

1 Donner un résultat avec le bon nombre de chiffres significatifs

Les chiffres significatifs

Un chiffre significatif est un chiffre important dans un nombre : il signifie quelque chose. Il n'est pas significatif si l'on peut le supprimer et que cela ne change rien à la compréhension. Il existe une convention dans le monde entier pour expliquer tout cela.

- Exemple 1 : $t = 00\ 065,634\text{s}$. Par convention, aucun zéro à gauche ne compte : écrire $t = 65,634\text{s}$ est exactement la même chose. Il y a donc 5 chiffres significatifs ici.
- Exemple 2 : $L = 0,07\text{ m}$ et $L = 7\text{ cm}$ et $L = 7 \times 10^{-2}\text{ m}$ sont des écritures identiques. Convertir une unité en un de ses (sous-)multiples ne change rien, du moment qu'on ne rajoute pas de zéro à droite ! Il y a donc 1 chiffre significatif ici.
- Exemple 3 : $L = 7\text{ cm}$ et $L = 70\text{ mm}$ ne représentent pas la même chose. En effet, par convention, les zéros à droite sont significatifs. La première mesure n'a qu'un chiffre significatif, alors que la deuxième en possède deux.

Chiffres significatifs pour les multiplications et divisions

Si on multiplie ou divise deux nombres, le résultat doit garder le minimum de chiffres significatifs entre ces deux nombres.

- Exemple 1 : $A = 0,6723 \times 25 = 16,8075$ à la calculatrice, mais on ne peut garder que deux chiffres (car 25 n'en contient que deux). On écrit donc $A = 17$ (en pensant bien à arrondir à l'unité près) ;
- Exemple 2 : $B = 67,23 \times 25 = 1680,75$ à la calculatrice, mais on ne peut garder que deux chiffres (car 25 n'en contient que deux). Or, écrire « 1700 » donne quatre chiffres significatifs ! On écrit donc $B = 17 \times 10^2$, ou bien $B = 1,7 \times 10^2$ en écriture scientifique.

On remarquera donc que « 10... » ne comptent pas comme des chiffres significatifs !

Chiffres significatifs pour les additions et soustractions

Si on additionne ou soustrait deux nombres, le résultat doit garder autant de décimales que le nombre le moins précis.

- Exemple 1 : $A = 167,73 + 25 = 192,73$ à la calculatrice, mais on ne peut pas être plus précis qu'à l'unité près (car 25 n'est précis qu'à l'unité près). On écrit donc $A = 193$ (en pensant bien à arrondir à l'unité près) ;
- Exemple 2 : $B = 150 - 2 \times 10^1 = 130$ à la calculatrice, mais on ne peut pas être plus précis qu'à la dizaine près (car 2×10^1 n'est précis qu'à la dizaine près). On écrit donc $B = 13 \times 10^1$, ou bien $B = 1,3 \times 10^2$ en écriture scientifique.

Exercice 1

Déterminer le nombre de chiffres significatifs pour chaque valeur.

2,021	0,4	$1,1 \times 10^3$
0,0203	$1,81 \times 10^{-3}$	32,50

Exercice 2

On veut calculer le poids P de différentes masses m à l'aide de la relation $P = m \times g$, où $g = 9,81\text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ est l'intensité de la pesanteur. Remplir le tableau ci-dessous.

m (kg)	1,0	2,05	3	4,195	5,00
P (N)					

Exercice 3

Déterminer le résultat de chaque opération, avec le bon nombre de chiffres significatifs.

$12,0 + 16,0 =$	$2 + 3,1 =$
$0,42 + 0,315 =$	$1,2034 + 15,12 =$

Corrigé de l'exercice 1.1

2,021 possède 4 chiffres significatifs.

0,4 possède 1 chiffre significatif (les zéros à gauche ne comptent pas).

1,1 × 10³ possède 2 chiffres significatifs (le symbole 10³ est une représentation pour donner l'ordre de grandeur, mais ne donne pas d'information sur la précision).

0,0203 possède 3 chiffres significatifs.

1,81 × 10⁻³ possède 3 chiffres significatifs.

32,50 possède 4 chiffres significatifs (les zéros de droite comptent bien).

