1 Mouvement rectiligne d'un point matériel

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Modèle du point matériel

Un système peut être représenté par un **point matériel** si ses dimensions sont négligeables face à l'échelle d'observation, et si son orientation n'intervient pas.

2 Vitesse d'un point matériel

Soit un point M se déplaçant de manière rectiligne selon un axe (Ox) ; on repère la position du point M par son abscisse $x_M(t)$. La **vitesse instantanée** du point M à l'instant t est :

$$\boxed{v_M(t) = \frac{\mathrm{d}x_M}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{x}_M(t)}$$

L'unité de la vitesse instantanée est le mètre par seconde $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

- Si $x_M(t) = 4t^2 - 2t + 5$, alors $v_M(t) = 8t - 2$.
- Si $x_M(t) = 5e^{-t/2}$, alors $v_M(t) = -\frac{5}{2}e^{-t/2}$.

♥ $1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}6\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

♥ La vitesse d'un point matériel dépend du référentiel par rapport auquel on observe son mouvement. Le référentiel le plus utilisé est le référentiel terrestre (ou : référentiel du laboratoire).

3 Énergie cinétique d'un point matériel

L'**énergie cinétique** $\mathcal{E}_c$ d'un point matériel M de masse m (en kilogramme kg) et de vitesse instantanée v_M (en mètre par seconde $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$) correspond à l'énergie que possède ce point grâce à son mouvement :

$$\boxed{\mathcal{E}_c(M) = \frac{1}{2}mv_M^2}$$

Dans le système international, l'énergie cinétique s'exprime en joule J.

4 Principe d'inertie

On dit qu'un point matériel est **isolé** ou **pseudo-isolé** si la somme des forces s'exerçant sur lui est nulle.

Le **principe d'inertie** stipule alors qu'il existe des référentiels dans lesquels le mouvement d'un point matériel est rectiligne et uniforme si et seulement si ce point matériel est isolé ou pseudo-isolé. Un référentiel vérifiant cette propriété est appelé **référentiel galiléen**.

♥ Un référentiel est galiléen si la durée d'observation du mouvement est « suffisamment courte » pour négliger les effets non-galiléens.

2 Équilibre mécanique d'un système matériel

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Énergie potentielle d'un système matériel

On dit qu'une force est **conservative** si on peut lui associer une énergie potentielle.

- L'énergie potentielle élastique est celle associée à la force de rappel d'un ressort sur un point M.

Si l'on note ℓ la longueur du ressort, ℓ_0 sa longueur à vide et k sa constante de raideur, on a :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2} + \text{cste}$$

- L'énergie potentielle de pesanteur est celle associée au poids d'un corps M de masse m. Notons O le centre du repère et z l'altitude du point M.

Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le haut, on a :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{pes}} = mgz} + \text{cste}$$

Si l'axe vertical (Oz) est orienté vers le bas, on a :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{pes}} = -mgz} + \text{cste}$$

où $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ est l'intensité de la pesanteur.

♥ La valeur de la constante additive ne nous intéresse généralement pas, car seules les variations d'énergie potentielle ont un sens physique.

♥ Pour déterminer l'énergie potentielle totale d'un système, il suffit de sommer chacune des énergies potentielles.

♥ S'il y a n ressorts reliés au point d'étude, alors il y a n énergies potentielles élastiques qui interviennent dans le problème (une par ressort).

2 Équilibre et stabilité

Un point M est à l'équilibre lorsque sa position est constante.

Dans le cas de forces uniquement conservatives et pour un mouvement unidimensionnel, un point M est à l'équilibre son énergie potentielle est extrémale (minimale ou maximale). Ceci se repère par une pente nulle dans un graphe d'énergie potentielle.

Une position d'équilibre est stable si l'énergie potentielle forme un minimum local. Au contraire, une position d'équilibre est instable si l'énergie potentielle forme un maximum local.

