Sciences physiques

ATS – Lycée Louis Armand

Thème 1 : Énergie d'un système mécanique

Cours

Figure 1 – Le commandant de la mission Apollo 15, Dave Scott, montre que la masse d'un objet n'a pas d'influence sur le temps que va prendre sa chute, utilisant un marteau et une plume sur la Lune.

1

1. « Well in my left hand I have a feather, in my right hand a hammer. And I guess one of the reasons we got here today was because of a gentleman named Galileo a long time ago, who made a rather significant discovery about falling objects in gravity fields. And we thought : where would be a better place to confirm his findings than on the Moon ? »

Table des matières

Chapitre 1 : Mouvement rectiligne d'un point matériel

Objectifs :

— Citer des exemples de systèmes pouvant se ramener à l'étude de leur centre de masse.

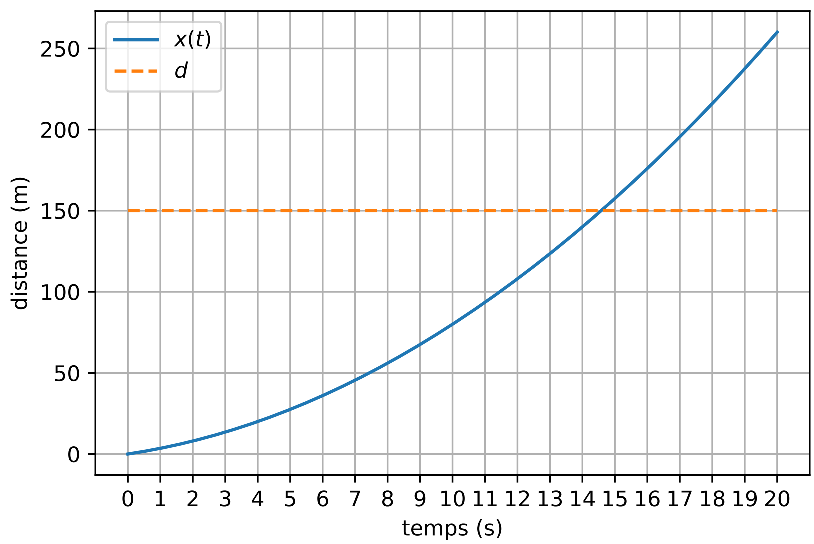
— Citer quelques exemples d'expériences où les référentiels d'étude peuvent être considérés comme galiléens.

— Définir la vitesse et l'énergie cinétique d'un point matériel.

Au concours ATS : Tous les ans, dans les problèmes de mécanique (savoir relier la position à la vitesse).

PROBLÉMATIQUE

Une voiture, initialement au point O d'abscisse nulle, se déplace sur une route horizontale. L'abscisse $x(t)$ du centre de gravité de la voiture est égale à $x(t) = 0{,}5 \times t^2 + 3t$ avec $x(t)$ en mètre et t en seconde.



Quelle sera sa vitesse à la sortie de la route, située à une distance $d = 150\,\mathrm{m}$ du point O ?

1.1 Description et paramétrage du mouvement d'un point en coordonnées cartésiennes

1.1.1 Mouvement, référentiel et repère

La mécanique est l'étude des systèmes matériels en mouvement. La mécanique classique, ou newtonienne, est valable tant que la vitesse des systèmes étudiés est très inférieure à celle de la lumière dans le vide (domaine non-relativiste) et tant que la taille des systèmes étudiés est très supérieure à celle d'un atome (domaine non-quantique).

La cinématique est l'étude descriptive des mouvements, indépendamment de leurs causes (forces, moments ou couples).

Le mouvement absolu n'existe pas : un objet est toujours en mouvement par rapport à quelque chose. Pour pouvoir étudier le mouvement d'un système, il est donc nécessaire de définir un référentiel, qui constitue le solide par rapport auquel on observe le mouvement dudit système.

Un référentiel est constitué d'un repère spatial (trois axes orthogonaux pour chaque direction de l'espace) et d'un repère temporel (un chronomètre).

Selon le mouvement du système étudié, différents types de coordonnées peuvent être utilisés, le but étant de simplifier les calculs. Chaque système de coordonnées utilise un jeu de trois coordonnées, reflétant le fait que l'espace dans lequel nous vivons est en trois dimensions.

1.1.2 Les coordonnées cartésiennes

Modèle du point matériel

Un **point matériel** est un objet physique pouvant être assimilé à un point mathématique, c'est-à-dire dont la position est entièrement repérée par trois coordonnées. C'est le cas notamment si ses dimensions sont négligeables à l'échelle d'observation, et si son orientation n'intervient pas.
Le mouvement d'un solide en translation (contrairement à celui d'un solide en rotation) peut s'étudier comme celui d'un point matériel.

Coordonnées cartésiennes

Les trois **coordonnées cartésiennes** d'un point M dans un repère orthonormé [a] $(Oxyz)$ choisi sont rigoureusement notées x_M, y_M et z_M :

- x_M est l'abscisse du point M ($x_M \in]-\infty; +\infty[$) ;
- y_M est l'ordonnée du point M ($y_M \in]-\infty; +\infty[$) ;
- z_M est la cote du point M ($z_M \in]-\infty; +\infty[$).

a. Les trois directions sont orthogonales les unes aux autres, et le vecteur directeur $\vec{e}_j$ de l'axe (Oj) a une norme égale à 1 ($j = x, y, z$).

☛ *Remarque :* Dans la pratique, on confond souvent x, relatif à l'axe (Ox), avec x_M, afin d'alléger les notations (même chose pour y et z). Cependant, si l'on étudie les mouvements de deux points M et P, on reviendra aux notations x_M et x_P pour éviter toute confusion.

☛ *Remarque :* Le repère $(Oxyz)$ est mieux qu'orthonormé : il est orthonormé direct. Ainsi, les sens des trois axes ne sont pas pris au hasard ; en particulier, (Oz) se détermine à partir de (Ox) et (Oy) à partir de la règle de la main droite.

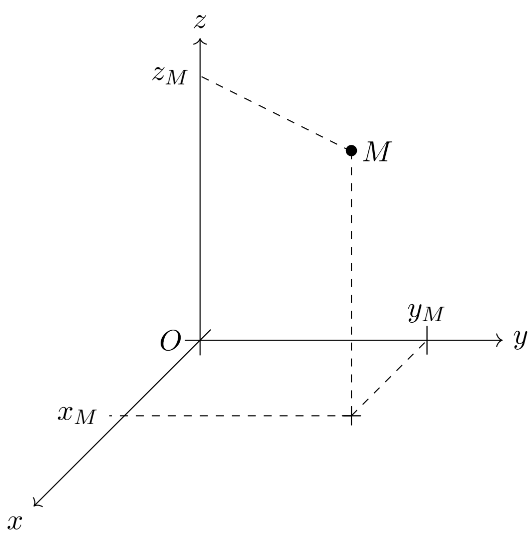


FIGURE 1.1 – Description de la position d'un point en coordonnées cartésiennes

1.2 Vitesse d'un point matériel

1.2.1 Vitesse moyenne

Supposons qu'une pierre de curling glisse sur de la glace du point A jusqu'à atteindre sa cible B. On modélise la pierre par un point matériel M représentant son centre de masse. Le point M se déplace au cours du temps selon l'axe horizontal (Ox) : on repère donc sa position par son abscisse $x(t)$.

Une chronophotographie représentant la position du point M est donnée ci-dessous (figure 1.2). L'intervalle de temps entre deux photographies est $\Delta t = 0{,}70\,\mathrm{s}$; un centimètre sur le schéma représente un mètre en réalité.

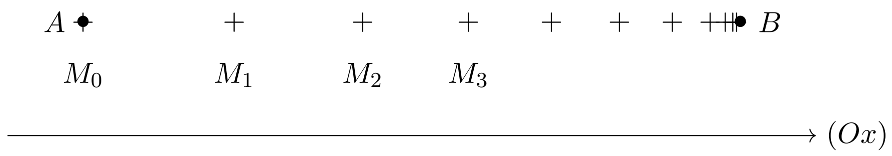


FIGURE 1.2 – Mouvement d'une pierre de curling.

Vitesse moyenne d'un point matériel

Soit un point matériel M se déplaçant d'une distance d (en mètre m) durant une durée Δt (en seconde s). On définit la **vitesse moyenne** $\langle v(M) \rangle$ du point M comme :

$$\langle v_M \rangle = \frac{d}{\Delta t}$$

Si le déplacement du point M se fait rectilignement selon un axe (Ox), et que l'on repère la position du point M par son abscisse $x_M(t)$, la vitesse moyenne du point M entre les instants t_1 et t_2 est alors :

$$\langle v_M(t_1 \to t_2) \rangle = \frac{x_M(t_2) - x_M(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta_{1\to 2}\, x_M}{\Delta_{1\to 2}\, t}$$

L'unité de la vitesse moyenne est donc le mètre par seconde $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Question 1 : Mesurer la vitesse moyenne entre les points M_0 et M_3 ; entre les points M_0 et M_2 ; entre les points M_0 et M_1.

Question 2 : Quel est l'inconvénient de la vitesse moyenne lorsque l'on étudie le mouvement d'un point matériel ?

1.2.2 Rappels sur la dérivée d'une fonction, écriture de Leibniz

La dérivée d'une fonction f en un point a est définie à partir de la limite du taux d'accroissement :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

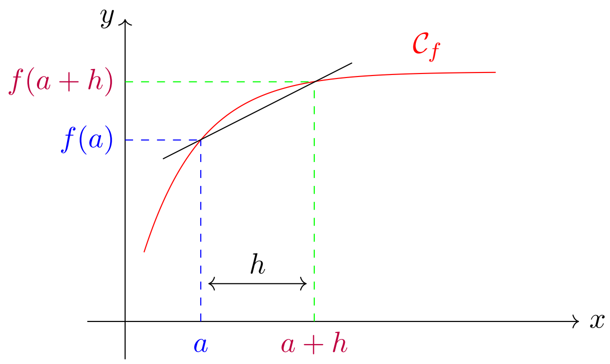


Figure 1.3 – Taux d'accroissement et pente.

Sur la figure 1.3, on aperçoit que le taux d'accroissement, pour $h > 0$, correspond en fait au coefficient directeur de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$. Lorsque h tend vers 0, cette droite devient tangente à $\mathcal{C}_f$ en passant par le point $(a, f(a))$. C'est ainsi qu'on peut déterminer à partir de la dérivée si une fonction est croissante ou décroissante : le signe de la pente (positif ou négatif) indique l'évolution de f.

La notation $\mathrm{d}x$, en physique, signifie *variation infinitésimale*[1] *de* x. Si h est suffisamment petit (c'est-à-dire infinitésimal), on peut ainsi le noter $\mathrm{d}x$: il s'agit d'une très petite variation sur l'axe horizontale des x. De même, on peut donc remplacer $f(a+h) - f(a)$ par $\mathrm{d}f$: c'est une très petite variation sur l'axe horizontale des y.

Ainsi, la notation $f'(a)$ peut se remplacer, en physique, par la notation : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. On appelle l'écriture $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ la notation de Leibniz, en "opposition" à l'écriture $f'(a)$, qui est la notation de Lagrange.

Il faut alors bien comprendre que cette dérivée, en physique-chimie[2], correspond bien à un quotient entre une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ et la variation infinitésimale $\mathrm{d}f$ de la fonction f associée.

1. Relatif aux quantités infiniment petites ; infiniment petit.
2. Et uniquement ici : la théorie est en fait bien plus compliquée, et votre professeure de mathématiques vous taperait sur les doigts si vous lui expliquiez ça dans son cours !

