

Chapitre 1 : Grandeurs et unités

1 Les grandeurs physiques

1.1 Introduction

Une grandeur physique est une propriété de la nature (à comprendre dans le sens général) qui peut être quantifiée, par mesure ou par calcul.

Exemples : Une durée est une grandeur physique car on peut la mesurer à l'aide d'un chronomètre ; l'énergie cinétique est une grandeur physique car, connaissant la masse et la vitesse d'un objet, on peut opérer mathématiquement pour obtenir une valeur.

Contre-exemples : La patience d'un individu ou la beauté d'une œuvre d'art ne sont pas quantifiables (on ne peut pas leur associer un nombre objectif) : elles ne sont donc pas des grandeurs physiques.¹

Notons qu'une grandeur physique peut prendre de nombreuses formes mathématiques : il peut s'agir d'entiers naturels (modes propres d'une corde vibrante), d'entiers relatifs (nombre quantique magnétique), de nombres rationnels (spin d'une particule), de nombres réels (masse d'un objet), de nombres complexes (fonction d'onde d'une particule), de vecteurs réels ou complexes (conductivité réelle ou complexe d'un milieu)... L'idée est de pouvoir associer un nombre ou un ensemble de nombres, quelles que soient leurs formes, à une propriété de la nature.

1.2 Représentation des grandeurs

De manière assez surprenante, l'utilisation de nombres n'est pas liée directement à l'écriture. Si l'on date classiquement cette dernière aux alentours du IV^{ème} millénaire avant J.C., les premières traces des mathématiques leur sont très antérieures ; les os d'Ishango, datant d'environ 20 000 ans avant notre ère, sont des artefacts archéologiques découverts au Congo destinés à dénombrer par entailles.

Aujourd'hui, la façon la plus répandue d'utiliser la physique est *via* l'outil des mathématiques, et d'un système de symboles leur étant associé. Pendant vos années d'enseignement primaire et secondaire, vous avez appris à passer d'une écriture numérique (utilisant les chiffres de 0 à 9) à une écriture littérale (utilisant des lettres). C'est cette dernière représentation qui est omniprésente en physique à l'heure actuelle.

En plus de l'alphabet latin, on utilise très souvent l'alphabet grec, qui nous permet d'utiliser davantage de symboles (voir figure 1). Fondamentalement, rien ne nous empêche de nommer une masse t au lieu de m ; en pratique, il est très mal vu d'utiliser des symboles extravagants quand une convention est déjà installée.

Il est également courant d'utiliser des indices pour ne pas multiplier la liste classique de symboles. Ainsi, si le symbole classique pour l'énergie est \mathcal{E} , on dénotera l'énergie cinétique \mathcal{E}_c et l'énergie potentielle \mathcal{E}_p . Si plusieurs types d'énergie potentielles sont présentes dans un énoncé, on pourra les différencier en précisant leurs caractéristiques à nouveau en indice ; par exemple, l'énergie potentielle de pesanteur pourra s'écrire $\mathcal{E}_{p,\text{pes}}$ et l'énergie potentielle élastique pourra s'écrire $\mathcal{E}_{p,\text{él}}$ ².

1. Le critère principal est ici l'objectivité de la mesure ou du calcul. On pourrait très bien dire que la patience d'un professeur est proportionnelle à la durée que met celui-ci avant de s'énervier face à une copie pleine de taches, ou que la beauté d'une peinture est égale à la note qu'un panel d'expert lui attribuerait. Je ne suis malheureusement pas assez philosophe pour argumenter sur l'objectivité et la subjectivité, et je pense que vous avez tout de même une bonne idée de ce qu'est une grandeur physique.