3 Conservation de l'énergie mécanique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Énergie mécanique

L'**énergie mécanique** d'un point M est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\boxed{\mathcal{E}_m(M) = \mathcal{E}_c(M) + \mathcal{E}_p(M)}$$

L'énergie cinétique étant une quantité positive, on en déduit que les **positions accessibles à un système** d'énergie mécanique constante vérifient :

$$\boxed{\mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_m}$$

2 Théorème de la puissance mécanique (TPM)

Soit un système matériel d'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et soumis à des forces non conservatives de puissance $\mathcal{P}_{n.c.}$. Le **théorème de la puissance mécanique** stipule alors que :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{n.c.}}$$

La **réaction du support** (en l'absence de frottements solides) et la **tension d'un fil inextensible** sont des forces non-conservatives. Leurs puissances sont cependant nulles :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{support}} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{fil}} = 0}$$

Dans la plupart des cas, la seule force non conservative est celle des frottements fluides. Si un système n'est soumis **qu'à des forces conservatives**, on a alors $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \text{cste}} \quad \text{pour un système conservatif}$$

3 Équation du mouvement et équation horaire

On appelle **équation du mouvement** une équation différentielle portant sur les dérivées temporelles de la position. Elle se détermine à partir du théorème de la puissance mécanique.

On appelle **équation horaire** une équation explicite donnant l'expression des coordonnées du système d'étude. Elle se détermine en résolvant l'équation du mouvement.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Détermination d'une vitesse finale après une chute libre

Énoncé

Soit un point matériel M repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une altitude h sans vitesse initiale. On néglige tout frottement. Quelle est sa vitesse juste avant de toucher le sol ?

Résolution

Exprimons l'énergie mécanique initiale de ce point :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{m,i} &= \frac{1}{2}mv_i^2 + mgz_i \\ &= \frac{1}{2}m \times 0^2 + mgh \\ &= mgh\end{aligned}$$

L'énergie mécanique finale (juste avant de toucher le sol) vaut quant à elle :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{m,f} &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \times 0 \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2\end{aligned}$$

Puisque la seule force présente ici (celle de pesanteur) est conservative, on en déduit que $\mathcal{E}_{m,i} = \mathcal{E}_{m,f}$. Nécessairement, $mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$.

On en déduit que $\boxed{v_f = \sqrt{2gh}}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Détermination de l'équation horaire lors d'une chute libre

Énoncé

Soit un point matériel M repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une altitude h sans vitesse initiale. On néglige tout frottement. Déterminer l'équation horaire $z(t)$ de ce point.

Résolution

Le théorème de la puissance mécanique appliqué au point M donne que : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{n.c.}$, où $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$ et $\mathcal{P}_{n.c} = 0$ ici car il n'y a pas de forces non conservatives.

Or, $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z}$, donc : $m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z} = 0$.

En simplifiant par m et $\dot{z}$, il vient alors que $\ddot{z} + g = 0$, c'est-à-dire que $\boxed{\ddot{z} = -g}$: c'est l'**équation du mouvement**.

Intégrons cette équation. On a donc $\dot{z}(t) = -g \times t + C_1$. Or, à $t = 0$, la vitesse est nulle d'après l'énoncé. Il vient alors que $0 = -g \times 0 + C_1$, c'est-à-dire que $C_1 = 0$. Nécessairement, $\dot{z}(t) = -gt$.

Intégrons cette dernière équation. On a donc $z(t) = -\frac{1}{2}g \times t^2 + C_2$. Or, à $t = 0$, l'altitude vaut h d'après l'énoncé. Il vient alors que $h = -\frac{1}{2}g \times 0^2 + C_2$, c'est-à-dire que $C_2 = h$. Nécessairement, l'**équation horaire** est :

$$\boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h}$$

4 Frottements fluides

■ À revoir ■ Maîtrisé

Les **frottements fluides** agissent sur un corps en s'opposant à sa vitesse et donc en le ralentissant. Il s'agit d'une force non conservative, dont la puissance a pour expression : $\boxed{\mathcal{P}_f = -\lambda.v^2}$, où v est la vitesse du système étudié et λ le coefficient de frottements fluides.

