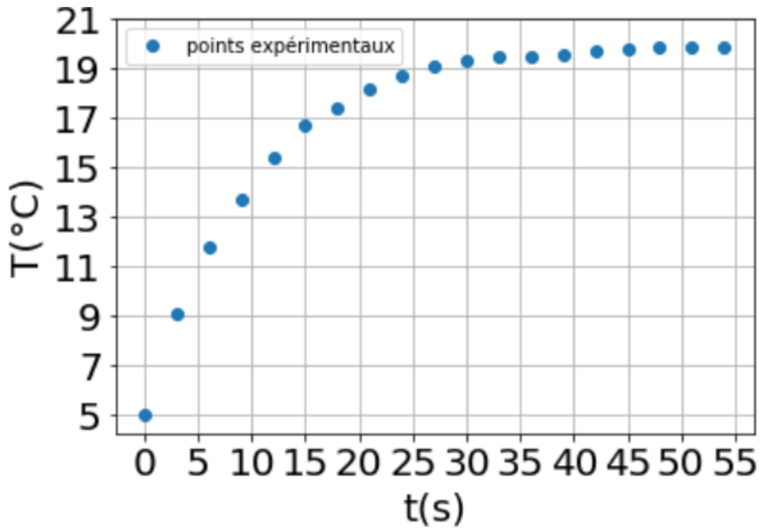
Chapitre 4 : Frottements fluides

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Distinguer force conservative et force non conservative	4.2
Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives (TPM)	4.2, 4.3
Étudier un système modélisé par une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Interpréter qualitativement le temps caractéristique	4.1

Questions de cours

- ☐ Donner la dimension du coefficient de frottement λ (on rappelle que la puissance des forces de frottements est $\mathcal{P}_f = -\lambda v^2$, avec v la vitesse du point matériel étudié). Quelle est son unité dans le système international ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}y(t) = \frac{1}{\tau}y_{\text{éq}}$. Que représentent physiquement $y_{\text{éq}}$ et τ ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $\tau \times \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + 2\theta(t) = 3\theta_0$. La résoudre, sachant que $\theta(t=0) = 5\theta_0$. Tracer l'allure de la solution.
- ☐ Soit un point matériel M repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une altitude h avec une vitesse initiale v_0 vers le bas. On prend en compte les frottements, de coefficient de frottements λ. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de ce point.
- ☐ Proposer, à l'aide de vos propres mots, des définitions pour « régime permanent » et « régime transitoire ».
- ☐ Soit la fonction $T(t) = T_f + (T_0 - T_f) \times e^{-t/\tau}$ tracée ci-dessous. Déterminer graphiquement T_0 et T_f. Mesurer également de deux manières différentes la valeur de τ.



Exercices

4.1 Résolution d'équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes et tracer qualitativement le graphe des solutions.

1. $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{U}{RC} = \frac{E}{RC}$ avec $U(t=0) = 0$;
2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y}{\tau} = v_0$ avec $y(t=0) = H$ (pour le graphe, on prendra $H < v_0 \times \tau$) ;
3. $L\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + P = 0$ avec $P(z=0) = P_0$;
4. $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 2f = f_0$ avec $f(x=0) = 2f_0$.

4.2 Le plongeur

Un homme de masse $m = 80\,\mathrm{kg}$ saute d'une falaise de hauteur $h = 5\,\mathrm{m}$. Pendant la chute dans l'air, les frottements sont négligés, mais une fois dans l'eau ils agissent sur le plongeur avec une puissance $\mathcal{P} = -\alpha v^2$ avec v la vitesse du plongeur. On tient aussi compte de la poussée d'Archimède dans l'eau, qui est supposée compenser exactement le poids.

On repère la position verticale du plongeur par la variable $z(t)$, où l'axe (O, z) est orienté vers le bas. On a $z(t = 0) = 0$, et on prend $\alpha = 115\,\mathrm{SI}$.

1. (a) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ pendant la partie de la chute qui s'effectue dans l'air.
   (b) En déduire $z(t)$.
   (c) Exprimer la date t_{imp} de l'impact.
   (d) En déduire la vitesse au moment de l'impact. Faire l'application numérique.
2. On s'intéresse maintenant à la partie de la chute qui s'effectue dans l'eau. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$.
3. Exprimer $v(t)$, puis en déduire $z(t)$. On pourra définir une constante de temps τ pour alléger les expressions.
4. Tracer l'allure de $z(t)$ sur un graphe pour $t > 0$. En déduire la profondeur maximale p atteinte par le plongeur.
5. Critiquer une hypothèse du modèle et prédire intuitivement le mouvement réel du plongeur.