2. Il est primordial de comprendre que l'idée est de se faire comprendre. On pourrait bien sûr écrire $\mathcal{E}_{\text{potentielle de pesanteur}}$, mais l'écriture $\mathcal{E}_{p,\text{pes}}$ est tout à fait compréhensible : c'est pourquoi on l'utilise et la préfère, de par sa concision.

nom (cas)	symbole	utilisation
alpha (minuscule)	α	angle, accélération angulaire
bêta (minuscule)	β	angle
gamma (minuscule)	γ	indice adiabatique
gamma (majuscule)	Γ	couple
delta (minuscule)	δ	variation résultant d'une accumulation, distance caractéristique
delta (majuscule)	Δ	variation macroscopique, axe
epsilon (minuscule)	ε	grandeur infinitésimale adimensionnée
thêta (minuscule)	θ	angle
lambda (minuscule)	λ	longueur d'onde
mu (minuscule)	μ	masse volumique, masse réduite
nu (minuscule)	ν	fréquence
xi (minuscule)	ξ	longueur adimensionnée
pi (minuscule)	π	constante mathématique
rhô (minuscule)	ρ	masse volumique
tau (minuscule)	τ	durée caractéristique
phi (minuscule)	ϕ ou φ	phase
chi (minuscule)	χ	électronégativité
psi (minuscule)	ψ	angle, fonction d'onde
oméga (minuscule)	ω	pulsation
oméga (majuscule)	Ω	pulsation

FIGURE 1 – Lettres grecques courantes en physique

On notera par ailleurs que l'indice 0, très souvent utilisé, peut correspondre à différents cas. \mathcal{E}_0 correspondra par exemple à l'énergie la plus basse que l'on puisse obtenir dans un système ; v_0 correspondra à la vitesse initiale de l'objet que l'on étudie ; ω_0 correspondra à la pulsation propre d'un système... L'indice 0 n'est donc pas à utiliser sans prudence, de peur de perdre le lecteur ou le correcteur trop pressé ou trop peu attentif.

En plus de ces symboles alphabétiques, une autre liste de symboles algébriques est régulièrement utilisée en physique (figure 2). Si beaucoup de ces symboles sont communs aux mathématiques, certains d'entre eux ne le sont pas du tout et peuvent induire des erreurs.

symbole	utilisation
\vec{a} ou a	vecteur a
\underline{a}	complexe a
\underline{a}^*	complexe conjugué de \underline{a}
$\frac{df}{dx}$	dérivée de la fonction f par rapport à la variable x
\dot{x}	dérivée temporelle de x
df	variation infinitésimale de f

FIGURE 2 – Symboles courants en physique

On notera que l'écriture « prime » (f') pour la dérivée n'est pas spontanément utilisée en physique, contrairement aux mathématiques. Dans le cas des fonctions à plusieurs variables, les mathématiciens préfèrent même voler la notation physicienne de la dérivée...

2 La représentation numérique des grandeurs physiques

Jusqu'à présent, nous avons parlé de grandeurs physiques, et donc quantifiables, sans nous intéresser à leur interprétation numérique. Par essence, le physicien se distingue du mathématicien car la théorie est en relation totale avec la pratique³. Si la théorie prédit qu'une pomme montera naturellement vers le ciel, le physicien aura le puissant outil de l'expérimentation pour déterminer si cette théorie est compatible avec la réalité⁴. Ainsi, il est nécessaire de pouvoir interpréter un résultat numérique.

2.1 Une convention de représentation : les unités

Revenons dans le passé, à une époque à laquelle vous n'étiez pas encore né-e. Afin d'étudier la météorologie de la planète Mars, la NASA a lancé en 1998 la sonde spatiale *Mars Climate Orbiter*. Le 23 septembre 1999, peu avant l'insertion en orbite de la sonde autour de la planète, son moteur principal est mis à feu comme prévu à 9h49 UT. Cette phase propulsée qui doit ralentir la sonde spatiale pour l'insérer en orbite autour de Mars doit durer 16 minutes et 23 secondes. Cinq minutes après la mise à feu, *Mars Climate Orbiter* passe derrière la planète, ce qui interrompt les communications. Si tout s'était bien passé, la sonde spatiale aurait dû émerger 20 minutes plus tard de l'autre côté de la planète et signaler sa présence en envoyant un signal radio. Mais celui-ci ne sera jamais reçu.