1 Résolution d'une équation différentielle d'ordre 1

On dit qu'une équation différentielle d'ordre 1 est mise sous forme canonique si on l'écrit sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau} \times X(t) = \frac{1}{\tau} \times X_{\text{éq}}}$$

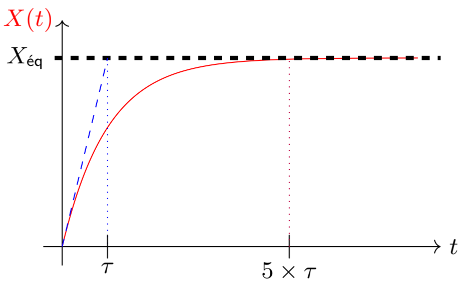
τ est appelée **constante de temps** ou **temps caractéristique** ; $X_{\text{éq}}$ représente la valeur de $X(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

Les solutions de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{1}{\tau} \times X(t) = \frac{1}{\tau} \times X_{\text{éq}}$ sont de la forme :

$$\boxed{X(t) = X_{\text{éq}} + A \times e^{-t/\tau}}$$

où A est une constante que l'on détermine à l'aide des conditions initiales fournies par l'énoncé.

2 Régime transitoire et régime permanent



On aperçoit sur le tracé de $X(t)$ que deux phases ont lieu pour l'évolution de la vitesse. Tout d'abord, celle-ci augmente, puis elle stagne jusqu'à une valeur limite.

La première phase est nommée **régime transitoire** ; la deuxième phase est le **régime permanent**.

On estime généralement que le régime permanent est atteint au bout de $5 \times \tau$. τ représente donc un ordre de grandeur nécessaire pour passer du régime transitoire au régime permanent.

Si $X(t)$ vérifie une équation différentielle d'ordre 1 et de constante de temps τ, on peut déterminer celle-ci par : $X(t=\tau) - X(t=0) = 0{,}63 \times (X_{\text{éq}} - X(t=0))$.

La pente à l'origine coupe l'axe horizontale correspondant à la vitesse finale à l'instant $t=\tau$. Il s'agit d'une autre méthode courante pour mesurer expérimentalement la valeur de la constante de temps.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Détermination de l'équation horaire lors d'une chute avec frottements

Énoncé

Soit un point matériel M repéré par son altitude $z(t)$ (axe vertical ascendant). On le lâche initialement d'une altitude h sans vitesse initiale. On prend en compte les frottements, de coefficient de frottements λ. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de ce point.

Résolution

Le théorème de la puissance mécanique appliqué au point M donne que : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{n.c.}$, où $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$ et $\mathcal{P}_{n.c} = -\lambda v^2$.

Or, $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = mv\dot{v} + mg\underbrace{\dot{z}}_{=v}$, donc : $mv\dot{v} + mgv = -\lambda v^2$. En simplifiant par v, il vient alors que $\boxed{m\dot{v} + \lambda v = -mg}$: c'est l'**équation du mouvement**.

Divisons par m : $\dot{v} + \frac{\lambda}{m}v = -g$. On veut mettre cette équation sous forme canonique : $\dot{v} + \frac{1}{\tau}v = \frac{1}{\tau}v_{\text{éq}}$. Nécessairement : $\begin{cases} \frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{m} \\ \frac{1}{\tau}v_{\text{éq}} = -g \end{cases}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} \tau = \frac{m}{\lambda} \\ v_{\text{éq}} = -g \times \tau = -\frac{mg}{\lambda} \end{cases}$.

Il vient alors que :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + v_{\text{éq}} = Ae^{-t/\tau} - \frac{mg}{\lambda}$$

où A est une constante d'intégration à déterminer à l'aide des conditions initiales.

Or, à $t = 0$, la vitesse est nulle d'après l'énoncé. On a donc $0 = A \times e^0 - \frac{mg}{\lambda}$, c'est-à-dire : $A = \frac{mg}{\lambda}$.

On en déduit finalement l'**équation horaire** :

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{\lambda} \times \left(e^{-t/\tau} - 1\right)}$$

5 Oscillateur harmonique

■ À revoir ■ Maîtrisé

1 Équations d'un oscillateur amorti

On dit que l'équation :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 \times X(t) = \omega_0^2 \times X_{\text{éq}}}$$

est celle d'un **oscillateur harmonique**. ω_0 (en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) est appelée **pulsation propre** du système ; $X_{\text{éq}}$ est sa position d'équilibre.