Corrigé de l'exercice 1.2

m (kg)	1,0	2,05	3	4,195	5,00
P (N)	9,81	20,1	3×10^1	41,2	49,1

Corrigé de l'exercice 1.3

$12,0 + 16,0 = 28,0$	$2 + 3,1 = 5$
$0,42 + 0,315 = 0,74$	$1,2034 + 15,12 = 16,32$

2 Manipuler les puissances de 10 et écrire un résultat en notation scientifique

Les puissances de 10

- Le nombre 10^n correspond au nombre 1 suivi à droite par n zéros. Exemples : $10^3 = 1\ 000$ et $10^5 = 100\ 000$;
- Le nombre 10^n correspond au nombre 1 précédé à gauche par n zéros, avec une virgule après le premier zéro. Exemples : $10^{-3} = 0,001$ et $10^{-5} = 0,000\ 01$;
- Le nombre 10^0 est égal à 1.

L'écriture scientifique

On sait qu'un nombre peut s'écrire de différentes façons avec une puissance de 10 :

$$596\ 000 = 596 \times 10^3 = 59,6 \times 10^4 = 5,96 \times 10^5$$

Parmi ces écritures, celle qu'on appelle *scientifique* est celle qui ne comporte qu'un chiffre non nul avant la virgule. Exemples :

- $596\ 000 = 5,96 \times 10^5$;
- $0,000\ 478 = 4,78 \times 10^{-4}$;
- $459,1 \times 10^2 = 4,591 \times 10^4$.

Il faut réussir, en ATS, à écrire de manière systématique un nombre avec l'écriture scientifique.

Les opérations sur les puissances de 10

- Dans le cas d'une multiplication : $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$. Exemples : $10^3 \times 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$ et $10^{-2} \times 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3$;
- Dans le cas d'une division : $\frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p}$. Exemples : $\frac{10^6}{10^4} = 10^{6-4} = 10^2$ et $\frac{10^5}{10^{-3}} = 10^{5-(-3)} = 10^8$.
- Dans le cas d'une puissance : $(10^n)^p = 10^{n \times p}$. Exemples : $(10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6$ et $(10^{-2})^5 = 10^{-2 \times 5} = 10^{-10}$.

Exercice 1 (avec calculatrice)

Écrire pour chaque calcul le résultat correspondant en écriture scientifique et avec le bon nombre de chiffres significatifs.

$$\bullet U = R \times I = 220 \times 30 \times 10^{-3} = \quad \quad \quad \text{V} ;$$

$$\bullet d = v \times \Delta t = 25 \times 60 = \quad \quad \quad \text{m} ;$$

$$\bullet F = \frac{V_{\text{filles}}}{V_{\text{mère}}} = \frac{1 \times 10^3}{20 \times 10^{-3}} = \quad \quad \quad .$$

Exercice 2 (sans calculatrice)

La force gravitationnelle s'exerçant entre deux corps A et B de masses respectives m_A et m_B et séparés par une distance d a pour expression : $F_G = G \times \frac{m_A \times m_B}{d^2}$, où G est la constante gravitationnelle.

On donne les ordres de grandeur de chaque terme : $m_A \sim 10^{-30}$ kg ; $m_B \sim 10^{-27}$ kg ; $G \sim 10^{-10}$ SI ; $d \sim 10^{-11}$ m. On admet que chaque grandeur est donnée dans la bonne unité.

Déterminer l'ordre de grandeur de F_G (c'est-à-dire : $F_G \sim 10^p$ N avec p à déterminer), sans utiliser votre calculatrice.

Exercice 3 (sans calculatrice)

La célérité c de la lumière dans le vide vaut approximativement trois cent mille kilomètres par seconde.

Donner l'écriture scientifique de c en mètre par seconde, en n'utilisant que trois chiffres significatifs.

Exercice 4 (sans calculatrice)

Le rayon du noyau r_{noyau} d'un atome est environ cent mille fois plus petit que le rayon de l'atome r_{atome} . Entourer les relations correctes.

$$\frac{r_{\text{atome}} = 10^{-5} \times r_{\text{noyau}}}{r_{\text{atome}} = 10^5 \times r_{\text{noyau}}} \quad \left| \quad \frac{r_{\text{noyau}}}{r_{\text{atome}}} = 10^{-5} \quad \left| \quad \frac{r_{\text{noyau}}}{r_{\text{atome}}} = 10^5 \right. \right.$$

$$\left. \frac{r_{\text{atome}}}{r_{\text{noyau}}} = 10^5 \right.$$

Corrigé de l'exercice 2.1

- $U = R \times I = 220 \times 30 \times 10^{-3} = 6,6 \text{ V}$;
- $d = v \times \Delta t = 25 \times 60 = 1,5 \times 10^3 \text{ m}$;
- $F = \frac{V_{\text{filie}}}{V_{\text{mère}}} = \frac{1 \times 10^3}{20 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^4$.