Les enquêteurs fournissent leurs conclusions dès le 29 octobre. Un logiciel développé par les ingénieurs de Lockheed, concepteurs de la sonde, communiquait la poussée des micro-propulseurs en unités de mesure anglo-saxonnes (livre-force - seconde), tandis que le logiciel de l'équipe de navigation du Jet Propulsion Laboratory qui recevait ces données pour les calculs des corrections de trajectoire attendait des données en unités du système métrique (newton - seconde), soit un facteur 4,5 de sous-estimation. Les petites corrections de trajectoire, effectuées au cours du transit vers Mars et faites sur la base des calculs erronés, avaient à chaque fois rapproché un peu plus la sonde spatiale de la surface de Mars et entraîné finalement sa destruction.

L'erreur est donc ici claire : les systèmes de représentation étaient différents. Ce cas est toujours d'actualité en 2020 : malgré la création du Système International d'Unités dès 1795, les États-Unis restent l'un des seuls états à reposer sur le système anglo-saxon.

Cependant, chaque système possède un point commun : des unités (par exemple, le livre-force et le newton pour les forces) permettent de communiquer un résultat de manière explicite et sans ambiguïté (enfin, normalement).

Ces unités sont **fondamentales** en sciences physiques : tout oubli sur une copie est **très pénalisant** et donne une très mauvaise image à la personne corrigeant une copie. Il faut donc prendre l'habitude de toujours annoncer un résultat avec une unité adaptée, ou bien se réserver une dizaine de minutes en fin d'épreuve pour les rajouter si besoin.

2.2 Incertitudes et chiffres significatifs

Puisque nous sommes en physique et non pas en mathématiques, il est pertinent de relever qu'un résultat n'est pas juste dépendant de l'unité lui étant associée. Effectivement, la mesure de la masse d'un atome d'hydrogène à l'aide d'un pèse-personne classique donnera un résultat de 0 kg, voire de 0,0 kg ou de 0,00 kg. On comprend évidemment que le problème est d'avoir un manque de précision sur notre outil de mesure, ce qui se reflète sur un résultat pas forcément exploitable⁵.

3. Sans vouloir partir en guerre contre les mathématiciens, qu'ils soient apprentis ou aguerris, je me souviens tout particulièrement d'un de mes cours d'épistémologie sur les pensées de Karl Popper (1902–1994). De manière caricaturale, une de ses grandes idées est d'affirmer qu'une discipline est une science si l'on peut la réfuter par l'expérience. Les mathématiques peuvent partir d'un ensemble d'axiomes et aboutir à des conclusions ; cependant, cet outil qu'est l'expérimentation leur est inaccessible.

4. Dire qu'une théorie est vraie ou fausse est compliqué. Par exemple, la mécanique "classique" de Newton n'est plus valable pour des masses trop grandes ou trop petites ; peut-on pour autant dire qu'elle est fausse, alors qu'elle permet d'envoyer des fusées dans l'espace ?

5. Si l'idée est de savoir si la masse d'un atome d'hydrogène est négligeable face à ma masse, le pèse-personne fait bien son travail. Si je veux étudier le mouvement de cet atome, le pèse-personne me laissera presque autant dans le flou qu'avant !

Ces incertitudes sur la mesure se reflètent dans le nombre de chiffres significatifs que l'on donne à la représentation numérique (ou valeur) d'une grandeur. S'il est évident que 15 cm est différent de 13 cm, il n'est pas forcément trivial que 15 cm et 14,7 cm peuvent être deux représentations différentes d'une même longueur.

- La première longueur, 15 cm, sous-entend que l'on est précis à un demi-centimètre près. La règle donnant cette mesure a, par exemple, une graduation allant de centimètre en centimètre. La longueur étant plus proche de 15 cm que de 14 cm ou 16 cm, j'écris $L = 15$ cm sans rajouter de chiffres derrière le 5. L'idée implicite est donc que l'on a $14,500\,000$ cm (avec une infinité de zéros) $\leq L < 15,500\,000$ cm (avec une infinité de zéros).
 - La deuxième longueur, 14,7 cm, sous-entend que l'on est précis à un demi-millimètre près. Le raisonnement précédent s'adapte ici : la longueur est plus proche de 14,7 cm que de 14,6 cm ou 14,8 cm.
- ☛ *Remarque* : On rappelle que l'arrondi de 2734,5 est 2735 et non pas 2734.