Les solutions de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega_0^2 \times X(t) = \omega_0^2 \times X_{\text{éq}}$ sont de la forme :

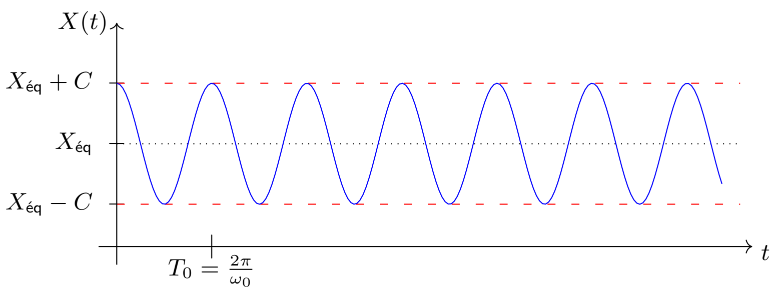
$$\boxed{X(t) = X_{\text{éq}} + A \times \cos(\omega_0 t) + B \times \sin(\omega_0 t)}$$

où A et B sont deux constantes que l'on détermine à l'aide des conditions initiales fournies par l'énoncé.

♥ On peut mettre $X(t)$ sous la forme : $X(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

La fréquence f_0 d'un oscillateur harmonique est liée à sa pulsation ω_0 par la formule $\omega_0 = 2\pi f_0$.

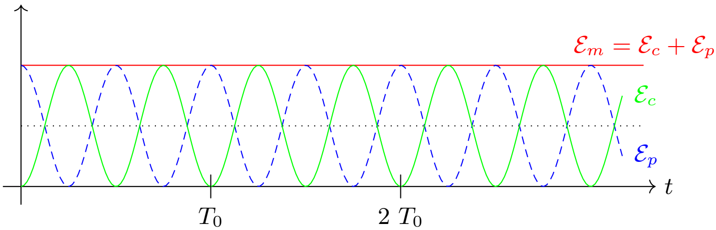
On peut également lier la pulsation ω_0 à la période T_0 par la formule $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$.



2 Énergétique d'un oscillateur amorti

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ d'un oscillateur harmonique est une constante : quel que soit l'instant, sa valeur sera identique. Ceci retranscrit le fait que le système ne subit aucun frottement : aucune perte énergétique n'est à déplorer !

On en déduit également que l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ (et donc la vitesse v) du système diminue lorsque son énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ augmente, et inversement.



Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Équation du mouvement d'un système masse-ressort non-amorti

Énoncé

Soit un système masse-ressort vertical, fixé par le haut au point O et dont l'extrémité basse M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $z(t)$ représente la cote du point M par rapport au point O (on a donc $z(t)$ positif, et un axe (O, z) descendant). La pesanteur est prise en compte.

Déterminer l'équation du mouvement portant sur $z(t)$, puis son équation horaire, sachant que le ressort est initialement lâché sans vitesse avec une longueur ℓ_0.

Résolution

Le théorème de la puissance mécanique appliqué au point M donne que : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{n.c.}$, où $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \dfrac{1}{2}k(z-\ell_0)^2$ et $\mathcal{P}_{n.c} = 0$ ici car il n'y a pas de forces non conservatives.

Or, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}(z-\ell_0)$, donc : $m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}(z-\ell_0) = 0$.

En simplifiant par $\dot{z}$, il vient alors que $m\ddot{z} + kz - k\ell_0 - mg = 0$, c'est-à-dire que $m\ddot{z} + kz = k\ell_0 + mg$.

Divisons par m : $\ddot{z} + \dfrac{k}{m}z = g + \dfrac{k}{m}\ell_0$. On veut mettre cette équation sous forme canonique : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{éq}}$. Nécessairement, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\omega_0^2 z_{\text{éq}} = g + \dfrac{k}{m}\ell_0$; c'est-à-dire : $z_{\text{éq}} = \dfrac{g + \frac{k}{m}\ell_0}{\omega_0^2} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$. Il vient alors que :

$$\begin{aligned} z(t) &= z_{\text{éq}} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ &= \ell_0 + \frac{mg}{k} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

où A et B sont des constantes d'intégration à déterminer à l'aide des conditions initiales. Or, à $t = 0$, on a $z(t=0) = \ell_0$ d'après l'énoncé. On a donc $\ell_0 = \ell_0 + \dfrac{mg}{k} + A$, soit : $A = -\dfrac{mg}{k}$.