1.2.3 Vitesse instantanée

Vitesse instantanée d'un point matériel

Soit un point M se déplaçant de manière rectiligne selon un axe (Ox) ; on repère la position du point M par son abscisse $x_M(t)$. La **vitesse instantanée** du point M à l'instant t est :

$$v_M(t) = \frac{\mathrm{d}x_M}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{x}_M(t)$$

L'unité de la vitesse instantanée est le mètre par seconde $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Question 3 : Si $x_M(t) = x_0 + v_0 t$, où x_0 et v_0 sont des constantes, que vaut $v_M(t)$?

Question 4 : Si $x_M(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, où x_0, v_0 et g sont des constantes, que vaut $v_M(t)$?

Question 5 : Si $x_M(t) = x_0 \times e^{-\alpha t}$, où x_0 et α sont des constantes, que vaut $v_M(t)$?

1.2.4 Énergie cinétique d'un point matériel

Énergie

En physique, on peut définir l'**énergie** d'un système comme une quantité extensive [a] et se conservant au cours du temps si aucune action ne s'exerce sur ce système.

a. C'est-à-dire qui augmente avec la taille du système

Énergie cinétique d'un point matériel

L'**énergie cinétique** $\mathcal{E}_c$ d'un point matériel M de masse m (en kilogramme kg) et de vitesse instantanée v_M (en mètre par seconde $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) correspond à l'énergie que possède ce point grâce à son mouvement :

$$\mathcal{E}_c(M) = \frac{1}{2} m v_M^2$$

Dans le système international, l'énergie cinétique s'exprime en joule J.

Question 6 : Exprimer le joule selon les unités de base du Système International.

Question 7 : Deux trottinettes électriques, l'une de masse $m_1 = 15\,\mathrm{kg}$ lancée à la vitesse $v_1 = 10\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, l'autre de masse $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$ lancée à la vitesse $v_2 = 20\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, entrent en collision avec un mur. Laquelle des trottinettes apporte le plus d'énergie au mur lors de l'impact ?

Question 8 : Une tortue des Galapagos, de masse $m_1 = 220\,\mathrm{kg}$ et de vitesse $v_1 = 300\,\mathrm{m \cdot h^{-1}}$, et une fourmi, de masse $m_2 = 5{,}0\,\mathrm{mg}$ et de vitesse $v_2 = 10\,\mathrm{cm \cdot s^{-1}}$, entrent en collision avec un arbre. Lequel des deux animaux apporte le plus d'énergie à l'arbre lors de l'impact ?

1.3 Principe d'inertie

Afin de décrire un mouvement, il est nécessaire d'avoir deux références :

— Une référence spatiale, car il n'y a pas de mouvement absolu : on bouge toujours par rapport à quelque chose. Par exemple, le train avance par rapport au quai, qui recule par rapport au train. Le voyageur à son bord ne bouge en revanche pas par rapport au train ;

— Une référence temporelle, car il faut comparer les positions relatives entre deux instants au cours du mouvement.

On utilise, le plus souvent, trois référentiels usuels :

— Le référentiel terrestre, parfois appelé référentiel du laboratoire, lié à la surface de la Terre. C'est le référentiel dont on se fait l'idée intuitivement lors d'un mouvement observable à nos yeux ;

— Le référentiel géocentrique, ayant le centre de la Terre pour point fixe et des axes dirigés vers trois étoiles lointaines. Il est adapté pour étudier les mouvements de corps autour de la Terre (Lune, satellites...) ;

— Le référentiel héliocentrique, ayant le centre du Soleil pour point fixe et des axes dirigés vers trois étoiles lointaines. Il est adapté pour étudier les mouvements des astres autour du Soleil (planètes) ou du système solaire.

Principe d'inertie (ou première loi de Newton)

Soit un point matériel isolé ou pseudo-isolé [a]. Il existe une classe de référentiels, appelés **référentiels galiléens**, dans lesquels ce point a un mouvement rectiligne uniforme.

a. Un corps est isolé s'il n'est soumis à aucune force, et pseudo-isolé si les forces qu'il subit se compensent. Le premier cas est impossible physiquement, et le deuxième approchable, comme nous le verrons dans les exercices.

☛ *Remarque :* Cela signifie tout simplement que dans un certain référentiel, un objet continue en ligne droite et sans accélérer ou ralentir si la résultante des forces s'appliquant sur celui-ci est nulle.

Mouvement relatif de deux référentiels galiléens

Si on considère deux référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, tout point matériel animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_1$ sera également en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}_2$.
En d'autres termes, si un référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen, alors tout référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ sera galiléen.

Question 9 : Le référentiel terrestre est-il en translation rectiligne uniforme avec un quelconque autre référentiel ? Quelle condition doit-on alors vérifier pour que le référentiel terrestre soit galiléen ?

Réponse à la problématique

Puisque l'abscisse de la voiture vaut $x(t) = 0{,}5 \times t^2 + 3t$, on en déduit que sa vitesse est :

$$v(t) =$$

Or la voiture est à la position $d = 150\,\mathrm{m}$ à l'instant $t_{\text{fin}} =$ s. Sa vitesse y vaut alors :

$$v_{\text{fin}} = \qquad \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Outils mathématiques

Dérivées usuelles (la variable est ici t ; k et n sont des constantes) :

Fonction	Dérivée
k	0
kt	k
kt^2	$2kt$
kt^n	nkt^{n-1}
$\cos(kt)$	$-k\sin(kt)$
$\sin(kt)$	$k\cos(kt)$
e^{kt}	ke^{kt}

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ À quelle(s) condition(s) un système matériel peut-il se ramener à l'étude de son centre de masse ?
- ☐ Soit $x(t) = a \times t^2 + b \times e^{-t/\tau} - c \times \cos(\omega t)$ l'équation horaire d'un point matériel se déplaçant rectilignement ; déterminer la vitesse $v(t)$ de ce point matériel.
- ☐ Donner la dimension d'une énergie. Quelle est son unité dans le système international ?
- ☐ Soit un point matériel de masse $m = 5{,}0\,\mathrm{tonnes}$ et de vitesse $v = 36\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$; déterminer son énergie cinétique sans calculatrice.
- ☐ Soit un point matériel de vitesse $v = 40\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ et d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = 160\,\mathrm{MJ}$; déterminer sa masse sans calculatrice.
- ☐ Soit un point matériel de masse $m = 200\,\mathrm{g}$ et d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = 1{,}0\,\mathrm{kJ}$; déterminer sa vitesse sans calculatrice.
- ☐ Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ? Donner trois référentiels usuels. À quelle(s) condition(s) ces référentiels sont-ils galiléens ?

Chapitre 2 : Équilibre mécanique d'un système matériel

Objectifs :

— Citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur associée à un champ uniforme et de l'énergie potentielle élastique associée à un ressort.

— Identifier sur le graphe de l'énergie potentielle les éventuelles positions d'équilibre stable et instable.

— Distinguer une énergie cinétique d'une énergie potentielle.

Au concours ATS : Tombe régulièrement aux oraux.

PROBLÉMATIQUE

Alice, 10 ans, a reçu pour Noël un bâton sauteur (ou *pogo stick*, en anglais). La notice donne les informations suivantes :

« *Le bâton sauteur **Pogo™** a une hauteur totale de* $1{,}50\,\mathrm{m}$. *Le ressort est fixé par son extrémité haute à* $40\,\mathrm{cm}$ *des mains de l'utilisatrice ou de l'utilisateur ; sans présence d'une utilisatrice ou d'un utilisateur, sa longueur est de* $60\,\mathrm{cm}$. *L'utilisatrice ou l'utilisateur doit peser moins de* $50\,\mathrm{kg}$ *afin de ne pas toucher le sol lorsqu'elle ou il est à l'équilibre sur le bâton sauteur **Pogo™**.* »

Alice fait $35\,\mathrm{kg}$. Quelle est la longueur du ressort lorsqu'elle se tient dessus, à l'équilibre ?

2.1 Énergie potentielle d'un système matériel

Énergie potentielle

L'**énergie potentielle** d'un système correspond à l'énergie associée à l'interaction entre sous-parties de ce système ou entre ce système et son environnement.
Le terme « potentielle » provient du fait que cette énergie peut être convertie sous une autre forme, cinétique par exemple, au cours de l'évolution du système.

Remarque : Les énergies potentielles que nous allons étudier sont toujours associées à des actions mécaniques (c'est-à-dire des forces). Si une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ est associée à une force $\overrightarrow{F}$, on dira alors que $\overrightarrow{F}$ dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$.

Remarque : Toutes les forces ne dérivent pas forcément d'une énergie potentielle. On verra plus tard dans l'année que, par exemple, les frottements n'ont pas d'énergie potentielle associée à leur action. On dira alors que les frottements représente une force non conservative ; au contraire, si on peut associer une énergie potentielle à une force, on dira que cette dernière est conservative.

2.1.1 Énergie potentielle de pesanteur

Énergie potentielle de pesanteur

L'**énergie potentielle de pesanteur** est celle associée au poids d'un corps M de masse m. Notons O le centre du repère et z l'altitude du point M.
Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le haut, on a :

$$\mathcal{E}_{p,\text{pes}} = mgz + \text{cste}$$

Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le bas, on a :

$$\mathcal{E}_{p,\text{pes}} = -mgz + \text{cste}$$

où $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ est l'intensité de la pesanteur.

☛ *Remarque :* Les énergies potentielles sont toutes définies à une constante additive près dont la valeur ne nous intéresse généralement pas. En effet, nous verrons dans le chapitre suivant que seules les variations d'énergie potentielle sont pertinentes, car elles retranscrivent une variation d'énergie cinétique, par exemple.

Question 1 : Montrer que l'énergie potentielle de pesanteur est bien homogène à une énergie.

Question 2 : Calculer, en utilisant chacune des deux formules, l'ordre de grandeur de variation de l'énergie potentielle d'un alpiniste allant de la mer jusqu'au au sommet du Mont Blanc (dénivelé d'environ $4800\,\mathrm{m}$). On fera un schéma pour chacun des deux cas.

Question 3 : Supposons que l'axe (O, z) soit ascendant. Comment évolue l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de l'altitude z ? Est-ce cohérent ?

2.1.2 Énergie potentielle élastique

Caractéristiques d'un ressort élastique

Un **ressort élastique** est caractérisé par deux grandeurs physiques :
- Sa longueur à vide ℓ_0, qui correspond à la longueur du ressort si aucune action extérieur n'est appliquée sur celui-ci ;
- Sa (constante de) raideur k (en newton par mètre $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$), qui correspond à la difficulté pour compresser ou détendre le ressort (c'est la force nécessaire pour compresser ou détendre le ressort d'un mètre).

Énergie potentielle élastique

L'**énergie potentielle élastique** est celle associée à la force de rappel d'un ressort sur un point M.
Si l'on note ℓ la longueur du ressort, ℓ_0 sa longueur à vide et k sa constante de raideur, on a :

$$\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cste}$$

☛ *Remarque :* ℓ représente bien la longueur totale du ressort, et non la position de son extrémité ! De même, ℓ_0 est une longueur à vide systématiquement donnée dans l'énoncé (mais se notant parfois autrement que ℓ_0) ; en particulier, il arrive dans certains cas que $\ell_0 = 0$...

Question 4 : Soit un ressort de constante de raideur $k = 3\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$. Calculer son énergie potentielle élastique pour une longueur $\ell_1 = 5\,\mathrm{cm}$ et pour une longueur $\ell_2 = 15\,\mathrm{cm}$. Commenter.

Question 5 : Pour quelle longueur le ressort a-t-il le moins d'énergie potentielle ? Est-ce cohérent ?

2.1.3 Énergie potentielle totale

L'énergie potentielle totale d'un système matériel est égale à la somme de chacune des énergies potentielles citées précédemment. Il existe d'autres types d'énergie potentielle (électrostatique, magnétique, gravitationnelle...), qu'il faudrait rajouter si on prend en compte les actions correspondantes.

