Optique géométrique 1

1 Lois de Snell-Descartes

1.1 Rappels et compléments de seconde et de première

Un **milieu transparent** est un milieu dans lequel la lumière peut se propager sans que son amplitude ne varie au long de sa trajectoire.

La lumière se propage à vitesse finie, qui dépend du milieu en question. Ainsi, la célérité de la lumière dans le vide, qu'il est impossible de dépasser, est égale à $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, que l'on approximera souvent à $c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

> **Indice optique d'un milieu transparent**
> L'indice optique n d'un milieu transparent est défini comme étant le rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide c et la vitesse de la lumière dans ce milieu v :
> $$n = \frac{c}{v}$$
> Puisque v est toujours inférieur à c, on a nécessairement $n \geq 1$.

Question 1 : On donne la vitesse de la lumière dans l'eau $v_{\text{eau}} = 299\,704{,}6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$; dans l'air $v_{\text{air}} = 224{,}9 \times 10^{3}\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$; dans le verre $v_{\text{verre}} = 197 \times 10^{3}\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. En déduire l'indice optique de chacun de ces milieux.

Dans un milieu transparent et homogène, la lumière se propage de manière rectiligne. À l'interface entre deux milieux, une onde lumineuse incidente ne se propagera plus dans la même direction (voir figure 1) :

– Une partie de l'onde sera renvoyée vers le milieu d'origine : c'est l'onde **réfléchie** ;

– Une partie de l'onde peut traverser l'interface et pénétrer dans le deuxième milieu : c'est l'onde **réfractée**.

> **Lois de Snell-Descartes**
> *Première loi de Snell-Descartes :* Les rayons réfléchi et réfracté sont contenus dans le plan d'incidence, défini comme étant le plan contenant le rayon incident et la normale au dioptre.
> *Deuxième loi de Snell-Descartes (loi de la réflexion) :* L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence : $r = i_1$.
> *Troisième loi de Snell-Descartes (loi de la réfraction) :* Le sinus de l'angle de réfraction est proportionnel au sinus de l'angle d'incidence : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Remarque : Lorsque l'on a $n_2 > n_1$, le rayon réfracté se rapproche de la normale. Lorsque l'on a $n_2 < n_1$, le rayon réfracté s'éloigne de la normale.

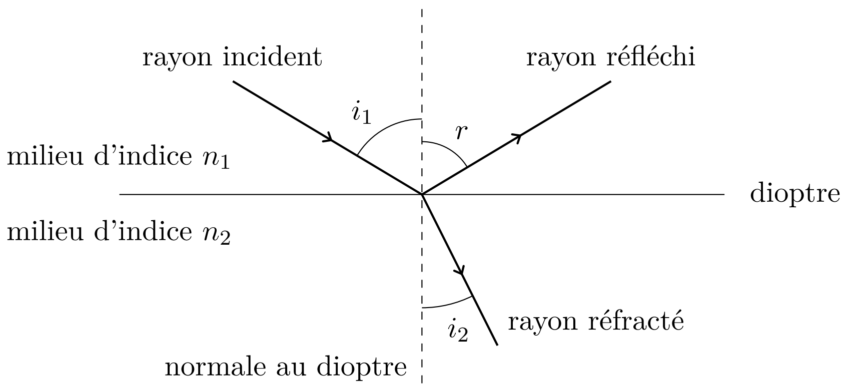

FIGURE 1 – Représentation des phénomènes de réflexion et de réfraction sur un dioptre.

1.2 "Démonstration" de la loi de la réfraction

Cette partie a pour but de faire comprendre pourquoi cette loi est "logique" mathématiquement ; ce n'est à vrai dire pas une démonstration générale, mais l'idée sous-jacente est bien rigoureuse.

Un principe très fondamental en optique est de dire que la lumière essaie toujours d'aller d'un point A à un point B en un minimum de temps (on appelle cela le principe de moindre action).

Pour contextualiser un peu le sujet, prenons l'exemple d'un maître nageur, initialement au point A sur la plage, qui veut sauver le plus vite possible un nageur étant situé au point B dans l'eau. On note $v_1 = 5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ la vitesse du maître nageur sur le sable, et $v_2 = 2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ la vitesse du maître nageur dans l'eau.