Il existe deux règles⁶ pour la propagation des chiffres significatifs dans un calcul :

- Si l'on multiplie ou divise deux grandeurs, on garde le minimum de chiffres significatifs entre ces deux grandeurs. Par exemple, si l'on connaît la distance Terre-Soleil $D = 1,50 \times 10^{11}$ m et la vitesse de la lumière $c = 299\,792\,458$ m · s⁻¹, on peut en déduire la durée Δt pour que celle-ci aille d'un astre à l'autre : $\Delta t = \frac{D}{c}$. À la calculatrice, on aura $\Delta t = 500,346\,142\,797$ s ; sur la copie, on gardera le minimum entre 3 et 9 chiffres significatifs (donc 3) : $\Delta t = 500$ s.
- Si l'on additionne ou soustrait deux grandeurs, on garde autant de précision que la grandeur la moins précise. Par exemple, on veut mesurer la durée que met une personne pour aller de la plage jusqu'à la bouée située dans la mer. Cette personne met $t_1 = 100,5$ s pour se changer, $t_2 = 15,36$ s pour aller jusqu'à la mer puis $t_3 = 250,75$ s pour nager jusqu'à la bouée. À la calculatrice, la durée totale $t_1 + t_2 + t_3$ donne 366,61 s ; sur la copie, on aura autant de précision que le résultat le moins précis (t_1 , soit un chiffre après la virgule) : $t_1 + t_2 + t_3 = 367$ s.

2.3 Quelques échelles

Afin de se donner des ordres d'idée sur des grandeurs courantes, sont représentées ci-dessous (figures 3 et 4) des échelles sur des masses et longueurs typiques dans l'Univers. Ces valeurs ne sont bien sûr pas toutes à savoir !

valeur	masse typique	commentaire
10^{53} kg	Univers visible	...
10^{41} kg	galaxie	...
2×10^{30} kg	Soleil	également notée M_{\odot}
$5,98 \times 10^{24}$ kg	Terre	également notée M_{\oplus}
$1,67 \times 10^{-27}$ kg	nucléon	la différence entre le proton et le neutron est ici négligeable et négligée
$9,1 \times 10^{-31}$ kg	électron	...

FIGURE 3 – Quelques masses typiques

6. Voir les fiches de révision pour l'été.

valeur	longueur typique	commentaire
50 Gpc $\approx 1,5 \times 10^{27}$ m	taille actuelle de l'Univers observable	en augmentation (expansion de l'Univers)
800 kpc $\approx 2,5 \times 10^{22}$ m	distance à la galaxie d'Andromède	galaxie la plus proche de la Voie Lactée
20 kpc $\approx 6 \times 10^{20}$ m	rayon de la voie Lactée	...
9,46 $\times 10^{15}$ m	année-lumière	distance parcourue en un an par la lumière dans le vide
150 $\times 10^6$ km = 1,5 $\times 10^{11}$ m	distance Terre-Soleil	également nommée "unité astronomique" (et notée u.a.)
696 000 km = 6,96 $\times 10^8$ m	rayon actuel du Soleil	...
380 000 km = 3,8 $\times 10^8$ m	distance Terre-Lune	augmente de 3,8 cm par an
6378 km = 6,378 $\times 10^6$ m	rayon de la Terre	...
1 $\mu\text{m} = 1 \times 10^{-6}$ m	bactérie	...
700 nm = 7,0 $\times 10^{-7}$ m	longueur d'onde du rouge	...
350 nm = 3,5 $\times 10^{-7}$ m	longueur d'onde du violet	...
1 Å = 1 $\times 10^{-10}$ m	diamètre d'un atome d'hydrogène	1 angström

FIGURE 4 – Quelques longueurs typiques

3 Analyse dimensionnelle

3.1 Unités fondamentales

Si un objet se déplace d'une distance d pendant une durée Δt , on définit classiquement sa vitesse moyenne v_{moy} comme étant égale au rapport entre d et Δt : $v_{\text{moy}} = \frac{d}{\Delta t}$. Si l'on mesure la distance en mètres et la durée en secondes, il est alors évident que l'unité de la vitesse moyenne sera le mètre par seconde.