Pour exploiter la deuxième condition initiale (vitesse initiale nulle), on exprime $\dot{z}(t)$: $\dot{z}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$, donc $\dot{z}(t=0) = B\omega_0 = 0$. On en déduit que $B = 0$.

Finalement, on a :

$$\boxed{z(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k} \times (1 - \cos(\omega_0 t))}$$

6 Oscillateur amorti

■ À revoir ■ Maîtrisé

Un système est dit du second ordre lorsque ses grandeurs suivent les équations d'un oscillateur amorti :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\ X = \omega_0^2\ X_{\text{éq}}}$$

Pour déterminer les solutions de cette équation, on pose l'équation caractéristique associée à l'équation homogène :

$$\boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0}$$

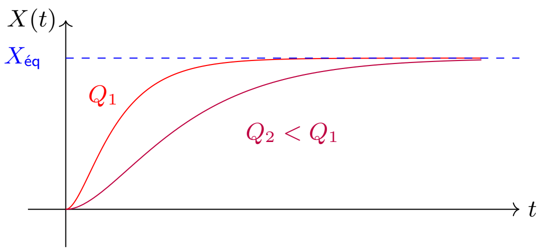
Cette équation se traite différemment selon la valeur de Q.

Régime apériodique

Si $Q < 1/2$, on se situe dans le régime **apériodique**. Les deux solutions $-r_1 = \dfrac{1}{\tau_1}$ et $r_2 = -\dfrac{1}{\tau_2}$ de l'équation caractéristique sont réelles et négatives. On a alors :

$$X(t) = \underbrace{Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}}_{\text{régime transitoire}} \qquad + \qquad \underbrace{X_{\text{éq}}}_{\text{régime permanent}}$$

avec A et B deux constantes qui dépendent des conditions initiales.



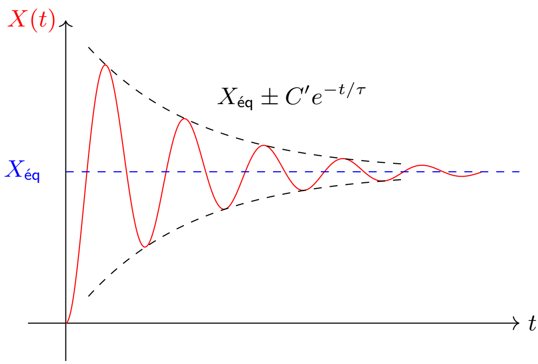
Régime pseudo-périodique

Si $Q > 1/2$, on se situe dans le régime **pseudo-périodique**. Les deux solutions $r_{1,2} = -\dfrac{1}{\tau} \pm j\Omega$ de l'équation caractéristique sont complexes et conjuguées. On a alors :

$$X(t) = \underbrace{\left[A' \cos(\Omega t) + B' \sin(\Omega t)\right] e^{-t/\tau}}_{\text{régime transitoire}} \qquad + \qquad \underbrace{X_{\text{éq}}}_{\text{régime permanent}}$$

avec A' et B' deux constantes qui dépendent des conditions initiales.

♥ On peut également écrire $X(t) = C' \cos(\Omega t + \varphi) e^{-t/\tau} + X_{\text{éq}}$, où $C' = \sqrt{A'^2 + B'^2}$.



♥ $\Omega = \omega_0 \times \overbrace{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}^{\leq 1}$ n'est pas égal à ω_0, sauf quand Q tend vers l'infini. Un système oscillera donc d'autant plus lentement qu'il est amorti.

Régime apériodique critique

Si $Q = 1/2$, on se situe dans le cas **apériodique critique**. Ce cas est uniquement théorique, car Q n'est jamais exactement égal à $1/2$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Équation horaire d'un système masse-ressort amorti en régime apériodique

Énoncé

Soit un système masse-ressort horizontal, fixé à gauche au point O et dont l'extrémité droite M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $x(t)$ représente l'abscisse du point M par rapport au point O. Les frottements, de puissance $P = -\lambda v^2$, sont pris en compte.