☛ *Remarque :* Si le système mécanique étudié est constitué de n ressorts, alors il y aura n énergies potentielles élastiques à prendre en compte !

2.2 Équilibre et stabilité

2.2.1 Exemple introductif

Prenons l'exemple d'un skieur se promenant le long d'une chaîne de montagnes. On suppose que son mouvement est unidirectionnel, selon l'axe (Ox). On représente en figure 2.1 sa trajectoire $z(x)$.

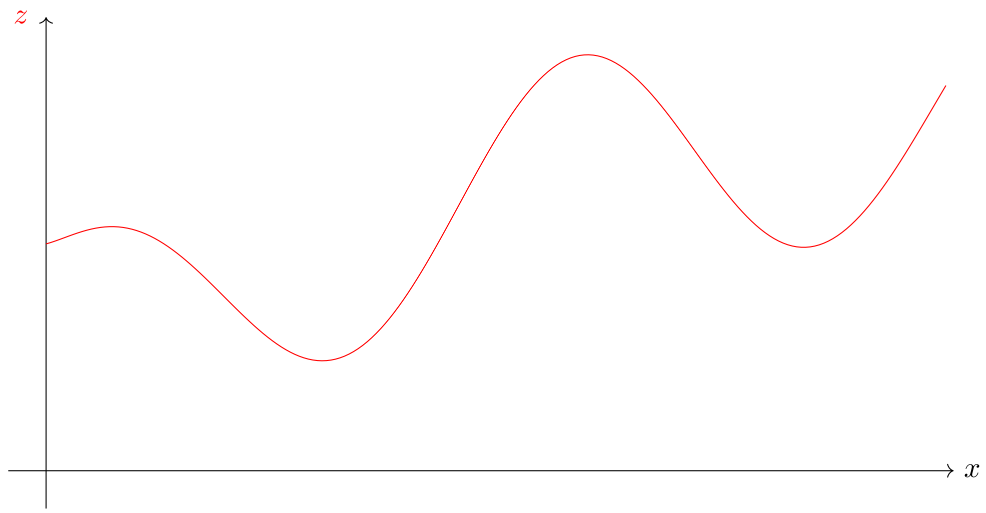


FIGURE 2.1 – Trajectoire du skieur.

Question 6 : Qualitativement, désigner sur la figure 2.1 les différentes positions où le skieur sera à l'équilibre.

Question 7 : Quelles positions d'équilibre peut-on qualifier de stables ? d'instables ?

Question 8 : Expliquer pourquoi la figure 2.1 représente, à un facteur près, l'évolution de l'énergie potentielle de pesanteur du skieur en fonction de sa position.

Positions d'équilibre

Un point M est **à l'équilibre** mécanique lorsque sa position est ne varie pas dans le temps. Dans le cas de forces uniquement conservatives et pour un mouvement unidirectionnel selon l'axe (Ox), un point M est à l'équilibre son énergie potentielle est extrémale (minimale ou maximale) par rapport à x. Ceci se repère par une pente nulle dans un graphe d'énergie potentielle.

☛ *Remarque :* La traduction de l'équilibre par l'approche de l'énergie potentielle n'est bien valable que pour des systèmes conservatifs ! Si l'on prend en compte des frottements (forces non-conservatives car inassociables à des énergies potentielles), un point matériel glissant sur une table horizontale s'arrêtera à une position d'équilibre qui ne dépend que de la vitesse initiale...

Stabilité d'un équilibre

Une position d'équilibre $x_{\text{éq}}$ d'un point matériel M est **stable** si, lorsque l'on déplace légèrement le point M, celui-ci revient naturellement vers $x_{\text{éq}}$. Graphiquement, l'énergie potentielle forme un minimum local.
Au contraire, cette position d'équilibre est **instable** si, lorsque l'on déplace légèrement le point M, celui-ci s'éloigne naturellement de $x_{\text{éq}}$. Graphiquement, l'énergie potentielle forme un maximum local.

2.2.2 Conséquences mathématiques

Soit une fonction $x \mapsto f(x)$, supposée dérivable.

Question 9 : On suppose que f est minimale (localement) en un point a. Que vaut la pente de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a ? Quelle est alors la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x=a)$?

Question 10 : Même question, en supposant que f est maximale en a.

On trace en figure 2.2 la fonction $g : x \mapsto x^3 - x$.

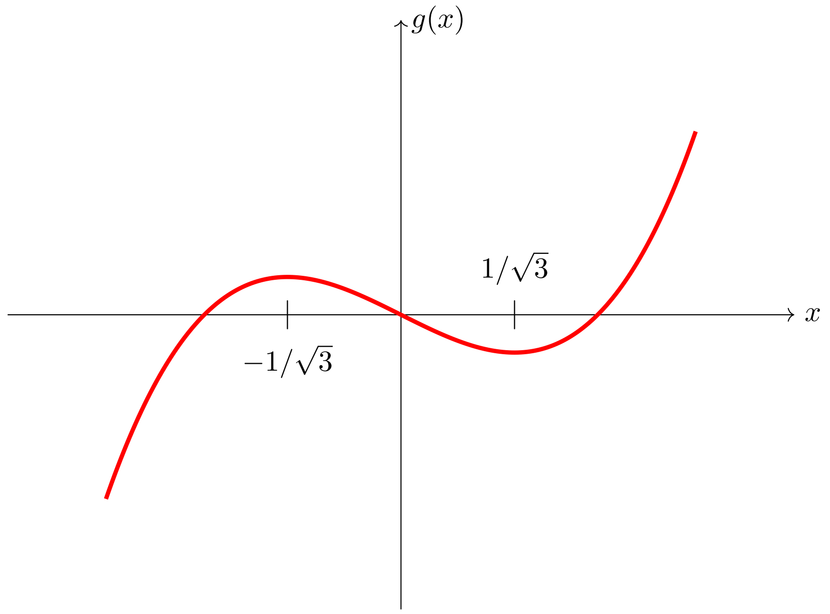


FIGURE 2.2 – Courbe représentative de la fonction g pour $x \in [-2, 2]$.

Question 11 : Vérifier par le calcul que $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x = 1/\sqrt{3}) = 0$ et que $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x = -1/\sqrt{3}) = 0$.

Question 12 : Calculer $\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x = 1/\sqrt{3})$ et $\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x = -1/\sqrt{3})$. Quel lien peut-on faire entre minimalité/maximalité et signe de la dérivée seconde ?

Détermination analytique de positions d'équilibre stables ou instables

Un système mécanique, décrit par la coordonnée spatiale x, est à l'équilibre au point $x_{\text{éq}}$ si la dérivée de son énergie potentielle totale y est nulle :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}(x = x_{\text{éq}}) = 0$$

De plus :

- Cet équilibre est stable si la dérivée seconde de l'énergie potentielle totale est positive :
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\left(x = x_{\text{éq}}^{\text{stable}}\right) > 0$$
- Cet équilibre est instable si la dérivée seconde de l'énergie potentielle totale est négative :
$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\left(x = x_{\text{éq}}^{\text{instable}}\right) < 0$$

<u>Réponse à la problématique</u>

Notons O l'extrémité haute du ressort, fixée, et z la position de l'extrémité basse du ressort. L'axe (O, z) est donc . L'énergie potentielle totale du système {Alice + ressort} est alors (on attend une expression littérale en fonction de m, g, z, k et ℓ_0) :

$$\mathcal{E}_p =$$

Sa dérivée par rapport à la position z est égale à :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z} =$$

À l'équilibre, cette dérivée est . On a donc (on attend une expression littérale en fonction de m, g, k et ℓ_0) :

$$z_{\text{éq}} =$$

La longueur à vide du ressort est $\ell_0 =$ m. Par ailleurs, on sait que pour une masse de $50\,\mathrm{kg}$ (et donc un poids de N), le ressort s'allonge de m ; on a donc $k =$ $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

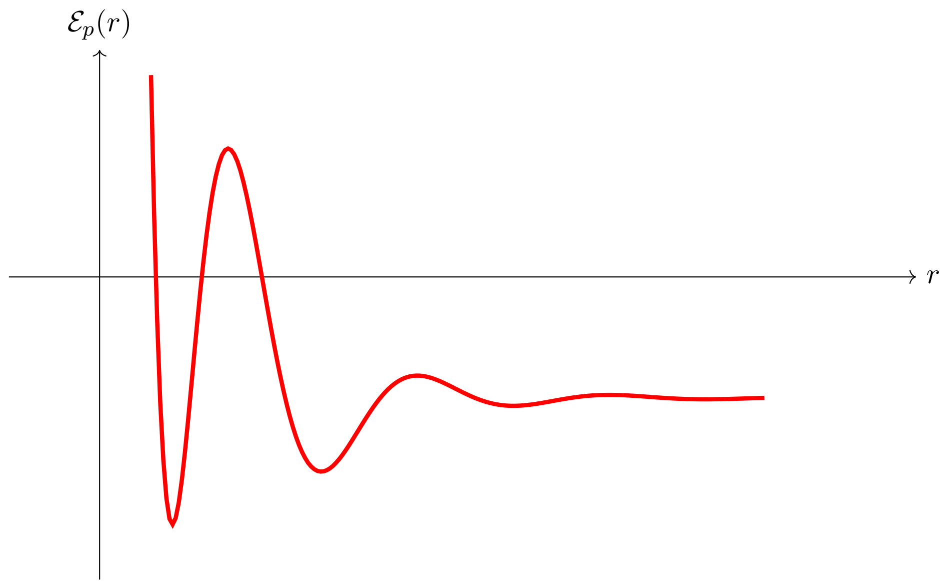
On en déduit finalement la valeur numérique de $z_{\text{éq}}$:

$$z_{\text{éq}} =$$

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,\text{pes}}$ dans le cas d'un axe vertical ascendant et dans le cas d'un axe vertical descendant. Interpréter le lien entre $\mathcal{E}_{p,\text{pes}}$ et m, ainsi que le lien entre $\mathcal{E}_{p,\text{pes}}$ et la cote z.
- ☐ Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,\text{él}}$ d'un ressort de raideur k, de longueur ℓ et de longueur à vide ℓ_0. Interpréter la présence de l'exposant présent dans cette expression.
- ☐ Expliquer pourquoi les énergies potentielles sont définies à une constante additive près.
- ☐ Définir l'équilibre d'un système matériel. Comment traduire mathématiquement cette définition, pour un système matériel conservatif ? Comment traduire graphiquement cette condition ?
- ☐ Définir ce qu'est un équilibre stable. Comment traduire mathématiquement cette définition, pour un système matériel conservatif ? Comment traduire graphiquement cette condition ?
- ☐ Définir ce qu'est un équilibre instable. Comment traduire mathématiquement cette définition, pour un système matériel conservatif ? Comment traduire graphiquement cette condition ?
- ☐ Déterminer, sur le graphe d'énergie potentielle ci-dessous, les positions d'équilibre ainsi que leurs stabilités.



Chapitre 3 : Conservation de l'énergie mécanique

Objectifs :

— Déduire d'un graphe d'énergie potentielle ou d'une expression d'une énergie mécanique une vitesse ou une position en des points particuliers.

— Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement borné ou non de la trajectoire.

— Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique.

— Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives.

Au concours ATS : Aux écrits en 2022. Tombe régulièrement aux oraux.

PROBLÉMATIQUE

Un professeur de physique maintient une balle de masse $m = 15\,\mathrm{kg}$; elle est attachée au plafond par une corde. Le professeur lâche alors la balle au niveau de sa mâchoire (hauteur $H = 1{,}70\,\mathrm{m}$ à partir du sol) sans vitesse initiale.