4.3 Frottements quadratiques

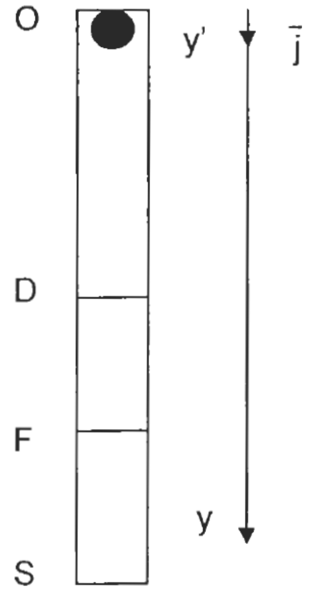
Dans le cas de grandes vitesses, la puissance des frottements peut s'écrire $\mathcal{P} = -\beta v^3$.

1. Donner la dimension de β.
2. Déterminer l'équation différentielle portant sur v, en supposant qu'aucune force autre que les frottements ne s'exerce sur le système d'études.
3. Vérifier que $v(t) = \dfrac{m}{\beta t + C}$ est solution de l'équation différentielle, avec C une constante.
4. On suppose que $v(t = 0) = v_0$. Quelle est alors l'expression de C ?

Problème

On réalise l'expérience suivante : un long tube OS, fermé aux deux extrémités, contient du glycérol de viscosité η et une bille en acier.

Le tube est retourné à l'instant $t = 0$. La bille se trouve alors en haut du tube sans vitesse initiale puis elle tombe verticalement dans le glycérol.



Données : accélération de la pesanteur $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$

Tube : hauteur $d = OS = 40\,\mathrm{cm}$; deux traits horizontaux, utiles dans la partie 2, ont été tracés en D et F

Bille : masse volumique de l'acier $\rho_s = 7850\,\mathrm{kg/m^3}$; rayon de la bille $R = 6{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$; volume de la bille V

Glycérol : masse volumique $\rho_{\text{gly}} = 1260\,\mathrm{kg/m^3}$; la viscosité η s'exprime en $\mathrm{Pa \cdot s}$ (pascal seconde)

L'étude est effectuée dans le référentiel de laboratoire supposé galiléen. L'axe pour l'étude est l'axe $y'y$ vertical orienté vers le bas sur le schéma ci-dessus, de vecteur unitaire $\vec{j}$.

1. **Les énergies potentielles et puissances**
   (a) Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,\text{pes}}$ en fonction de ρ_s, V, g et Y, position verticale de la bille décomptée à partir de l'origine O.

(b) L'expression de l'énergie potentielle associée à la poussée d'Archimède est $\mathcal{E}_{p,\mathsf{A}} = \rho_{\mathsf{gly}} V g Y$. Vérifier l'homogénéité de cette expression.

(c) La loi de Stokes donne que la puissance dissipée par frottements est $\mathcal{P}_f = -k\eta R v^2$ avec v la valeur de la vitesse de chute de la bille et k une constante sans dimension. Commenter l'existence du signe négatif dans cette expression.

2. **Détermination de la viscosité du glycérol, principe du viscosimètre**

   Au cours de la chute, la bille atteint très rapidement sa vitesse limite, notée v_{lim}. Lorsque la bille passe devant le trait D et au-delà, sa vitesse est constante.

   La durée de chute Δt_{ch} de la bille, entre les deux traits D et F qui sont distants d'une hauteur L, est mesurée.

   (a) Exprimer la vitesse de chute limite v_{lim} en fonction de Δt_{ch} et L. Justifier la démarche.

   (b) Rappeler l'énoncé du théorème de la puissance mécanique. Proposer une définition du terme « force non conservative ».