Corrigé de l'exercice 2.2

$$\begin{aligned} F_G &= G \times \frac{m_A \times m_B}{d^2} \sim 10^{-10} \times \frac{10^{-30} \times 10^{-27}}{(10^{-11})^2} = 10^{-10} \times \frac{10^{-30-27}}{10^{-11 \times 2}} \\ &= 10^{-10} \times \frac{10^{-57}}{10^{-22}} = 10^{-10} \times 10^{-57-(-22)} = 10^{-10} \times 10^{-35} \\ &= 10^{-10-35} = 10^{-45} \text{ N} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2.3

$300\,000 = 3 \times 100\,000 = 3 \times 10^5$ donc $c = 3,00 \times 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.
Or, $1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $c = 3,00 \times 10^5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Corrigé de l'exercice 2.4

$100\,000 = 10^5$ donc il faut multiplier le rayon du noyau par 10^5 pour qu'il fasse la même taille que le rayon de l'atome : $10^5 \times r_{\text{noyau}} = r_{\text{atome}}$.

En divisant par r_{noyau} , il vient alors que $10^5 = \frac{r_{\text{atome}}}{r_{\text{noyau}}}$.

On peut passer à l'inverse cette équation : $\frac{1}{10^5} = \frac{r_{\text{noyau}}}{r_{\text{atome}}}$, ce qui signifie que $10^{-5} = \frac{r_{\text{noyau}}}{r_{\text{atome}}}$.

3 Manipuler une expression littérale

Résoudre $x + a = b$

Pour isoler x dans l'équation $x + a = b$, il faut se « débarrasser » de $+a$. L'opération inverse de l'addition étant la soustraction, on soustrait a de chaque côté de l'équation : $x + a - a = b - a$, d'où :

$$x = b - a$$

Résoudre $a \times x = b$

Pour isoler x dans l'équation $a \times x = b$, il faut se « débarrasser » de $a \times$. L'opération inverse de la multiplication étant la division, on divise par a de chaque côté de l'équation : $\frac{a \times x}{a} = \frac{b}{a}$, d'où :

$$x = \frac{b}{a}$$

Résoudre $\frac{x}{a} = b$

Pour isoler x dans l'équation $\frac{x}{a} = b$, il faut se « débarrasser » de $\frac{\quad}{a}$. L'opération inverse de la division étant la multiplication, on multiplie par a de chaque côté de l'équation : $\frac{x \times a}{a} = b \times a$, d'où :

$$x = b \times a$$

Résoudre $\frac{a}{x} = b$

Pour isoler x dans l'équation $\frac{a}{x} = b$, il faut déjà avoir x au numérateur. Pour échanger de place numérateur et dénominateur, on passe alors à l'inverse : $\frac{x}{a} = \frac{1}{b}$. On multiplie alors par a , ce qui donne :

$$x = \frac{a}{b}$$

Exercice 1

- | | |
|--|--|
| 1. Isoler W dans $\Delta U = W + Q$ | 2. Isoler v_r dans $v_a = v_r + v_e$ |
| 3. Isoler K dans $K - V = L$ | 4. Isoler \mathcal{E}_c dans $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ |
| 5. Isoler X_A dans $X_B - X_A = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}}$ | 6. Isoler t_1 dans : $\Delta t = t_2 - t_1$ |

Exercice 2

- | | |
|--|--|
| 1. Isoler a_x dans $m \times a_x = F_x$ | 2. Isoler m dans $E = m \times c^2$ |
| 3. Isoler p dans $p \times V = n \times R \times T$ | 4. Isoler V_i dans $c_i \times V_i = c_f \times V_f$ |
| 5. Isoler E_x dans $k_x \times E_x = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ | 6. Isoler ω dans $kx = \omega t$ |

Exercice 3

- | | |
|--|---|
| 1. Isoler Q dans $S_e = \frac{Q}{T}$ | 2. Isoler V dans $\rho = \frac{m}{V}$ |
| 3. Isoler m dans $n = \frac{m}{M}$ | 4. Isoler N dans $n = \frac{N}{\mathcal{N}_A}$ |
| 5. Isoler T dans $\mathcal{E}_v = \frac{3}{2}kT$ | 6. Isoler k dans $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ |

Exercice 4

- | | |
|--|---|
| 1. Isoler y dans $P_1 = \mu gy + P_2$ | 2. Isoler λ dans $Q = \lambda \times L + \mu \times V$ |
| 3. Isoler m dans $H = \frac{p^2}{2m} + V$ | 4. Isoler ℓ_1 dans $\mathcal{M}_O = m_1 \ell_1 g + m_2 \ell_2 g$ |
| 5. Isoler Q_c dans $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$ | 6. Isoler t'_2 dans $t_1 - t_2 = \gamma \times (t'_1 - t'_2)$ |

Exercice 5

Isoler h dans $F = G \times \frac{m \times M}{(R + h)^2}$.