1. Que devient l'énergie de la balle au cours du temps ?
2. Comment justifier que la balle ne pourra pas se déplacer à une altitude plus haute que son altitude initiale ?
3. Pourquoi la balle s'arrête-t-elle quelques centimètres avant son point de départ, au lieu d'y revenir exactement ?

Étudions le mouvement d'une balle de masse $m = 3\,\mathrm{kg}$, modélisée par un point matériel M, dans le champ de pesanteur terrestre. On suppose qu'il n'y a pas de frottements. On note $z(t)$ l'altitude de la balle par rapport au sol à l'instant t. À l'instant initial $t = 0$, la balle se situe à l'altitude $z_0 = 20\,\mathrm{m}$; elle n'a alors pas de vitesse.

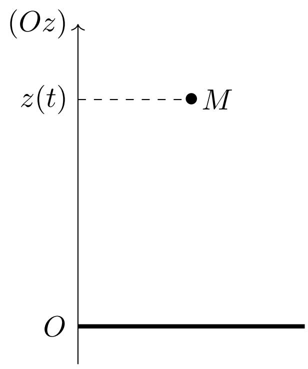


FIGURE 3.1 – Chute libre d'une balle.

3.1 Énergie mécanique

Énergie mécanique

L'**énergie mécanique** d'un point M est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

Question 1 : Que valent initialement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la balle ? En déduire la valeur initiale de son énergie mécanique.

Question 2 : Que valent l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la balle juste avant de toucher le sol (en notant v_f la vitesse finale de la balle) ? En déduire la valeur correspondante de l'énergie mécanique de la balle.

Conservation de l'énergie mécanique

Si un système n'est soumis qu'à des forces extérieures conservatives [a], alors son énergie mécanique est **conservée** au cours du temps :

$$\mathcal{E}_m = \text{cste}$$

a. C'est-à-dire à des forces auxquelles on peut associer une énergie potentielle.

☛ *Remarque :* Dans tous les problèmes de mécanique ne faisant pas intervenir de frottements, il faut penser le plus rapidement possible à utiliser la conservation de l'énergie, qui est une méthode très rapide et efficace pour déterminer les positions où la vitesse est nulle ou bien la vitesse à un point précis.

Question 3 : Quelles sont les forces extérieures s'appliquant sur la balle ? Sont-elles conservatives ?

Question 4 : En déduire que $\frac{1}{2}mv_f^2 = mgz_0$. Que vaut alors la vitesse de la balle juste avant de toucher le sol ?

Question 5 : Quel est le signe de l'énergie cinétique ? En déduire une inégalité entre l'énergie potentielle et l'énergie mécanique.

Positions accessibles

Les **positions accessibles** à un système matériel sont celles vérifiant $\mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_m$.

Question 6 : Quelles sont les positions accessibles à la balle ?

3.2 Équation du mouvement

Puissance

Soit un système recevant une énergie infinitésimale $\mathrm{d}\mathcal{E}$ pendant une durée $\mathrm{d}t$. On appelle **puissance** $\mathcal{P}$ la grandeur :

$$\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}$$

La puissance correspond donc au nombre de joules cédés ou reçus par unité de temps. Elle s'exprime en watt W dans le système international.

Question 7 : Déterminer la dimension d'une puissance.

Puissances de la réaction du support et de la tension d'un fil inextensible

La **réaction du support** (en l'absence de frottements solides) et la **tension d'un fil inextensible** sont des forces non-conservatives. Leurs puissances sont cependant nulles [a] :

$$\mathcal{P}_{\text{support}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_{\text{fil}} = 0$$

a. On admet pour l'instant ces deux propriétés pour chacune des forces.

♥ Théorème de la puissance mécanique

Soit un système matériel d'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et soumis à des forces non conservatives extérieures de puissance $\mathcal{P}_{\text{n.c.}}^{\text{ext}}$.
Le **théorème de la puissance mécanique** stipule alors que la puissance de ces forces non-conservatives modifie la valeur de l'énergie mécanique du système au cours du temps :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{n.c.}}^{\text{ext}}$$

Question 8 : Montrer que si toutes les forces extérieures sont conservatives ou à puissance nulle, alors l'énergie mécanique est conservée.

Comment appliquer le théorème de la puissance mécanique (TPM) ?

Pour appliquer le théorème de la puissance mécanique :

1. On trace le diagramme corps-interactions représentant le système d'étude au centre et les corps extérieurs à l'extérieur ; une double flèche entre chaque corps extérieur et le corps d'étude représente chacune des interactions ;
2. On effectue le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) s'appliquant au système d'étude : il doit y avoir une action mécanique par interaction ;
3. On exprime la puissance des forces extérieures non conservatives ;
4. On exprime l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction des données de l'énoncé, puis on en déduit l'énergie mécanique ;
5. On applique le TPM.

Question 9 : Tracer le diagramme corps-interactions du problème, et faire le bilan des actions mécaniques s'appliquant au système. En déduire l'expression $\mathcal{P}_{\text{n.c.}}^{\text{ext}}$.

Question 10 : Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de z, $\dot{z}$, m et g.

Question 11 : En déduire que l'on vérifie l'équation suivante : $m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z} = 0$. On utilisera notamment le fait que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(t)^2\right) = 2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \times u(t)$.

Question 12 : En déduire une expression de $\ddot{z}(t)$.

Équation du mouvement

On appelle **équation du mouvement** une équation différentielle portant sur les dérivées temporelles de la position. Elle peut notamment se déterminer à l'aide du théorème de la puissance mécanique (TPM).

☛ *Remarque :* Nous verrons plus tard dans l'année qu'il existe une deuxième loi pour déterminer l'équation du mouvement : il s'agit du principe fondamental de la dynamique (PFD), également appelé deuxième loi de Newton.

3.3 Équation horaire

Question 13 : Donner les primitives de $t \mapsto C_1$ et de $t \mapsto C_2 \times t$, où C_1 et C_2 sont des constantes.

Question 14 : En déduire l'expression de $\dot{z}(t)$, en utilisant le fait qu'initialement la vitesse de la balle est nulle.

Question 15 : En déduire alors l'expression de $z(t)$, en utilisant le fait qu'initialement l'altitude de la balle est z_0.

Équation horaire

On appelle **équation horaire** une équation explicite donnant l'expression des coordonnées du système d'étude en fonction du temps.

Question 16 : À quel instant t^* la balle touche-t-elle le sol ?

Question 17 : Quelle est la vitesse de la balle à l'instant t^* ? Commenter cette expression par rapport à celle déterminée précédemment.

Réponse à la problématique

1. Les interactions entre la balle et son environnement sont :
   -
   -

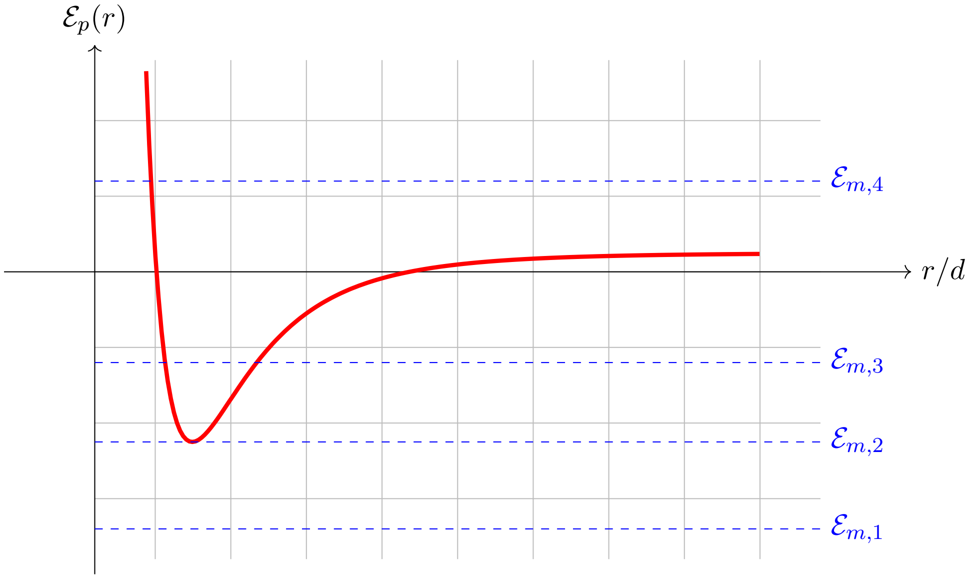
   Ces deux interactions sont conservatives, ce qui signifie que l'énergie mécanique est . Ainsi, si la balle descend, son énergie potentielle , et donc son énergie cinétique .
2. L'énergie mécanique peut s'évaluer grâce aux conditions initiales : $\mathcal{E}_m =$. Or l'énergie potentielle est toujours plus que l'énergie mécanique, donc l'altitude de la balle sera toujours plus que H.
3. Des perturbent le mouvement de la balle : on en déduit que l'énergie mécanique n'est pas , ce qui peut expliquer le fait que $z_{\text{final}} < z_{\text{initial}}$.

En plus du cours : une vidéo très intéressante de David Louapre (Science Étonnante) sur le lien entre conservation de l'énergie et record du saut à la perche !

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner la dimension d'une puissance. Quelle est son unité dans le système international ?
- ☐ Donner la définition de l'énergie mécanique d'un système. À quelle(s) condition(s) l'énergie mécanique d'un système est-elle conservée ?
- ☐ Soit un système mécanique dont le graphe de l'énergie potentielle en fontion de la position est donné ci-dessous, avec d une longueur caractéristique :



  Déterminer les positions accessibles au système mécanique selon la valeur de son énergie mécanique $\mathcal{E}_m$.
- ☐ Donner l'énoncé du théorème de la puissance mécanique (TPM).

- ☐ Qu'appelle-t-on équation du mouvement ? Et équation horaire ?
- ☐ On a $\ddot{x}(t) = 5 \times t^2 - 3$. Déterminer $x(t)$, sachant que $\dot{x}(t = 0) = 8$ et que $x(t = 0) = -2$.
- ☐ Soit un point matériel M de masse m repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une hauteur h avec une vitesse v_0 vers le bas. On néglige tout frottement. Déterminer sa vitesse v^* juste avant de toucher le sol à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique (à justifier).
- ☐ Soit un point matériel M de masse m repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une hauteur h avec une vitesse v_0 vers le bas. On néglige tout frottement. Déterminer l'équation horaire $z(t)$ de ce point à l'aide du théorème de la puissance mécanique.

Chapitre 4 : Frottements fluides

Objectifs :

— Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique.

— Énoncer le théorème liant l'énergie mécanique à la puissance des forces non conservatives.

— Étudier un système modélisé par une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Interpréter qualitativement le temps caractéristique.

Au concours ATS : Aux écrits en 2022, 2019, 2017, 2016. Tombe régulièrement aux oraux.

PROBLÉMATIQUE
Une expérience célèbre, réalisée sur la Lune, a montré qu'en l'absence d'atmosphère, une plume et une balle métallique touchent le sol au même instant. Sur Terre, on observe pourtant que la balle atteint le sol bien avant la plume.
Comment expliquer cette différence ?

Étudions le mouvement d'une balle de masse $m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$, modélisée par un point matériel M, dans le champ de pesanteur terrestre. On suppose que des frottements fluides s'exercent sur la balle. On note $z(t)$ l'altitude de la balle par rapport au sol à l'instant t. À l'instant initial $t = 0$, la balle se situe à l'altitude $z_0 = 0$.

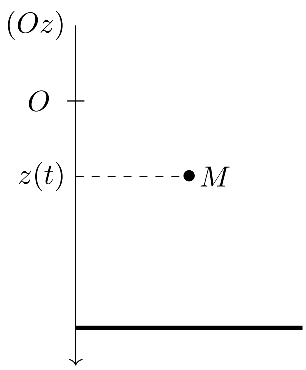


FIGURE 4.1 – Chute avec frottements d'une balle.