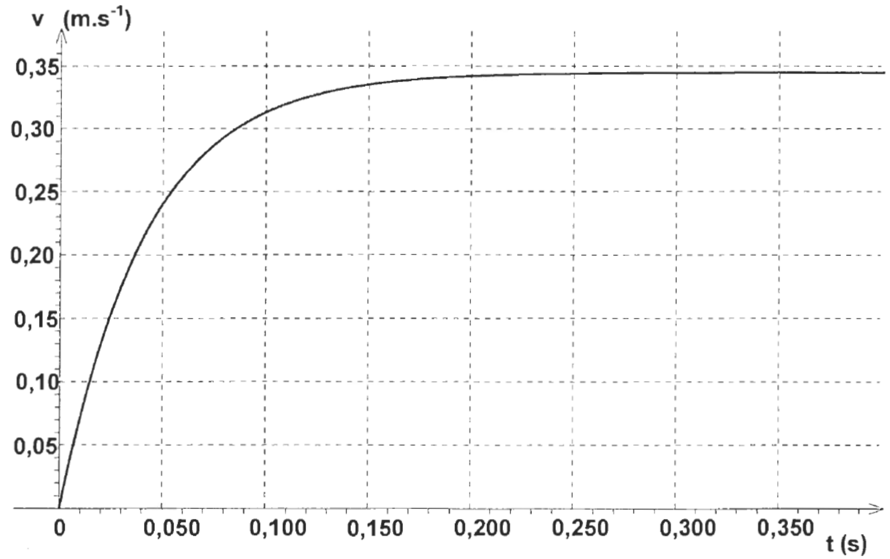
   (c) Que dire de l'énergie cinétique de la bille entre les deux traits D et F ? En déduire une équation liant les différents termes de l'énoncé.

   (d) Montrer alors que la viscosité η du glycérol peut s'écrire $\eta = C \times \dfrac{\rho_s - \rho_{\mathsf{gly}}}{\Delta t_{\mathsf{ch}}}$ avec C une constante dépendant des données de l'énoncé.

   (e) Calculer la valeur de η, sachant que $C = 7{,}84 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$ et $\Delta t_{\mathsf{ch}} = 0{,}29\,\mathrm{s}$.

3. **Étude du mouvement de chute de la bille**

   Le début de la chute a été filmé, puis le traitement de la vidéo a permis d'obtenir la représentation de la vitesse de la bille en fonction du temps. Cette représentation est donnée ci-dessous.



   (a) Exploitation de l'expérience.

      i. Identifier graphiquement les deux phases d'évolution de la vitesse et les nommer.

      ii. Déterminer graphiquement :

      — le temps caractéristique τ de l'évolution de la valeur de la vitesse de la bille ;

      — la valeur de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la bille.

   (b) Étude théorique.

      i. Par application du TPM, établir l'équation différentielle vérifiée par v. L'écrire sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A + B \times v$.

      ii. Calculer A et préciser son unité.

Indications et éléments de réponse

4.2 Le plongeur

1. (c) L'impact a lieu quand $z = h$. $t_{\mathsf{imp}} = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

4. $p = z(t \to \infty) = h + \tau \times \sqrt{2gh}$ avec $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$.

4.3 Frottements quadratiques

4. $C = \dfrac{m}{v_0}$.

Chapitre 5 : Oscillateur harmonique

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Identifier et utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique	5.3, 5.4, 5.5, 5.7
Prévoir l'amplitude des oscillations et la vitesse maximale	5.3, 5.4, 5.5, 5.7

Questions de cours

- ☐ Soit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_{\text{éq}}$. Que représentent physiquement $y_{\text{éq}}$ et ω_0 ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $\tau \times \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4}{\tau} y(t) = \dfrac{1}{\tau} y_0$. La résoudre, sachant que $y(t=0) = 5y_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t=0) = \dfrac{6y_0}{\tau}$. Tracer l'allure de la solution.
- ☐ Soit un système masse-ressort horizontal (axe (O,x)), fixé en $x=0$ au point O et dont l'autre extrémité M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $x(t)$ représente l'abscisse du point M par rapport au point O (on a donc $x(t)$ positif). La pesanteur est négligée. Déterminer l'équation du mouvement portant sur $x(t)$, puis son équation horaire, sachant que le ressort est initialement lâché sans vitesse à la longueur $2 \times \ell_0$.
- ☐ Soit un système masse-ressort vertical, fixé au-dessus au point O et dont l'extrémité basse M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $z(t)$ représente la cote du point M par rapport au point O (on a donc $z(t)$ positif, et un axe (O,z) descendant). La pesanteur est prise en compte. Déterminer l'équation du mouvement portant sur $z(t)$, puis son équation horaire, sachant que le ressort est initialement lâché sans vitesse à la longueur ℓ_0.
- ☐ Que dire de l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique ? Tracer l'allure, sur un graphe dépendant du temps, de l'énergie potentielle, de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique. Commenter.