Par cet argument rapide, nous montrons que l'unité d'une grandeur (ici la vitesse moyenne) peut être directement reliée aux unités d'autres grandeurs. En tenant compte de nombreuses lois physiques reliant différentes grandeurs, on peut alors réduire l'ensemble des unités à sept unités fondamentales. Les choix du Système International est aujourd'hui fondé sur des constantes physiques de l'Univers (voir figure 5).

Historiquement, les unités étaient définies par des étalons de masse, longueurs, etc. ; pour étendre ce choix à d'autres villes et nations, des copies de ces étalons ont dû être produites. Si une mesure "grossière" ne révèle pas de défauts particuliers pour ces copies, une étude plus précise révélera inévitablement un défaut ou un surplus de masse, de longueur, dues à l'imprécision de la copie et à des phénomènes extérieurs (dépôt de poussière, radioactivité naturelle...). C'est entre autres pour ces raisons que le Système International a préféré fixer des constantes physiques pour définir les unités ; la dernière redéfinition a votée en 2018 et entrée en vigueur en 2019.

unité	symbole	définition
seconde	s	La fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé $\Delta\nu$ est égale à 9 192 631 770 lorsqu'elle est exprimée en s^{-1}
mètre	m	La vitesse de la lumière dans le vide c est égale à 299 792 458 lorsqu'elle est exprimée en $m \cdot s^{-1}$
kilogramme	kg	La constante de Planck h est égale à $6,626\,070\,15 \times 10^{-34}$ lorsqu'elle est exprimée en $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
ampère	A	La charge élémentaire e est égale à $1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$ quand elle est exprimée en $A \cdot s$
kelvin	K	La constante de Boltzmann k_B est égale à $1,380\,649 \times 10^{-23}$ lorsqu'elle est exprimée en $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
mole	mol	La constante d'Avogadro \mathcal{N}_A est égale à $6,022\,140\,76 \times 10^{23}$ lorsqu'elle est exprimée en mol^{-1}
candela	cd	La valeur numérique de l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12} s^{-1}$ K_{cd} est égale à 683 lorsqu'elle est exprimée en $cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$

FIGURE 5 – Unités du Système International

3.2 Unités dérivées et préfixes

De nombreuses unités que vous avez aperçues au long de vos cours de physique-chimie ne sont pas présentes dans le tableau de la figure 5 ; par exemple, le joule J ou le newton N.

Question 1 : On admet que l'énergie \mathcal{E} d'un photon de fréquence ν est $\mathcal{E} = h \times \nu$. Exprimer le joule J en fonction des unités SI.

Question 2 : On admet que si un objet de masse m soumis à une force F se déplace en ayant une accélération a , alors $m \times a = F$. Rappeler l'unité SI de l'accélération a , puis exprimer le newton N en fonction des unités SI.

On retient que toute autre unité que celles présentes dans le tableau de la figure 5 peut s'exprimer en fonction de ces dernières. Les unités non fondamentales sont appelées unités dérivées.

En plus de ces unités dérivées, on définit un ensemble de préfixes permettant de mettre en avant des ordres de grandeurs : ce sont les multiples et sous-multiples des unités (figure 6).

préfixe	symbole	valeur
téra-	T	10^{12}
giga-	G	10^9
méga-	M	10^6
kilo-	k	10^3
hecto-	h	10^2
centi-	c	10^{-2}
milli-	m	10^{-3}
micro-	μ	10^{-6}
nano-	n	10^{-9}
pico-	p	10^{-12}
femto-	f	10^{-15}

FIGURE 6 – Multiples et sous-multiples

3.3 Grandeurs de base et dimensions

Réfléchir avec les unités pour faire le lien entre les grandeurs reste biaisé, car choisir un système d'unité est purement arbitraire. On peut aisément concevoir qu'une société de fourmis préférerait prendre des masses et longueurs plus faibles en tant qu'unités fondamentales ; au contraire, des éléphants riraient d'une unité aussi petite que le kilogramme !