4.1 Équation du mouvement

Puissance des frottements fluides

Soit un système matériel de vitesse instantanée v. Les **frottements fluides** donnent à ce système une **puissance** :

$$\mathcal{P}_{\text{fluide}} = -\lambda v^2$$

où λ représente le coefficient de frottements. Le signe négatif représente le fait que la puissance « gagnée » par le système de la part des frottements est en fait bien cédée du système jusqu'à son environnement.

Question 1 : Déterminer la dimension de λ.

Question 2 : Exprimer l'énergie mécanique de la balle en fonction de m, g, z et $\dot{z}$. Exprimer également la puissance des frottements fluides en fonction du coefficient de frottements λ et de $\dot{z}$.

Question 3 : Appliquer le théorème de la puissance mécanique pour obtenir l'équation : $\ddot{z} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{z} = g$.

Forme canonique d'une équation différentielle d'ordre 1

On dit qu'une équation différentielle d'ordre 1 est mise sous forme canonique si on l'écrit sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau} \times X(t) = \frac{1}{\tau} \times X_{\text{éq}}$$

τ est appelée **constante de temps** ou **temps caractéristique** ; $X_{\text{éq}}$ représente la valeur de $X(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

Question 4 : On pose $v_z \triangleq \dot{z}$; ainsi, on a $\dot{v}_z + \dfrac{\lambda}{m} v_z = g$. Mettre cette équation différentielle sous forme canonique $\dot{v}_z + \dfrac{1}{\tau} v_z = \dfrac{1}{\tau} v_{\text{éq}}$, où les expressions de τ et $v_{\text{éq}}$ sont à déterminer.

Question 5 : Déterminer la dimension de τ.

4.2 Équation horaire

Solutions d'une équation différentielle d'ordre 1

Les solutions de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + \dfrac{1}{\tau} \times X(t) = \dfrac{1}{\tau} \times X_{\text{éq}}$ sont de la forme :

$$X(t) = X_{\text{éq}} + A \times e^{-t/\tau}$$

où A est une constante.

Question 6 : Vérifier que $t \mapsto X_{\text{éq}} + A \times e^{-t/\tau}$ obéit à l'équation différentielle $\dfrac{dX}{dt}(t) + \dfrac{1}{\tau} \times X(t) = \dfrac{1}{\tau} \times X_{\text{éq}}$, quelle que soit la valeur de A.

Il existe donc une infinité de solutions pour une équation différentielle d'ordre 1 : on peut effectivement écrire $X(t) = X_{\text{éq}} + A \times e^{-t/\tau}$ avec une infinité de choix pour la valeur de A... ce qui n'est pas le cas en réalité ! Par exemple, si l'on lâche la balle à vitesse initiale nulle, on sait bien que la vitesse de celle-ci va augmenter au cours du temps, et donc que $A > 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de répondre à ce problème (et de montrer que la physique est déterministe).

Théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle d'ordre 1 : *Une équation différentielle d'ordre 1 à laquelle on impose la condition :*

$$X(t = 0) = X_0$$

ne possède qu'une unique solution.

Une telle condition est appelée **condition initiale**. En d'autres termes, si à l'instant initial $t = 0$ on connaît une caractéristique du système (sa vitesse initiale si l'équation différentielle porte sur la vitesse, sa position initiale si l'équation différentielle porte sur la position...), alors il n'existe qu'une seule solution vérifiant l'équation différentielle $\dfrac{dX}{dt}(t) + \dfrac{1}{\tau} \times X(t) = \dfrac{1}{\tau} \times X_{\text{éq}}$ et la condition initiale... ce qui est rassurant !

Question 7 : Montrer que $v_z(t) = A \times e^{-t/\tau} + \dfrac{mg}{\lambda}$, où A est une constante. La déterminer à l'aide des conditions initiales.

Question 8 : En déduire l'expression explicite de $v_z(t)$.

4.3 Régime transitoire, régime permanent

Visualisons l'allure de la vitesse $v_z(t)$ au cours du temps sur la figure 4.2.

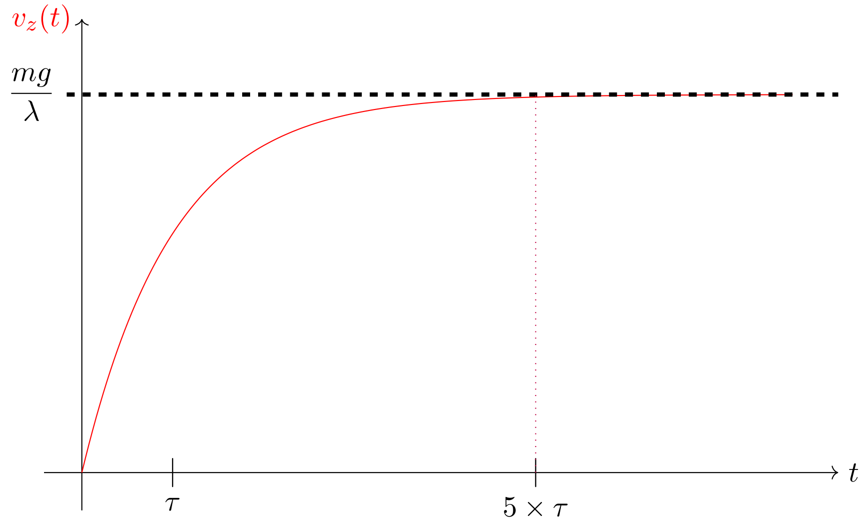


FIGURE 4.2 – Vitesse de la balle au cours du temps.

On aperçoit, sur la figure 4.2, que deux phases ont lieu pour l'évolution de la vitesse. Tout d'abord, celle-ci augmente, puis elle stagne jusqu'à une valeur limite.

Régime transitoire et régime permanent

La dynamique d'un système dépend, pour des problèmes linéaires, uniquement des caractéristiques internes du système et de l'excitation extérieure agissant sur lui.
Le **régime permanent** du système correspond à la phase où la dynamique de ce système « ressemble » à l'excitation l'ayant mis en action (par exemple : vitesse constante si la force appliquée est constante, tension sinusoïdale si celle du générateur est sinusoïdale).
Le **régime transitoire** correspond alors à la phase où le système passe de son état initial jusqu'à son état permanent.

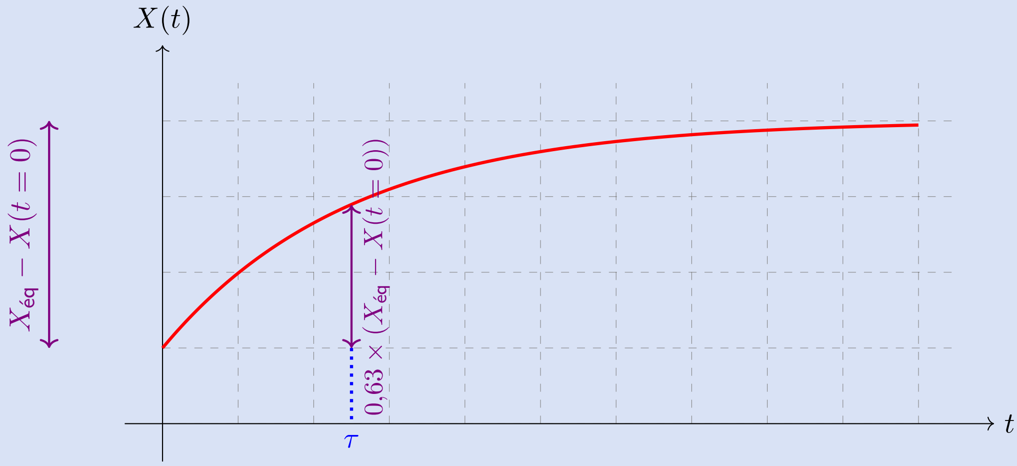
Question 9 : En régime permanent, la vitesse dépend-elle du temps ? Que devient alors l'équation du mouvement ? Commenter.

Question 10 : Que vaut $1 - e^{-t/\tau}$ lorsque $t = \tau$? En déduire une technique pour déterminer la valeur numérique de τ.

Détermination de la valeur numérique de τ par la méthode des $63\,\%$

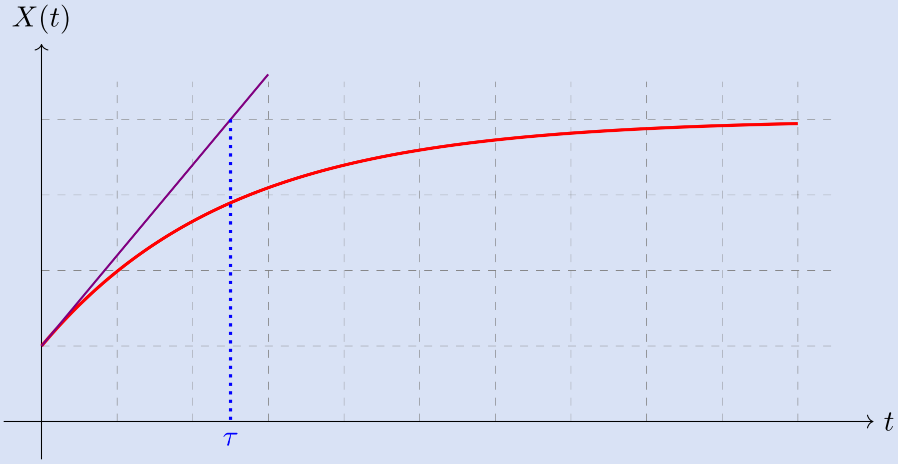
Si $X(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et de constante de temps τ, on peut déterminer celle-ci par :

$$X(t=\tau) - X(t=0) = 0{,}63 \times (X_{\text{éq}} - X(t=0))$$



Détermination de la valeur numérique de τ par la méthode de la pente à l'origine

Si $X(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et de constante de temps τ, on peut déterminer celle-ci en cherchant où la tangente à l'origine coupe la droite horizontale $X_{\text{éq}}$.



Question 11 : Que vaut $1 - e^{-t/\tau}$ lorsque $t = 5 \times \tau$? En déduire que l'on a alors atteint à plus de 99% le régime permanent.

Interprétation qualitative de la constante de temps

On estime généralement que le régime permanent est atteint au bout de $5 \times \tau$. τ représente donc, en ordre de grandeur, une durée nécessaire pour passer du régime transitoire au régime permanent.

Réponse à la problématique

On a $v_z(t) = g\tau \times \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $\tau = m/\lambda$; on en déduit que la vitesse limite est $v_{\text{lim}} =$, et qu'on atteint cette vitesse avec une durée $\Delta t =$.

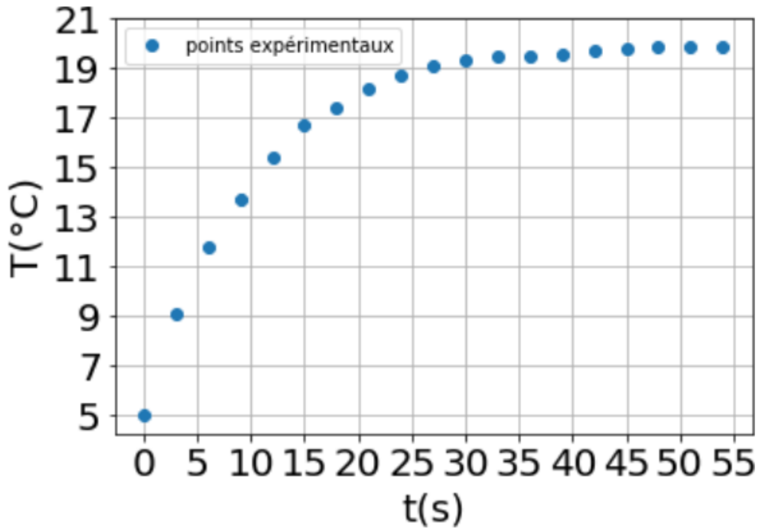
Ainsi, plus la masse de l'objet augmente, plus v_{lim} et plus Δt .