Exercices

5.1 Résolution d'équations différentielles

Résoudre les équations suivantes et tracer qualitativement le graphe des solutions.

1. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = 0$ avec $y(t=0) = y_0 > 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$;
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{u}{LC} = \dfrac{E}{LC}$ avec $u(t=0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0) = u_0' > 0$;
3. $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2} + 4f = 4$ avec $f(x=0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x=0) = 4$.

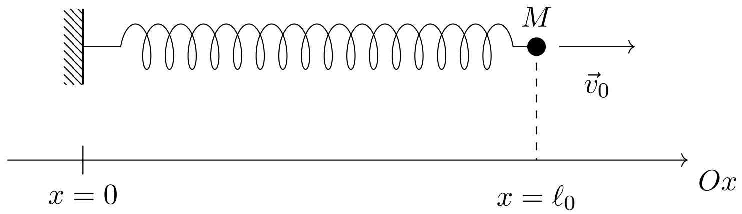
5.2 Équivalence de fonctions trigonométriques

Le but de cet exercice est de démontrer que les fonctions $x_1(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ et $x_2(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$ sont bien égales sous certaines conditions sur A, B, C et φ.

1. Vérifier que $x_2(t)$ est bien solution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0.
2. On rappelle que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. En identifiant les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$, montrer que l'on a nécessairement $A = C\cos\varphi$ et $B = -C\sin\varphi$.
3. On rappelle que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pour tout α réel, et que l'on a $\tan\alpha \triangleq \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. En déduire l'expression de C en fonction de A et B, ainsi que celle de $\tan\varphi$ en fonction de ces mêmes paramètres.

5.3 Système masse-ressort avec vitesse initiale

On reprend le premier exemple du cours, en conservant les notations.

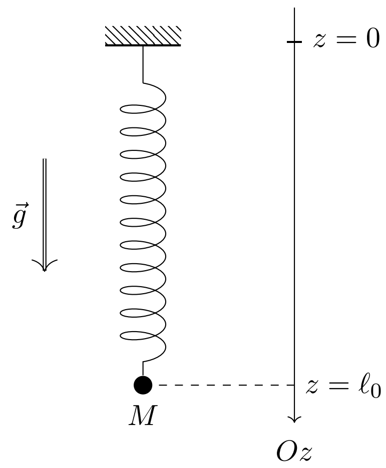


À $t = 0$, la longueur du ressort est sa longueur à vide ℓ_0. À ce même instant, on envoie la masse vers la droite : sa vitesse initiale est $v(t = 0) = v_0 > 0$.

1. Montrer que l'on a $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + k(x(t) - \ell_0) = 0$.
2. Résoudre l'équation différentielle précédente en fonction de deux paramètres A et B que l'on ne déterminera pas encore. On posera $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.
3. Quelles sont les valeurs de $x(t = 0)$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t = 0)$? En déduire les valeurs de A et de B, et déterminer alors l'expression de $x(t)$ en fonction notamment de ω_0, ℓ_0 et v_0.

5.4 Dynamique du système masse-ressort vertical

Le système masse-ressort est maintenant vertical, ce qui nous permet de prendre en compte le rôle du poids.



À $t = 0$, la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ℓ_0. On lâche, sans vitesse initiale, le point M à ce même instant ; la masse tombera alors par action de la gravité, tout en étant rappelée par la force du ressort.

1. Montrer que l'on a $m\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) + k(z(t) - \ell_0) - mg = 0$.
2. Montrer que cette équation peut s'écrire $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 L$, où ω_0 et L sont à exprimer en fonction de ℓ_0, g, k et m.
3. Résoudre l'équation différentielle portant précédente en fonction de deux paramètres A et B que l'on ne déterminera pas encore.
4. Déterminer, à l'aide des conditions initiales, les valeurs de A et de B. En déduire l'expression de $z(t)$ en fonction des données de l'énoncé.
5. Quelle est la position d'équilibre du ressort dans le cas vertical ? Quelle est l'amplitude du mouvement ? Est-il cohérent que $L > \ell_0$?

5.5 Énergétique du système masse-ressort vertical

On reprend les résultats que l'on a trouvé à l'exercice précédent ; on a notamment $L = \ell_0 + \frac{mg}{k}$.