Corrigé de l'exercice 3.1

- $\Delta U = W + Q$ donc $W + Q = \Delta U$. On retranche Q : $W + Q - Q = \Delta U - Q$, d'où : $W = \Delta U - Q$.
- $v_a = v_r + v_e$ donc $v_r + v_e = v_a$, et alors $v_r = v_a - v_e$.
- On ajoute V de chaque côté de l'équation : $K - V + V = L + V$ donc $K = L + V$.
- $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m$ donc $\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p$.
- On veut isoler X_A , c'est-à-dire écrire $X_A = \dots$. Pour cela, on peut ajouter X_A de chaque côté : $X_B - X_A + X_A = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}} + X_A$, c'est-à-dire : $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}} + X_A = X_B$.
On retranche alors $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}}$ de chaque côté de l'équation : $X_A + \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}} - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}} = X_B - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}}$,
donc : $X_A = X_B - \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{D}}$.
- $\Delta t = t_2 - t_1$ donc $\Delta t + t_1 = t_2$, et alors $t_1 = t_2 - \Delta t$.

Corrigé de l'exercice 3.2

- On divise par m de chaque côté : $a_x = \frac{F_x}{m}$.
- On divise par c^2 de chaque côté : $m = \frac{E}{c^2}$.
- On divise par V de chaque côté : $p = \frac{nRT}{V}$.
- $V_i = \frac{c_f V_f}{V_i}$
- $k_x = \frac{\varepsilon_0}{E_x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \times E_x}$
- $\omega = \frac{kx}{t}$

Corrigé de l'exercice 3.3

- On multiplie par T de chaque côté : $Q = S_e \times T$.

- $V = \frac{m}{\rho}$
- $m = n \times M$
- $N = n \times \mathcal{N}_A$
- On divise par $\frac{3}{2}k$: $T = \frac{\mathcal{E}_v}{\frac{3}{2}k} = \frac{\mathcal{E}_v}{\frac{3k}{2}} = \frac{2\mathcal{E}_v}{3k}$.
- $k = \frac{\omega}{\varphi}$

Corrigé de l'exercice 3.4

- $P_1 = \mu g y + P_2$ donc $\mu g y = P_1 - P_2$, d'où : $y = \frac{P_1 - P_2}{\mu g}$.
- $Q = \lambda L + \mu V$ donc $\lambda L = Q - \mu V$, d'où : $\lambda = \frac{Q - \mu V}{L}$.
- $H = \frac{p^2}{2m} + V$ donc $\frac{p^2}{2m} = H - V$. On en déduit que $\frac{2m}{p^2} = \frac{1}{H - V}$, d'où :
 $m = \frac{p^2}{2(H - V)}$.
- $\ell_1 = \frac{\mathcal{M}_O - m_2 \ell_2 g}{m_1 g}$
- $Q_C = -\frac{T_C Q_F}{T_F}$
- $t'_1 - t'_2 = \frac{t_1 - t_2}{\gamma}$ donc $t'_2 = t'_1 - \frac{t_1 - t_2}{\gamma}$.

Corrigé de l'exercice 3.5

On inverse l'équation de chaque côté : $\frac{1}{F} = \frac{(R + h)^2}{G \times m \times M}$. Il vient alors que $(R + h)^2 = \frac{GmM}{F}$, et donc que $R + h = \sqrt{\frac{GmM}{F}}$. On en déduit que $h = \sqrt{\frac{GmM}{F}} - R$.

4 Faire une application numérique sans calculatrice

Rappels sur les racines et les puissances

- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$;
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$;
- $(a + b)^n \neq a^n + b^n$;
- $\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Quelques approximations sur des constantes mathématiques

- $\pi \approx 3$;
- $\pi^2 \approx 10$;
- $\sqrt{2} \approx 1,4$;
- $\sqrt{3} \approx 1,7$;
- $\sqrt{10} \approx 3,2$.