Plutôt que de s'attarder sur un choix d'unités, les physiciens préfèrent parfois se fonder sur des dimensions, qui reflètent l'idée se cachant derrière les unités (voir figure 7).

grandeur de base	symbole de la dimension
temps ou durée	T
longueur	L
masse	M
intensité électrique	I
température	Θ
quantité de matière	N
intensité lumineuse	J

FIGURE 7 – Grandeurs de base et dimensions associées

La différence entre unité et dimension s'illustre à l'aide d'un exemple simple : par définition, le radian est défini comme étant l'angle formé par un arc de cercle dont la longueur est égale à son rayon. Mathématiquement, avec un peu de trigonométrie, on en déduit que le radian est le rapport de deux longueurs, ce qui veut dire que le radian n'a pas de dimension physique. Et pourtant, il s'agit bien d'une unité ! On dit que le radian est adimensionné.

Lorsqu'on veut déterminer la dimension d'une grandeur g , on cherche à avoir une expression du type $[g] = T^\alpha \times L^\beta \times M^\gamma \times I^\delta \times \Theta^\varepsilon \times N^\mu \times J^\nu$, où les lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu$ et ν sont des nombres rationnels, possiblement entiers. $[g]$ représente la dimension de la grandeur g .

☛ *Remarque* : Il faut faire attention à bien différencier $[T]$ et T ; le premier correspond à la dimension d'une grandeur nommée T (qui pourrait être une période temporelle, la tension d'une corde, une température...) alors que le second correspond à la dimension temporelle, sans doute aucun.

Question 3 : Le lien entre l'intensité i et la charge débitée q est $i = \frac{dq}{dt}$. Déterminer la dimension d'une charge électrique.

Question 4 : L'énergie cinétique \mathcal{E}_c d'un objet de masse m se déplaçant à la vitesse v est $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$. Déterminer la dimension d'une énergie.

Question 5 : L'énergie nécessaire \mathcal{E} pour déplacer une charge q d'un point A à un point B est $\mathcal{E} = q U_{AB}$ où U_{AB} est la tension électrique entre les points A et B . Déterminer la dimension d'une tension électrique.

3.4 Théorème de Vaschy-Buckingham (théorème Pi)

En mathématiques, le théorème de Vaschy-Buckingham, ou théorème Pi, est un des théorèmes de base de l'analyse dimensionnelle. Ce théorème établit, dans ses grandes lignes et sous certaines hypothèses simplificatrices, que si l'on peut déterminer à une constante multiplicative près l'expression d'une grandeur recherchée en fonction des données de l'énoncé.

Prenons l'exemple classique d'un objet de masse m tombant dans un champ de pesanteur d'intensité g . On note z la hauteur parcourue pendant une durée t ; l'objectif est de chercher l'expression de z en fonction de m , g et t .

Question 6 : Déterminer les dimensions de m , g , z et Δt .

Question 7 : On cherche z sous la forme $z = \Pi \times m^A \times g^B \times t^C$ avec Π , A , B et C des constantes adimensionnées. À l'aide de l'analyse dimensionnelle menée précédemment, déterminer un système portant sur A , B et C .

Question 8 : Résoudre le système et montrer que $z = \Pi \times gt^2$. Quelle est la valeur de Π qui permet de se rattacher à la théorie de Newton ?

Le théorème Pi ne permet pas de déterminer *ex nihilo* les valeurs de Π . En revanche, l'expérimentation nous permet d'en déduire des valeurs approchées, et de mettre en évidence des relations sans avoir à faire appel à une quelconque théorie (ici, les lois de Newton n'ont pas été utilisées sauf pour déterminer la valeur de Π , qui aurait pu être déterminée expérimentalement).