Ainsi, la plume atteint très rapidement son régime , mais aura alors une vitesse bien plus faible que le boulet, qui touchera donc le sol plus rapidement.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Donner la dimension du coefficient de frottement λ (on rappelle que la puissance des forces de frottements est $\mathcal{P}_f = -\lambda v^2$, avec v la vitesse du point matériel étudié). Quelle est son unité dans le système international ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}y(t) = \dfrac{1}{\tau}y_{\text{éq}}$. Que représentent physiquement $y_{\text{éq}}$ et τ ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $\tau \times \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + 2\theta(t) = 3\theta_0$. La résoudre, sachant que $\theta(t=0) = 5\theta_0$. Tracer l'allure de la solution.
- ☐ Soit un point matériel M repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une altitude h avec une vitesse initiale v_0 vers le bas. On prend en compte les frottements, de coefficient de frottements λ. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de ce point.
- ☐ Proposer, à l'aide de vos propres mots, des définitions pour « régime permanent » et « régime transitoire ».
- ☐ Soit la fonction $T(t) = T_f + (T_0 - T_f) \times e^{-t/\tau}$ tracée ci-dessous. Déterminer graphiquement T_0 et T_f. Mesurer également de deux manières différentes la valeur de τ.



Chapitre 5 : Oscillateur harmonique

Objectifs :

— Expliquer l'existence d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

— Prévoir l'amplitude des oscillations et la vitesse maximale.

— Identifier et utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique.

— Associer à un oscillateur harmonique la conservation de son énergie mécanique.

— Déduire d'un graphe d'énergie potentielle ou d'une expression d'une énergie mécanique une vitesse ou une position en des points particuliers.

— Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement borné ou non de la trajectoire.

Au concours ATS : Aux écrits en 2020. Tombe régulièrement aux oraux.

PROBLÉMATIQUE

En physique, il est incorrect de parler uniquement de « masse ». En effet, il existe deux types de masse :

- La masse inerte m_I, qui correspond au « m » dans l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$. Elle correspond physiquement à l'inertie du système étudié, c'est-à-dire sa capacité à se mettre facilement ou difficilement en mouvement ;
- La masse grave m_G, qui correspond au « m » dans l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p = mgz$. Elle correspond physiquement à la capacité du système à interagir avec un champ de pesanteur, et est facilement mesurable à l'aide d'une balance.

Ces deux grandeurs sont *a priori* différentes. On en déduit deux questions :

1. Comment mesurer la masse inerte m_I d'un objet ?
2. Comment expliquer le fait que l'on associe masse inerte et masse grave à une même grandeur m ?

On donne les informations suivantes :
« Lors du mouvement horizontal d'un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 1\,\mathrm{m}$ et de constante de raideur $k = 2\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, fixé à gauche et attaché à droite à une masse mobile $m_G = 300\,\mathrm{g}$, on observe un mouvement périodique de période $T_0 = 2{,}45\,\mathrm{s}$. »

5.1 Équation d'évolution d'un système masse-ressort

5.1.1 Description du problème

On considère, dans ce problème, un système composé d'un point matériel M, de masse m, relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Ce ressort possède une extrémité fixe liée au bâti (figure 5.1, haut).

On étudiera uniquement le mouvement horizontal du point M, en négligeant par exemple son poids ou bien en considérant que celui-ci se compense avec une éventuelle réaction du sol.

On décide de déplacer le point M vers la droite, à une distance L de sa position initiale : le ressort est en extension (figure 5.1, bas). On note $x(t)$ la position horizontale du point M à l'instant t, et on lâche le ressort à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale.

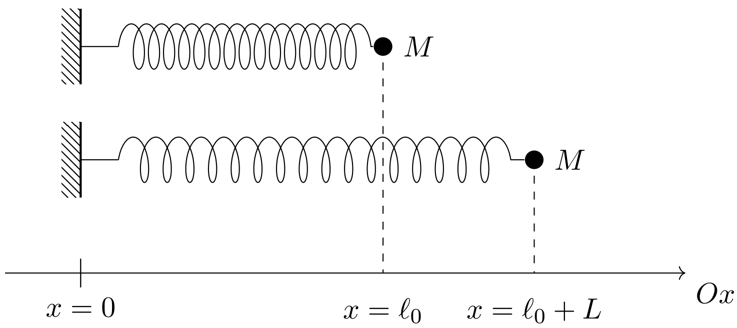


FIGURE 5.1 – Ressort au repos (haut) et tendu à $t = 0$ (bas).

Question 1 : Exprimer l'énergie potentielle du système masse-ressort en fonction notamment de $x(t)$. Tracer l'allure de $\mathcal{E}_p$ en fonction de x. Quelle est la position d'équilibre du système ? Est-elle stable ?

Question 2 : Pourquoi s'attend-on à des oscillations pour le mouvement du point M ?

5.1.2 Équation du mouvement

Question 3 : Exprimer l'énergie mécanique du système en fonction de x, $\dot{x}$, ℓ_0, k et m.

Question 4 : Quelles sont les forces extérieures s'appliquant sur le système masse-ressort ? Sont-elles conservatives ?

Question 5 : En déduire que l'on vérifie l'équation suivante : $m\dot{x}\ddot{x} + k(x - \ell_0)\dot{x} = 0$. On utilisera notamment le fait que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u(t)^2\right) = 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) \times u(t)$.

Question 6 : Mettre l'équation sous la forme : $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \times x(t) = \omega_0^2 \times x_{\text{éq}}$, où ω_0 et $x_{\text{éq}}$ sont à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

Équation d'un oscillateur harmonique

On dit que l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 \times X(t) = \omega_0^2 \times X_{\text{éq}}$ est celle d'un **oscillateur harmonique**.

ω_0 est appelée **pulsation propre** du système ; $X_{\text{éq}}$ est sa **position d'équilibre**.

Question 7 : Montrer que ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps.

5.2 Solution de l'équation d'un oscillateur harmonique

5.2.1 Solutions générales

On s'attend à ce que le système masse-ressort ait un mouvement oscillant ; par exemple, sous la forme d'une fonction (co-)sinusoïdale.

Question 8 : On cherche $x(t)$ sous la forme $x(t) = x_{\text{éq}} + A\cos(\Omega \times t)$, où A et Ω sont des constantes *a priori* inconnues. Calculer $\dot{x}(t)$ puis $\ddot{x}(t)$.

Question 9 : Quelle condition faut-il imposer sur Ω pour que l'on vérifie effectivement l'équation de l'oscillateur harmonique ?

Question 10 : Montrer qu'une solution de la forme $x(t) = x_{\text{éq}} + B\sin(\omega_0 \times t)$ convient également.

Solutions de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

Les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 \times X(t) = \omega_0^2 \times X_{\text{éq}}$ sont de la forme :

$$X(t) = X_{\text{éq}} + A \times \cos(\omega_0 t) + B \times \sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont deux constantes.
On peut également écrire $X(t)$ sous la forme :

$$X(t) = X_{\text{éq}} + C \times \cos(\omega t + \varphi)$$

où $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ est l'**amplitude du mouvement**.

Fréquence et période d'un oscillateur harmonique

La **fréquence** f_0 d'un oscillateur harmonique est liée à sa **pulsation** ω_0 par la formule :

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

On peut également lier la pulsation ω_0 à la **période** T_0 par la formule :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

5.2.2 Conditions initiales et unicité de la solution

Comme dans le chapitre précédent, il existe une infinité de solutions de par le nombre infini de choix pour les valeurs de A et B.

Théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle d'ordre 2 : *Une équation différentielle d'ordre 2 à laquelle on impose les conditions :*

$$\begin{cases} X(t=0) & = & X_0 \\ \dfrac{dX}{dt}(t=0) & = & V_0 \end{cases}$$

ne possède qu'une unique solution.

Dans notre problème, on a $x(t=0) = \ell_0 + L$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$ (pas de vitesse initiale, on lâche juste le point M).

Question 11 : Montrer que la condition initiale sur la position impose que $A = L$ et que celle sur la vitesse impose que $B = 0$. En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de ℓ_0, L, ω_0 et t.

5.3 Caractéristiques d'un oscillateur harmonique

5.3.1 Aspect dynamique

L'équation différentielle et les conditions initiales nous donnent l'expression de $x(t)$:

$$x(t) = \ell_0 + L \times \cos(\omega_0 t) \tag{5.1}$$

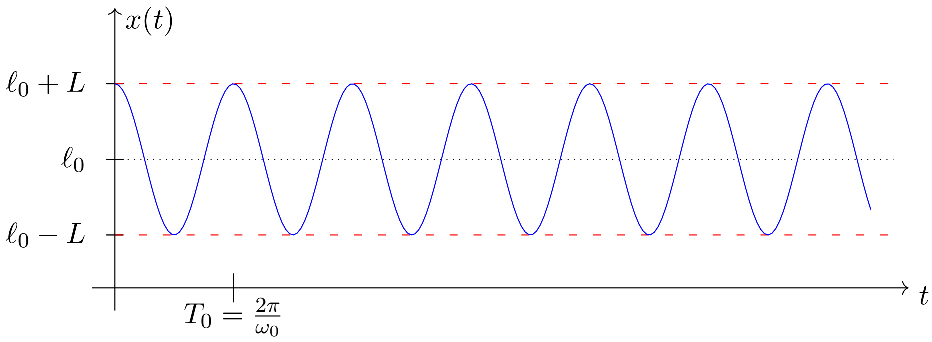


FIGURE 5.2 – Position horizontale $x(t)$ du point M en fonction du temps t

On observe que le point M oscille indéfiniment entre les positions $\ell_0 - L$ et $\ell_0 + L$. On dit que L est **l'amplitude** du mouvement du point M, et ℓ_0 **la position d'équilibre** du point M.

5.3.2 Retour sur l'aspect énergétique

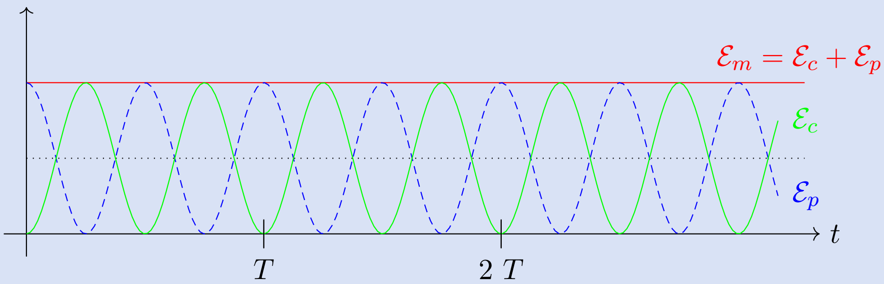
Question 12 : Exprimer l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du point M en fonction de m, L, ω_0 et t.

Question 13 : Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système en fonction de k, L, ω_0, t.

Question 14 : Déterminer alors l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du système {masse + ressort}, et montrer qu'elle est indépendante du temps (rappel : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$).

Conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ d'un oscillateur harmonique est une constante : quel que soit l'instant, sa valeur sera identique. Ceci retranscrit le fait que le système ne subit aucun frottement : aucune perte énergétique n'est à déplorer !
On en déduit également que l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ (et donc la vitesse v) du système diminue lorsque son énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ augmente, et inversement.