Méthodes pour les applications numériques sans calculatrice

- Si l'on doit calculer \sqrt{a} , avec a différent de 2, 3 ou 10, il faut se rapprocher du carré le plus proche de a . Par exemple, on a $\sqrt{77} \approx \sqrt{81} = 9$ et $\sqrt{105} \approx \sqrt{100} = 10$. Si a est « entre deux carrés », on coupe la poire en deux ; par exemple, 30 est entre $25 = 5^2$ et $36 = 6^2$, donc on va écrire $\sqrt{30} \approx 5,5$ (ce qui n'est pas si éloigné de la valeur réelle de 5,477) ;
- Si l'on doit calculer le carré d'un nombre décimal, on peut essayer de l'écrire sous forme de fraction. Par exemple, $3,5^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \approx \frac{50}{4} = 12,5$.

Exercice 1 (sans calculatrice)

Calculer la puissance $\mathcal{P} = R \times i^2$ (en watt W) dissipée par effet Joule aux bornes d'une résistance $R = 5 \text{ k}\Omega$, avec $i = 2,5 \text{ mA}$.

Exercice 2 (sans calculatrice)

Une balle de masse $m = 3 \text{ kg}$ chute dans le vide sans frottements d'une hauteur $h = 10 \text{ m}$. Si l'on note v_f sa vitesse juste avant de toucher le sol, on a, par conservation de l'énergie mécanique, $mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$, avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Déterminer la valeur de v_f .

Exercice 3 (sans calculatrice)

Soit $\Delta p = 1 \text{ kPa}$ la différence de pression entre deux points d'un même fluide séparés d'une dénivellation $h = 20 \text{ cm}$. On admet que l'on a $\Delta p = \mu \times g \times h$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Déterminer la masse volumique μ du fluide (qui s'exprime en kg/m^3).

Exercice 4 (sans calculatrice)

La loi des gaz parfaits stipule qu'un tel gaz vérifie l'équation $p \times V = n \times R \times T$ avec p la pression du gaz, V son volume, n la quantité de gaz, $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits et T la température du gaz (en kelvin K).

Quel est le volume pris par une mole de gaz parfait à une température de 288 K (c'est-à-dire de 15°C) et à une pression de $1 \times 10^5 \text{ Pa}$? L'exprimer en mètre cube m^3 (unité SI) puis en litre L.

Exercice 5 (sans calculatrice)

On a $R = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ avec $R = 1 \text{ kW}/\text{m}^2$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Proposer un ordre de grandeur pour E_0 (qui s'exprime en volt par mètre $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$) à un chiffre significatif près.

Corrigé de l'exercice 4.1

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= R \times i^2 \\
 &= 5 \times 10^3 \times (2,5 \times 10^{-3})^2 \\
 &= 5 \times 10^3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 1 \times 10^{-6} \\
 &= \frac{125}{4} \times 10^{3-6} \approx \frac{120}{4} \times 10^{-3} \\
 &= 30 \text{ mW}
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.2

$$\begin{aligned}
 v_f &= \sqrt{2gh} \\
 &\approx \sqrt{2 \times 10 \times 10} \\
 &= \sqrt{2} \times \sqrt{100} \\
 &\approx 1,4 \times 10 \\
 &= 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.3

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{\Delta p}{gh} \\
 &= \frac{1000}{10 \times 0,2} \\
 &= \frac{1000}{100 \times 2} \\
 &= \frac{10}{2} \\
 &= 5 \text{ kg/m}^3
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.4

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{nRT}{p} \\
 &= \frac{1 \times 8,314 \times 288}{1 \times 10^5} \\
 &\quad \frac{25}{\approx 3} \\
 &\approx 1 \times \underbrace{8,3}_{\approx 3} \times 300 \times 1 \times 10^{-5} \\
 &= 25 \times 100 \times 1 \times 10^{-5} \\
 &= 25 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\
 &= 25 \text{ L}
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 4.5

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \sqrt{2R\mu_0 c} \\
 &= \sqrt{2 \times 10^3 \times \underbrace{4\pi}_{\approx 12} \times 10^{-7} \times 3 \times 10^7} \\
 &\approx \sqrt{72 \times 10^3} \\
 &= \sqrt{\underbrace{7,2}_{\text{compris entre } 2^2 \text{ et } 3^2}} \times \sqrt{10^4} \\
 &\approx 2,5 \times 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}
 \end{aligned}$$