Le but est alors de déterminer le point I (voir figure 2) "idéal" pour passer de la plage vers la mer. Ici, les longueurs $l = 3\,\mathrm{m}$, $L = 10\,\mathrm{m}$ et $D = 20\,\mathrm{m}$ sont des constantes ; x est la valeur que l'on cherche à déterminer pour le sauvetage optimal.

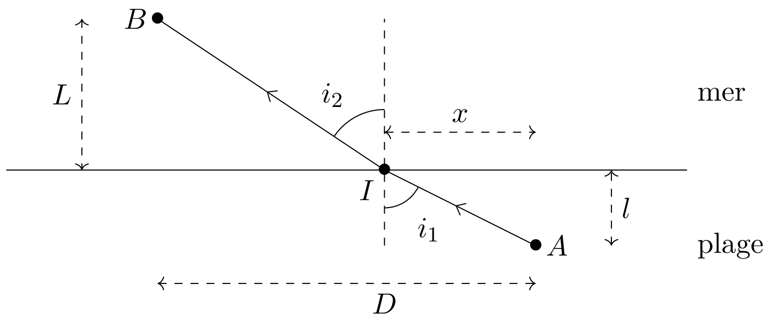

FIGURE 2 – Trajectoire possible pour le sauvetage du nageur (x est quelconque ici).

Question 2 : À l'aide du théorème de Pythagore, exprimer les distances AI et BI en fonction de L, l et x.

Question 3 : Exprimer la durée de sauvetage T' en fonction des données de l'énoncé (v_1, v_2, L, l et D) pour sauver le nageur si l'on prend $x = 0$. Calculer alors la valeur de T'.

Question 4 : On revient dans le cas général (x n'est pas forcément égal à 0). Exprimer la durée T_1 pour aller de A vers I en fonction de v_1, l et x. De même, exprimer la durée T_2 pour aller de I vers B en fonction de v_2, L, x et D.

Question 5 : On note $T = T_1 + T_2$ la durée totale du sauvetage : T est une fonction de x. Sous quelle condition mathématique $T(x)$ est-elle minimale ? Montrer alors que cela correspond à $\dfrac{1}{v_1}\dfrac{\mathrm{d}AI}{\mathrm{d}x} + \dfrac{1}{v_2}\dfrac{\mathrm{d}BI}{\mathrm{d}x} = 0$.

Question 6 : On admet que la dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}AI}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{AI}$.

Question 7 : On admet de plus que $\frac{\mathrm{d}BI}{\mathrm{d}x} = -\frac{D-x}{BI}$. En exprimant $\cos i_1$ et $\cos i_2$ en fonction de D, x, AI et BI, déduire des questions précédentes que l'on retrouve la loi de la réfraction à un facteur c près.

2 Application aux fibres optiques à saut d'indice

Une fibre optique est un dispositif exploitant les propriétés optiques d'un matériau afin de propager un signal lumineux entre deux points sans perte d'information. Elle est constituée du cœur, par lequel la lumière passe, de la gaine, assez réfringente pour empêcher tout phénomène de réfraction, et d'une protection empêchant toute attaque extérieure (voir figure 3).

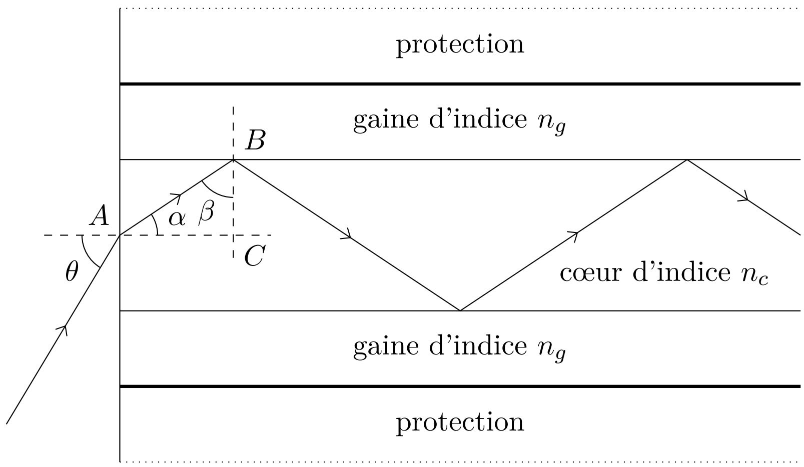

FIGURE 3 – Vue en coupe d'une fibre à saut d'indice.