Réponse à la problématique

1. Lors des oscillations horizontales, seule la masse intervient car la gravité ne joue pas au cours du mouvement. On en déduit que la masse inerte peut s'exprimer en fonction de la pulsation propre ω_0 et de k :

$$m_I =$$

Or la pulsation propre ω_0 se détermine à partir de la période propre T_0 *via* la formule $\omega_0 =$. On en déduit alors la valeur numérique de m_I :

$$m_I =$$

2. On observe expérimentalement que : c'est la raison pour laquelle on assimile la masse inerte m_I à la masse grave m_G, que l'on dénote à l'aide du même symbole m.[a]

[a] Les différences entre m_I et m_G relèvent ici essentiellement d'incertitudes expérimentales... mais il n'existe actuellement pas de preuve de leur égalité stricte. Il s'agit uniquement d'une conjecture, élevée sous le nom de « principe d'équivalence faible ». En septembre 2022, leur écart relatif était mesuré à plus faible que 10^{-15}.

Complément sur le potentiel harmonique

On a étudié dans ce chapitre une énergie potentielle du type $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2$, qui est une fonction positive et parabolique. Ce type d'énergie potentielle est appelé « potentiel harmonique ». Comment expliquer que l'on souhaite étudier ce type de potentiel en particulier ?

Prenons comme exemple une énergie potentielle quelconque (figure 5.3) dépendant d'une variable x.

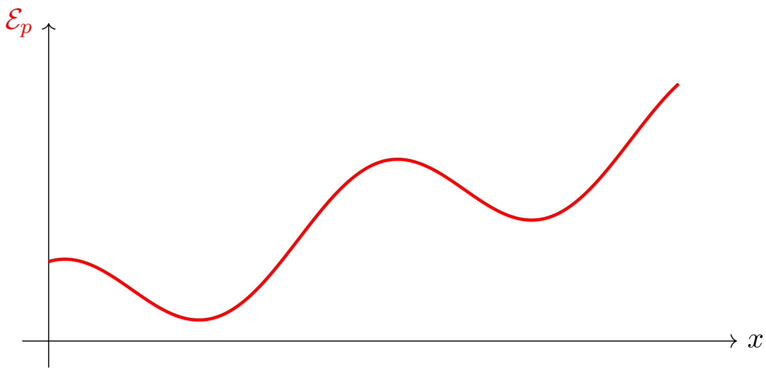


Figure 5.3 – Énergie potentielle quelconque d'un système.

On observe que cette énergie potentielle possède notamment des minima locaux, qui correspondent donc à des positions d'équilibre stables. Vers ces positions d'équilibre, on a l'impression d'observer localement des arcs de parabole (figure 5.4)... et donc des potentiels harmoniques !

Cette modélisation devient de plus en plus mauvaise lorsque l'on s'éloigne des positions d'équilibre... mais sont une très bonne approximation lorsqu'on en est proche.

Cette propriété provient d'un résultat mathématique, appelé développement de Taylor. Si l'on est suffisamment proche d'un point quelconque a, on peut écrire :

$$\mathcal{E}_p(a+x) \approx \mathcal{E}_p(a) + (x-a) \times \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(a)$$

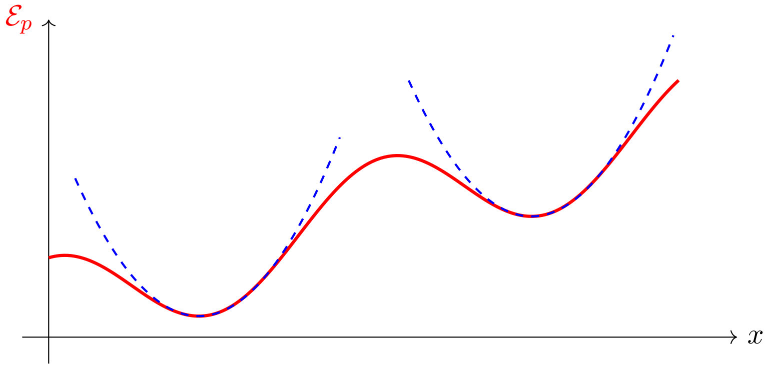


FIGURE 5.4 – Approximation harmonique des minima locaux de l'énergie potentielle. Les courbes bleues en traitillés sont, par construction, des paraboles épousant d'autant bien l'énergie potentielle que l'on est proche des minimas.

Or, lorsque le point étudié est une position d'équilibre (c'est-à-dire pour $a = x_{\text{éq}}$), on a $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}(x_{\text{éq}}) = 0$: la tangente en ce point a une pente nulle, et est donc horizontale. Par ailleurs, pour une position d'équilibre stable, on a $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{éq}}) > 0$. Ainsi, on peut écrire :

$$\mathcal{E}_p(x_{\text{éq}} + x) \approx \mathcal{E}_p(x_{\text{éq}}) + \frac{1}{2}K(x - x_{\text{éq}})^2$$

où $K = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}(x_{\text{éq}})$ est une constante positive.

On reconnaît ici, à une constante additive [1] $\mathcal{E}_p(x_{\text{éq}})$ près, l'énergie potentielle élastique du chapitre : $\mathcal{E}_{p,\text{éq}} = \dfrac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$, où ℓ_0 était bien la position d'équilibre du système.

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_{\text{éq}}$. Que représentent physiquement $y_{\text{éq}}$ et ω_0 ?
- ☐ Soit l'équation différentielle $\tau \times \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{4}{\tau}y(t) = \dfrac{1}{\tau}y_0$. La résoudre, sachant que $y(t=0) = 5y_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t=0) = \dfrac{6y_0}{\tau}$. Tracer l'allure de la solution.
- ☐ Soit un système masse-ressort horizontal (axe (O,x)), fixé en $x = 0$ au point O et dont l'autre extrémité M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $x(t)$ représente l'abscisse du point M par rapport au point O (on a donc $x(t)$ positif). La pesanteur est négligée. Déterminer l'équation du mouvement portant sur $x(t)$, puis son équation horaire, sachant que le ressort est initialement lâché sans vitesse à la longueur $2 \times \ell_0$.
- ☐ Soit un système masse-ressort vertical, fixé au-dessus au point O et dont l'extrémité basse M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $z(t)$ représente la cote du point M par rapport au point O (on a donc $z(t)$ positif, et un axe (O,z) descendant). La pesanteur est prise en compte. Déterminer l'équation du mouvement portant sur $z(t)$, puis son équation horaire, sachant que le ressort est initialement lâché sans vitesse à la longueur ℓ_0.
- ☐ Que dire de l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique ? Tracer l'allure, sur un graphe dépendant du temps, de l'énergie potentielle, de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique. Commenter.

1. On rappelle que l'énergie potentielle est toujours définie à une constante près, car seules les variations d'énergie potentielle ont du sens.

Chapitre 6 : Oscillateur amorti

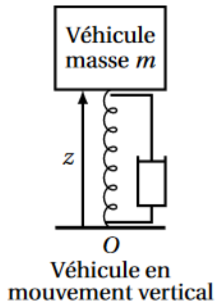
Objectifs :

— Expliquer l'existence d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable.
— Prévoir l'amplitude des oscillations et la vitesse maximale.
— Interpréter un portrait de phase fourni ou relevé expérimentalement.
— Utiliser le modèle de l'oscillateur harmonique amorti par frottements fluides.
— Résoudre et interpréter les solutions de l'équation différentielle canonique.
— Identifier les différents régimes et exploiter les courbes.
— Commenter le cas où le facteur de qualité est grand devant 1.
— Relier facteur de qualité et facteur d'amortissement.

Au concours ATS : Aux écrits en 2021, 2019.

PROBLÉMATIQUE

Un véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre, d'intensité $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Il est assimilé à une masse $m = 1{,}0\,\mathrm{tonne}$.
La suspension du véhicule est constituée d'un ressort de masse négligeable, de raideur $k = 1{,}10 \times 10^5\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$ et de longueur au repos ℓ_0. La suspension comporte un dispositif qui exerce, sur le véhicule de masse m, une force d'amortissement visqueux de puissance $\mathcal{P}_f = -hv^2$, où v est la vitesse verticale du véhicule par rapport à la roue et h le coefficient de frottements.
Le véhicule passe au niveau d'un nid de poule. Comment choisir h pour que la voiture suive, suite à ce choc, des oscillations ne dépassant pas $\Delta t = 3\,\mathrm{s}$?



6.1 Étude qualitative d'un oscillateur amorti

6.1.1 Position du problème

Prenons à présent le cas d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, faisant osciller horizontalement un point M de masse m. On ajoute à cet oscillateur harmonique une force de frottements visqueux de puissance $\mathcal{P}_{\text{fluide}} = -\lambda v^2$, où $v = \dot{x}$ est la vitesse instantanée du point M. (voir 6.1).

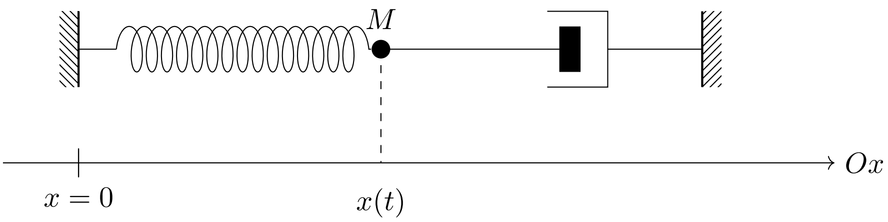


FIGURE 6.1 – Oscillateur mécanique amorti.

On suppose qu'initialement $x(t = 0) = \ell_0 + L$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$.

6.1.2 Portrait de phase

Portrait de phase

Un système dont l'évolution au cours du temps est décrit par une fonction $X(t)$ peut être étudié dans le plan de phase, où l'on représente en abscisse X et en ordonnée $\dot{X} = \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$. La courbe obtenue est une **trajectoire de phase**, qui dépend des conditions initiales. L'ensemble de toutes les trajectoires de phase constitue le **portrait de phase** du système.

Pour un même ressort et une même masse, on peut choisir l'intensité des frottements ; par exemple, en baignant le ressort dans de l'eau, de l'huile, ou dans l'air pour modifier la valeur de λ. On observe alors deux types de portraits de phase (figure 6.2 et l'animation du QR code ci-contre, où λ représente dans l'idée l'intensité des frottements).

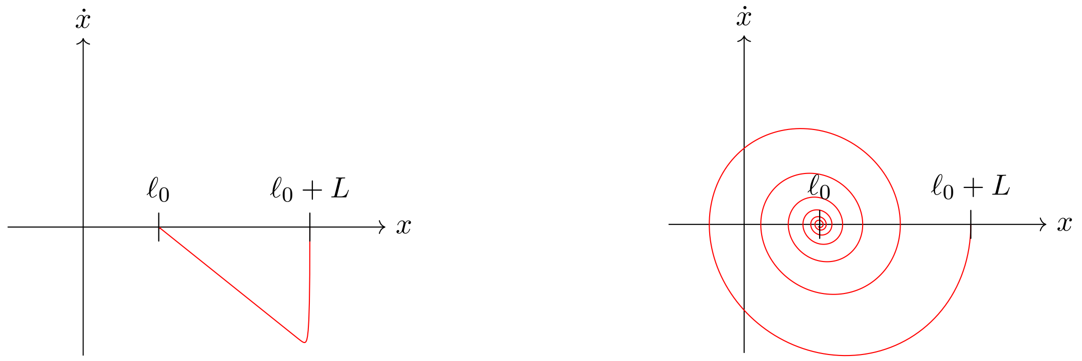


FIGURE 6.2 – Portrait de phase du système pour différentes valeurs de λ. Gauche : grandes valeurs de λ ; droite : petites valeurs de λ.