Déterminer l'équation du mouvement portant sur $x(t)$, puis montrer que le mouvement est de type apériodique, sachant que $\lambda = 5\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$ et $k = 4\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Donner les valeurs numériques de τ_1 et τ_2.

Résolution

Le théorème de la puissance mécanique appliqué au point M donne que : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{n.c.}$, où $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}k(x-\ell_0)^2$ et $\mathcal{P}_{n.c} = -\lambda\dot{x}^2$.

Or, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x-\ell_0)$, donc : $m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x-\ell_0) = -\lambda\dot{x}^2$. En simplifiant par $\dot{x}$, il vient alors que $\boxed{m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = k\ell_0}$.

Divisons par m : $\ddot{x} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k}{m}\ell_0$. On veut mettre cette équation sous forme canonique : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$. Nécessairement, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 2\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda} = 0{,}4$ et $x_{\text{éq}} = \ell_0$.

La nature du régime est déterminée par la valeur de Q, qui est inférieure à $1/2$: on est donc en <u>régime apériodique</u>, et $x(t) = \ell_0 + Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}$.

Les expression de τ_1 et τ_2 se trouvent à partir des racines de l'équation caractéristique $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$. On a alors le discriminant $\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\times\omega_0^2 = 9\,\mathrm{SI} > 0$, ce qui donne les racines $r_1 = \dfrac{-\dfrac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta}}{2} = -1\,\mathrm{SI}$ et $r_2 = \dfrac{-\dfrac{\omega_0}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2} = -4\,\mathrm{SI}$.

On en déduit que $\boxed{\tau_1 = -\dfrac{1}{r_1} = 1\,\mathrm{s}}$ et que $\boxed{\tau_2 = -\dfrac{1}{r_2} = 0{,}25\,\mathrm{s}}$.

Exercice résolu

■ À revoir ■ Maîtrisé

Équation horaire d'un système masse-ressort amorti en régime pseudo-périodique

Énoncé

Soit un système masse-ressort horizontal, fixé à gauche au point O et dont l'extrémité droite M peut se déplacer. On note k la raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. $x(t)$ représente l'abscisse du point M par rapport au point O. Les frottements, de puissance $P = -\lambda v^2$, sont pris en compte.

Déterminer l'équation du mouvement portant sur $x(t)$, puis montrer que le mouvement est de type pseudo-périodique, sachant que $\lambda = 40\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$, $m = 16\,\mathrm{kg}$ et $k = 169\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Donner les valeurs numériques de Ω et τ.

Résolution

Le théorème de la puissance mécanique appliqué au point M donne que : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{n.c.}$, où $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}k(x-\ell_0)^2$ et $\mathcal{P}_{n.c} = -\lambda\dot{x}^2$.

Or, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x-\ell_0)$, donc : $m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x-\ell_0) = -\lambda\dot{x}^2$. En simplifiant par $\dot{x}$, il vient alors que $\boxed{m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = k\ell_0}$.

Divisons par m : $\ddot{x} + \dfrac{\lambda}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{k}{m}\ell_0$. On veut mettre cette équation sous forme canonique : $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}}$. Nécessairement, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 3{,}25\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda} = 1{,}3$ et $x_{\text{éq}} = \ell_0$.

La nature du régime est déterminée par la valeur de Q, qui est supérieure à $1/2$: on est donc en <u>régime pseudo-périodique</u>, et $x(t) = \ell_0 + (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\,e^{-t/\tau}$.

Les expression de Ω et τ se trouvent à partir des racines de l'équation caractéristique $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$. On a alors le discriminant $\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\times\omega_0^2 = -36\,\mathrm{SI} < 0$, ce qui donne les racines $r_{1,2} = \dfrac{-\dfrac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} = \underbrace{-1{,}25\,\mathrm{SI}}_{-1/\tau} \pm j\times\underbrace{3\,\mathrm{SI}}_{\Omega}$.

On en déduit que $\boxed{\tau = -\dfrac{1}{-1{,}25\,\mathrm{SI}} = 0{,}8\,\mathrm{s}}$ et que $\boxed{\Omega = 3\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$.