Intéressons-nous à la réflexion ayant lieu au point B. On suppose ici qu'une partie du rayon incident se fait bien réfractée vers la gaine (voir figure 4).

Question 8 : Exprimer β' en fonction de β, en justifiant la réponse.

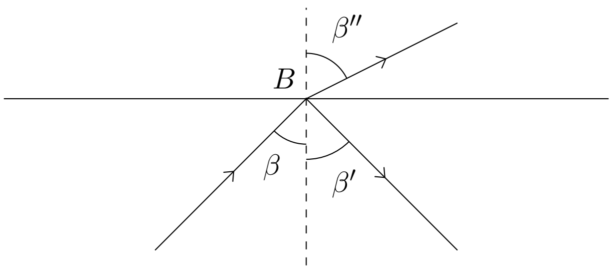

FIGURE 4 – Réflexion et réfraction au point B.

Question 9 : Quelle condition doit-on imposer entre n_c et n_g, indices du cœur et de la gaine, pour que l'angle d'incidence soit plus faible que l'angle de réfraction ? Exprimer $\sin \beta''$ en fonction de n_c, n_g et $\sin \beta$.

Question 10 : Quelle est la valeur maximale pouvant être atteinte par $\sin \beta''$? À quelle valeur de β'' correspond ce cas ?

Question 11 : On note β_{lim} la valeur limite de β telle que $\sin \beta''$ est maximal. Montrer que $\beta_{\text{lim}} = \arcsin \dfrac{n_g}{n_c}$.

Réflexion totale

Si l'indice n_2 du deuxième milieu est plus petit que l'indice n_1 du premier milieu, le rayon réfracté n'existe que lorsque l'angle d'incidence i_1 est inférieur à :

$$i_{\text{lim}} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

Si i_1 est supérieur à i_{lim}, il n'y a pas de réfraction : c'est la **réflexion totale**.

Revenons à présent sur le schéma de la figure 3. On se place dans le cas limite où $\beta = \beta_{\text{lim}} = \arcsin \dfrac{n_g}{n_c}$.

Question 12 : Déterminer l'expression de α_{lim} en fonction de n_c et n_g, puis celle de $\sin(\alpha_{\text{lim}})$. On admettra que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Question 13 : On appelle ouverture numérique d'une fibre optique la valeur maximale de $\sin\theta$. En prenant un indice de l'air égal à 1, montrer que l'ouverture numérique de la fibre est égale à $\sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

Question 14 : On a $n_c = 1{,}456$ et $n_g = 1{,}410$. Calculer l'ouverture numérique de la fibre, et en déduire la valeur limite pour θ.

S'il reste du temps/si vous avez déjà fini

On suppose que le cœur est un cylindre de rayon $r_c = 5\,\mu\mathrm{m}$, et que la longueur L de la fibre optique est de $50\,\mathrm{km}$. On note d la distance parcourue par la lumière du point A jusqu'à la sortie de la fibre optique : c'est une fonction de l'angle θ.

Question 15 : Si $\theta = 0$, que vaut d ?

Question 16 : On se place pour le reste des questions dans le cas le plus défavorable, c'est à dire lorsque tous les angles sont les angles limite. Que représente le nombre $N = \dfrac{L}{AC_{\text{lim}}}$? Exprimer la distance maximale d_{max} parcourue par la lumière en fonction de AB_{lim} et de N.

Question 17 : On admet que $AC_{\text{lim}} = AB_{\text{lim}} \times \sin\beta_{\text{lim}}$. Donner alors l'expression de d_{max} en fonction de L et de β_{max}, puis en fonction de L, n_c et n_g. Calculer d_{max}. Cette valeur dépend-elle du rayon du cœur ?

Question 18 : Calculer la vitesse v_c de l'onde lumineuse dans le cœur, puis la durée maximale T_{max} prise par celle-ci pour se propager d'un bout à l'autre de la fibre. Quel est le retard Δt pris par rapport au cas où $\theta = 0$?