Question 1 : Lorsque $\dot{x} > 0$, que peut-on dire de x ? De même, lorsque $\dot{x} < 0$, que peut-on dire de x ? Orienter alors les courbes de la figure 6.2.

Question 2 : Quel sera l'état final du ressort ?

Question 3 : Dessiner les allures de $x(t)$ pour chacun des cas à partir des portraits de phase.

6.2 Équation du mouvement

6.2.1 Mise en équation

Question 4 : Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de m, ℓ_0, k, x et $\dot{x}$.

Question 5 : En appliquant le théorème de la puissance mécanique, montrer que l'on peut écrire : $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = k\ell_0$.

Équation d'un oscillateur amorti

On dit qu'une grandeur X suit l'équation d'un oscillateur amorti si l'équation différentielle portant sur son évolution est du type :

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \times X = \omega_0^2 \times X_{\text{éq}}$$

ω_0 est la **pulsation propre** de l'oscillateur amorti, et Q est le **facteur de qualité**, sans dimension. $X_{\text{éq}}$ est la position d'équilibre du système lorsque t tend vers l'infini.

Question 6 : Donner l'expression de ω_0 du système masse-ressort amorti, puis l'expression du facteur de qualité Q.

Question 7 : Que se passe-t-il lorsque Q tend vers l'infini ? À quoi correspond physiquement ce cas, à masse et ressort fixés ? Est-ce cohérent ?

6.2.2 Équation caractéristique

Les solutions de l'équation différentielle peuvent s'écrire comme une somme de deux solutions : la première est celle du régime transitoire, et la deuxième celle du régime permanent.

Ici, on aura donc :

$$x(t) = x_{\text{transitoire}}(t) + \underbrace{\ell_0}_{\text{rég. permanent}}$$

Le but est, dans cette partie, de déterminer les solutions associées au régime transitoire. On cherche ces solutions sous la forme $x(t) = X_0 e^{rt}$ où X_0 et r sont des inconnues.

Question 8 : Exprimer $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$ en fonction de $x(t)$. Montrer, en réinjectant ces expressions dans l'équation du mouvement, qu'elle se transforme en une équation du second degré portant sur r.

Équation caractéristique d'une équation différentielle

À l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \times X = \omega_0^2 \times X_{\text{éq}}$, on associe l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times r + \omega_0^2 = 0$$

r est ici une inconnue, que l'on cherche à déterminer.

Question 9 : Calculer le discriminant Δ de cette équation du second degré. Pour quelles valeurs de Q le discriminant est-il positif ? négatif ?

6.3 Régime apériodique ($Q < 1/2$)

Régime apériodique d'un oscillateur amorti

Lorsque le facteur de qualité Q d'un oscillateur amorti est plus petit que $1/2$, on parle de **régime apériodique**.

Question 10 : Quelles sont les solutions r_1 et r_2 de l'équation du second degré ?

Question 11 : Montrer que r_1 et r_2 sont négatifs.

Question 12 : Montrer que r_1 et r_2 sont homogènes à l'inverse d'une durée.

On déduit des deux questions précédentes que l'on peut noter $r_1 = -1/\tau_1$ et $r_2 = -1/\tau_2$ avec τ_1 et τ_2 des durées positives.

Question 13 : Donner les expressions de τ_1 et τ_2 en fonction de ω_0 et Q.

Deux familles de fonctions sont alors solutions de l'équation différentielle : celles du type $t \mapsto \ell_0 + Ae^{-t/\tau_1}$ et celles du type $t \mapsto \ell_0 + Be^{-t/\tau_2}$. La solution générale de l'équation différentielle régissant l'évolution de x est alors une somme de ces solutions :

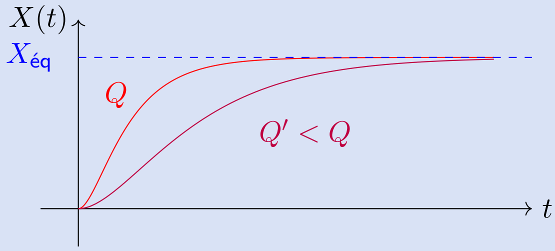
$$x(t) = \ell_0 + Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$$

Solutions de l'équation d'un oscillateur amorti en régime apériodique

En régime apériodique, les deux solutions $-\dfrac{1}{\tau_1}$ et $-\dfrac{1}{\tau_2}$ de l'équation caractéristique sont réelles et négatives. On a alors :

$$X(t) = \underbrace{Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}}_{\text{régime transitoire}} \quad + \quad \underbrace{X_{\text{éq}}}_{\text{régime permanent}}$$

avec A et B deux constantes qui dépendent des conditions initiales.



τ_1 et τ_2 représentent deux durées caractéristiques afin d'atteindre le régime permanent. La durée du régime transitoire sera alors $5 \times \max(\tau_1, \tau_2)$.

Question 14 : Calculer $\dot{x}(t)$. En utilisant les conditions initiales $x(t=0) = \ell_0 + L$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, montrer que l'on a un système portant sur A et B (on ne cherchera pas à le résoudre).

Question 15 : Si Q augmente, comment évoluent τ_1 et τ_2 ? À quoi cela correspond-il, physiquement ?

6.4 Régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$)

Régime pseudo-périodique d'un oscillateur amorti

Lorsque le facteur de qualité Q d'un oscillateur amorti est plus grand que $1/2$, on parle de **régime pseudo-périodique**.

Question 16 : Quelles sont les solutions r_1 et r_2 de l'équation caractéristique ? On rappelle que $\Delta < 0$, et on notera j le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$.

Question 17 : Montrer que ces solutions sont complexes conjuguées, et que leur partie réelle est strictement négative.

Question 18 : On pose τ et Ω positifs tels que $r_{1,2} = -\dfrac{1}{\tau} \pm j\Omega$. Donner les expressions de τ et Ω en fonction de ω_0 et Q.

Question 19 : Uniquement pour cette question : si $Q \gg 1$, comment évoluent Ω et τ ? À quoi cela correspond-il, physiquement ?

Les solutions générales de l'équation différentielle sont donc du type :

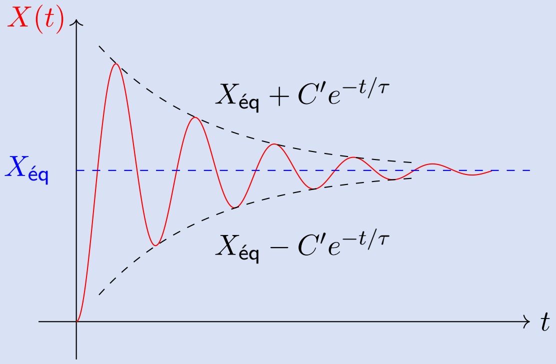
$$\begin{aligned}
x(t) &= \ell_0 + Ae^{(-\frac{1}{\tau}+j\Omega)t} + Be^{(-\frac{1}{\tau}-j\Omega)t} \\
&= \ell_0 + Ae^{-t/\tau}e^{j\Omega t} + Be^{-t/\tau}e^{-j\Omega t} \\
&= \ell_0 + \left[Ae^{j\Omega t} + Be^{-j\Omega t}\right] \times e^{-t/\tau} \\
&= \ell_0 + [A\cos(\Omega t) + jA\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t) - jB\sin(\Omega t)] \times e^{-t/\tau} \\
&= \ell_0 + [A'\cos(\Omega t) + B'\sin(\Omega t)] \times e^{-t/\tau}
\end{aligned}$$

Solutions de l'équation d'un oscillateur amorti en régime pseudo-périodique

En régime pseudo-périodique, les deux solutions $-\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$ de l'équation caractéristique sont complexes et conjuguées. On a alors :

$$X(t) = \underbrace{[A'\cos(\Omega t) + B'\sin(\Omega t)]\, e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} \quad + \quad \underbrace{X_{\text{éq}}}_{\text{régime permanent}}$$

avec A' et B' deux constantes qui dépendent des conditions initiales.
Remarque : on peut également écrire $X(t) = C'\cos(\Omega t + \varphi)e^{-t/\tau} + X_{\text{éq}}$.



Ω est la pulsation des oscillations du système, qui toujours inférieure à ω_0. Un système oscillera d'autant plus lentement qu'il est amorti.
τ_1 représente la durée caractéristique afin d'atteindre le régime permanent. La durée du régime transitoire sera alors $5 \times \tau$.

Question 20 : Calculer $\dot{x}(t)$.

Question 21 : En utilisant les conditions initiales $x(t=0) = \ell_0 + L$ et $\dot{x}(t=0) = 0$, montrer que l'on a un système portant sur A' et B' (on ne cherchera pas à le résoudre).

Complément sur le régime apériodique critique

Régime apériodique critique

Si $Q = 1/2$, on se situe dans le cas **apériodique critique**. Ce cas est uniquement théorique, car Q n'est jamais exactement égal à $1/2$.
La seule solution de l'équation caractéristique est réelle et négative : $r_0 = -\dfrac{1}{\tau_0}$. Les solutions sont alors du type :

$$X(t) = \underbrace{(At+B)e^{-t/\tau_0}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{X_{\text{éq}}}_{\text{régime permanent}}$$

avec A et B deux constantes qui dépendent des conditions initiales.

En particulier, il s'agit du régime apériodique dont la durée du régime transitoire est la plus courte ; en d'autres termes, il s'agit du régime apériodique allant le plus rapidement jusqu'à son régime permanent.
Mathématiquement, on a donc $\tau_0 < \min(\tau_1, \tau_2)$ avec τ_1 et τ_2 les durées caractéristiques du régime apériodique.

Réponse à la problématique

On doit respecter deux conditions :

- Afin d'observer des oscillations, il faut que le véhicule soit en régime , et donc que le facteur de qualité soit à $1/2$;
- Afin que la durée des oscillations ne dépasse pas Δt, il faut 5τ Δt.

Or $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{h}$, donc $h =$. Nécessairement, il faut que $h < h_{\text{max}} = \dfrac{\sqrt{km}}{1/2}$, avec la valeur numérique :

$$h_{\text{max}} =$$

Par ailleurs, la durée du régime transitoire est $5 \times \tau = 5 \times \underline{\qquad} = 5 \times \dfrac{2m}{h}$. Nécessairement, il faut que $h > h_{\text{min}} = \dfrac{10m}{\Delta t}$, avec la valeur numérique :

$$h_{\text{min}} =$$

On en déduit l'encadrement pour h :

$$< h <$$

Questions de cours

À cocher quand vous savez y répondre par vous-même...

- ☐ Soit l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 y_{\text{éq}}$. Que représentent physiquement $y_{\text{éq}}$, ω_0 et Q ?
- ☐ À quel régime correspond le cas $Q < 1/2$? le cas $Q > 1/2$? Donner la forme mathématique des solutions dans chacun des deux cas, puis tracer leurs allures.
- ☐ Soit un système masse-ressort horizontal, fixé à gauche au point O et dont l'extrémité droite M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $x(t)$ représente l'abscisse du point M par rapport au point O. Les frottements, de puissance $\mathcal{P} = -\lambda v^2$, sont pris en compte.
  Déterminer l'équation du mouvement portant sur $x(t)$, puis montrer que le mouvement est de type apériodique, sachant que $\lambda = 5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$ et $k = 4\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Donner les valeurs numériques de τ_1 et τ_2.
- ☐ Soit un système masse-ressort horizontal, fixé à gauche au point O et dont l'extrémité droite M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $x(t)$ représente l'abscisse du point M par rapport au point O. Les frottements, de puissance $\mathcal{P} = -\lambda v^2$, sont pris en compte.
  Déterminer l'équation du mouvement portant sur $x(t)$, puis montrer que le mouvement est de type pseudo-périodique, sachant que $\lambda = 40\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $m = 16\,\mathrm{kg}$ et $k = 169\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Donner les valeurs numériques de Ω et τ.