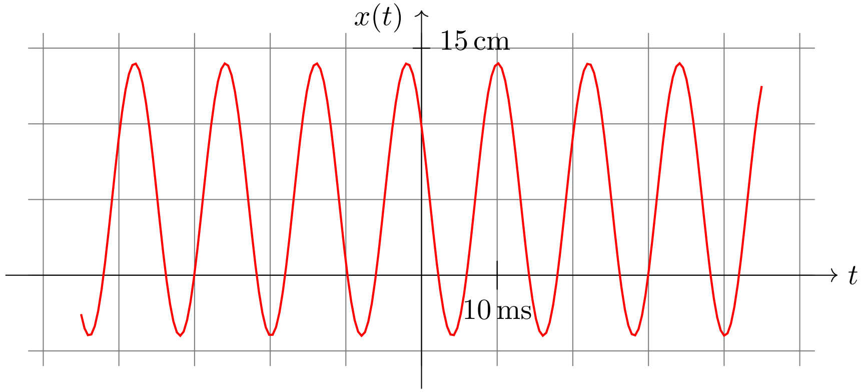
1. Montrer que la vitesse du point M est $v_M(t) = g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\omega_0 t)$.
2. Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv_M^2$ du système masse-ressort en fonction de m, g, k et ω_0.
3. On admet que l'énergie potentielle du ressort est $\mathcal{E}_{p,r} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ où ℓ est la longueur du ressort. Montrer que $\mathcal{E}_{p,r} = \frac{m^2g^2}{2k}\left[1 - \cos(\omega_0 t)\right]^2$.
4. On admet également que l'énergie potentielle due à la pesanteur est $\mathcal{E}_{p,p} = -mgz$. Exprimer l'énergie potentielle totale du système $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,r} + \mathcal{E}_{p,p}$ en fonction de m, g, ℓ_0, k et ω_0.
5. En déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$. Quel commentaire peut-on faire ?

5.6 Exploitation graphique

On considère un oscillateur harmonique horizontal constitué d'une masse assimilée à un point M de masse m lié à un ressort de raideur $k = 30\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et de longueur à vide ℓ_0.

À l'instant initial, on écarte M de sa position d'équilibre ($x(t=0) = \ell_0 + L$), puis on lâche M à la vitesse $v_0 > 0$.

On donne l'enregistrement de la position du mobile dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

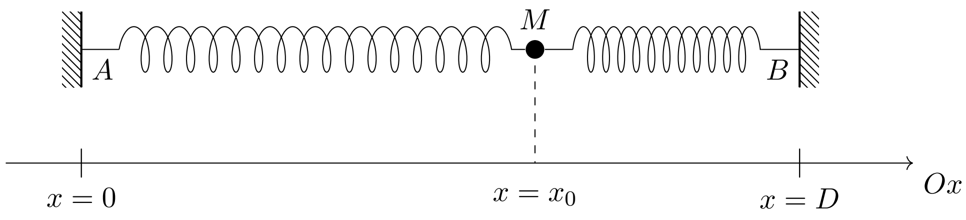


On propose une modélisation du type : $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + B$.

1. Déterminer la moyenne B de $x(t)$. En déduire la valeur de ℓ_0.
2. Déterminer l'amplitude A puis la phase à l'origine φ de $x(t)$. En déduire la valeur de L.
3. Déterminer la valeur de v_0.
4. Calculer la période T_0 de $x(t)$, et en déduire sa pulsation ω_0. Calculer alors la masse m du mobile.

5.7 Oscillateur à deux ressorts

Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m est astreint à glisser sans frottements le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Cet anneau est relié par deux ressorts à deux points fixes A et B ; la distance AB est fixée, et sera notée D.



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur à vide ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent $\ell_{\text{éq}} = D/2$.

À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 > 0$. On se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. On notera $x(t)$ la position du point M à l'instant t, et le poids sera négligé.

1. Exprimer les longueurs $\ell_A(t)$ du ressort de gauche et $\ell_B(t)$ du ressort de droite à l'instant t en fonction de $x(t)$ et de D.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique totale du système.
3. Montrer alors que l'on a $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + k(2x - D) = 0$.
4. Écrire cette équation sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 L$. Donner les expressions de ω_0 et de L en fonction de k, m et D.
5. Résoudre cette équation et en déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de deux paramètres A et B que l'on ne déterminera pas encore, ainsi que de ω_0 et L.
6. En tenant compte des conditions initiales, donner l'expression de $x(t)$ en fonction de ω_0, L et x_0.

Chapitre 6 : Oscillateur amorti

Capacités exigibles et exercices associés

Capacités exigibles	Exercice(s)
Utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique amorti par frottements fluides	6.2, 6.3, 6.4, problème
Résoudre et interpréter les solutions de l'équation différentielle canonique	6.1, 6.2, 6.3, problème
Commenter le cas où le facteur de qualité est grand devant 1	problème
Relier facteur de qualité et facteur d'amortissement	6.4

Questions de cours

- ☐ Soit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_{\text{éq}}$. Que représentent physiquement $y_{\text{éq}}$, ω_0 et Q ?
- ☐ À quel régime correspond le cas $Q < 1/2$? le cas $Q > 1/2$? Donner la forme mathématique des solutions dans chacun des deux cas, puis tracer leurs allures.
- ☐ Soit un système masse-ressort horizontal, fixé à gauche au point O et dont l'extrémité droite M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $x(t)$ représente l'abscisse du point M par rapport au point O. Les frottements, de puissance $\mathcal{P} = -\lambda v^2$, sont pris en compte.

  Déterminer l'équation du mouvement portant sur $x(t)$, puis montrer que le mouvement est de type apériodique, sachant que $\lambda = 5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$ et $k = 4\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Donner les valeurs numériques de τ_1 et τ_2.
- ☐ Soit un système masse-ressort horizontal, fixé à gauche au point O et dont l'extrémité droite M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $x(t)$ représente l'abscisse du point M par rapport au point O. Les frottements, de puissance $\mathcal{P} = -\lambda v^2$, sont pris en compte.

  Déterminer l'équation du mouvement portant sur $x(t)$, puis montrer que le mouvement est de type pseudo-périodique, sachant que $\lambda = 40\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $m = 16\,\mathrm{kg}$ et $k = 169\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Donner les valeurs numériques de Ω et τ.

Exercices

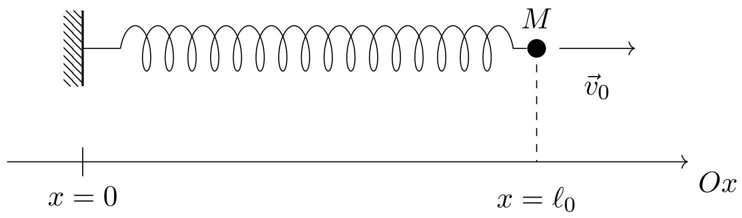
6.1 Résolution d'équations différentielles

Pour les équations suivantes, déterminer la forme des solutions en calculant Q (sans chercher les valeurs des constantes d'intégration), calculer ω et τ **ou** τ_1 et τ_2 selon les cas puis tracer qualitativement le graphe des solutions.

1. $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 5\omega\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega^2 y = 0$ avec $y(t=0) = y_0 > 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$;
2. $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{LC} = \dfrac{E}{LC}$ avec $u(t=0) = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t=0) = \dfrac{3E}{RC}$, $R = 30{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 20\,\mathrm{mH}$ et $C = 30\,\mathrm{nF}$;
3. $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + 7\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + 4f = 4$ avec $f(x=0) = 1$ et $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x=0) = 4$.

6.2 Système masse-ressort amorti avec vitesse initiale

On reprend le premier exemple du cours, en conservant les notations. On a $k = 12\,\mathrm{SI}$ et $m = 4{,}0\,\mathrm{kg}$.



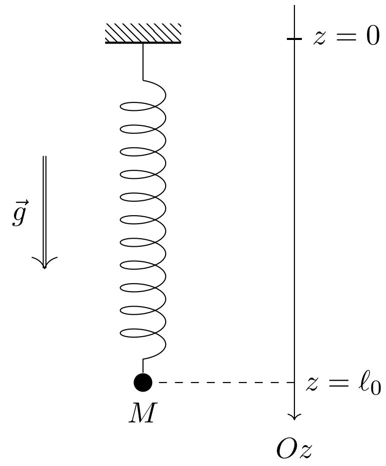
À $t = 0$, la longueur du ressort est sa longueur à vide ℓ_0. À ce même instant, on envoie la masse vers la droite : sa vitesse initiale est $v(t = 0) = v_0 > 0$.

On considère que la masse est soumise à des frottements de coefficient $\lambda = 1{,}5\,\mathrm{SI}$.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement. Calculer le facteur de qualité Q. Se situe-t-on en régime apériodique ou pseudo-périodique ?
2. Résoudre l'équation différentielle précédente en fonction de deux paramètres A et B que l'on ne déterminera pas encore. On posera des grandeurs ω, τ, etc. si nécessaire.
3. Quelles sont les valeurs de $x(t = 0)$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t = 0)$? En déduire les valeurs de A et de B, et déterminer alors l'expression de $x(t)$.
4. Déterminer une valeur de λ pour laquelle on changerait de régime.

6.3 Dynamique du système masse-ressort vertical

Le système masse-ressort est maintenant vertical, ce qui nous permet de prendre en compte le rôle du poids.



À $t = 0$, la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide ℓ_0. On lâche, sans vitesse initiale, le point M à ce même instant ; la masse tombera alors par action de la gravité, tout en étant rappelée par la force du ressort.

On a $m = 500\,\mathrm{g}$, $k = 30\,\mathrm{SI}$ et un coefficient de frottements $\lambda = 10\,\mathrm{SI}$.

1. Déterminer l'équation du mouvement. Calculer Q. Dans quel régime se situe-t-on ?
2. Résoudre l'équation différentielle portant précédente en fonction de deux paramètres A et B que l'on ne déterminera pas encore.
3. Déterminer, à l'aide des conditions initiales, les valeurs de A et de B. En déduire l'expression de $z(t)$ en fonction des données de l'énoncé.

6.4 Taux d'amortissement

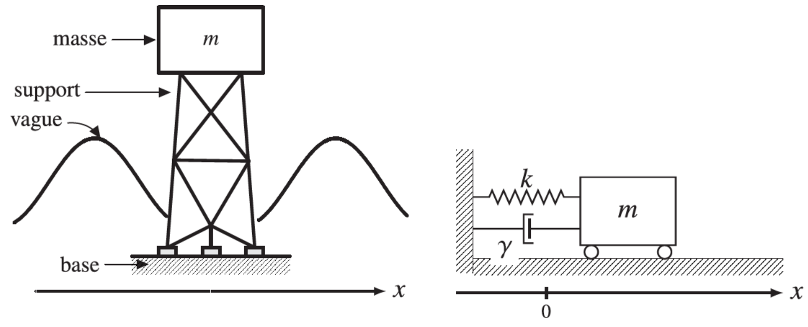
Dans certains domaines de physique appliquée, on n'utilise pas la notion de facteur de qualité Q mais celle de taux d'amortissement ξ. L'équation canonique de l'oscillateur amorti est alors du type : $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$.

1. Donner le lien entre ξ et Q, par une analogie entre les deux équations canoniques.
2. Pour quelles valeurs de ξ est-on en régime pseudo-périodique ? En régime apériodique ?
3. Si $\xi = 0$, que peut-on dire ? Justifier le terme de « taux d'amortissement » pour ξ.

Problème

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110\,\text{tonnes}$ est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (voir figure (a)).

Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m, liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ, et se déplaçant sur un support (figure (b)). Le ressort représente l'ensemble de la rigidité de l'ensemble du support de la plateforme. L'amortisseur permet de prendre compte l'effet de l'eau environnante. La masse est supposée se déplacer selon une seule direction parallèle à l'axe Ox en fonction du temps t.



(a) (b)

Les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$.

1. Justifier que l'on peut ne pas prendre en compte l'énergie potentielle de pesanteur dans l'étude du mouvement de la plateforme.
2. La puissance de frottements peut s'écrire $\mathcal{P}_d = -\gamma v^2$. Montrer que la position de la masse en fonction du temps suit l'équation du mouvement ci-après :
$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
avec ω_0 et ξ à exprimer en fonction de γ, k et m.
3. Dans le cas où $\xi < 1$, $x(t)$ prend la forme suivante :
$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(A_d \cos(\omega_d t) + B_d \sin(\omega_d t)\right)$$
Déterminer les deux coefficients réels A_d et B_d en fonction de $x_0 \triangleq x(t=0)$, $\dot{x}_0 \triangleq \dot{x}(t=0)$, ξ, ω_0 et $\omega_d = \omega_0 \times \sqrt{1-\xi^2}$.
4. Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t.
5. Pour $\xi = 0$, donner l'expression simple de l'énergie mécanique $E(t)$ de la plateforme. Commenter.
6. Montrer de façon simple que $E(t)$ est une fonction décroissante de t. À quoi cela est-il dû ?