Parcours Sciences

Ondes 1 : Ondes confinées

1 Ondes progressives

1.1 Définitions

Onde progressive
Une onde progressive est la propagation d'un signal dans une certaine direction de l'espace, avec une certaine vitesse de propagation dont la norme c est appelée célérité.

Prenons l'exemple de la propagation d'une perturbation le long d'une corde (figure 1). On suppose qu'il n'y a pas de perte énergétique (frottements solides ou fluides), ce qui assure la conservation de la forme de l'onde.

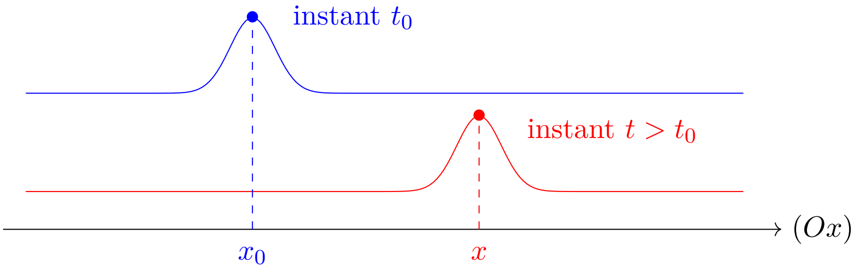


FIGURE 1 – Propagation d'une perturbation le long d'une corde à deux instants t_0 et t.

Appelons $s(x, t)$ l'altitude de la corde à l'abscisse x et à l'instant t, et notons c la célérité de l'onde.

Question 1 : Donner la relation liant t, t_0, x, x_0 et c.

Question 2 : Quel est le lien entre $s(x, t)$ et $s(x_0, t_0)$? En déduire, à l'aide de votre réponse à la question précédente, que s ne dépend en fait que de $x - ct$ et de t_0.

Question 3 : t_0 est-elle une variable du problème ? En déduire que $s(x,t)$ peut s'écrire comme une fonction de la variable $x - ct$: $s(x,t) = f(x - ct)$.

Question 4 : Imaginons que l'onde aille en fait dans la droite vers la gauche. Expliquer pourquoi cela correspond à étudier la fonction $s(x, -t)$.

Écriture mathématique d'une onde progressive

Une onde progressive se propageant sans déformation selon l'axe (Ox) peut s'écrire :

- $s_{\rightarrow}(x,t) = f(x - ct)$ si elle se propage dans le sens des x croissants ;
- $s_{\leftarrow}(x,t) = g(x + ct)$ si elle se propage dans le sens des x décroissants.

1.2 Onde progressive sinusoïdale

Prenons l'exemple d'une onde progressant dans le sens des x croissants : on pourra écrire $s(x,t) = S\cos(ax - act + \varphi)$ (on choisit ici une forme très générale pour $f(u)$: $f(u) = S \times \cos(au + \varphi)$).

Question 5 : Montrer que l'on peut écrire $s(x,t) = S\cos(kx - \omega t + \varphi)$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsation du signal. Exprimer k en fonction de ω et c.

Écriture mathématique d'une onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive **sinusoïdale** (ou **harmonique**) se propageant selon l'axe (Ox) peut s'écrire :
- $s_{\rightarrow}(x,t) = S\cos(kx - \omega t + \varphi)$ si elle se propage dans le sens des x croissants ;
- $s_{\leftarrow}(x,t) = S\cos(kx + \omega t + \varphi)$ si elle se propage dans le sens des x décroissants.

ω est la **pulsation temporelle** de l'onde en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ et k est le **nombre d'onde** en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. On a notamment $\omega = kc$, où c est la célérité de l'onde.

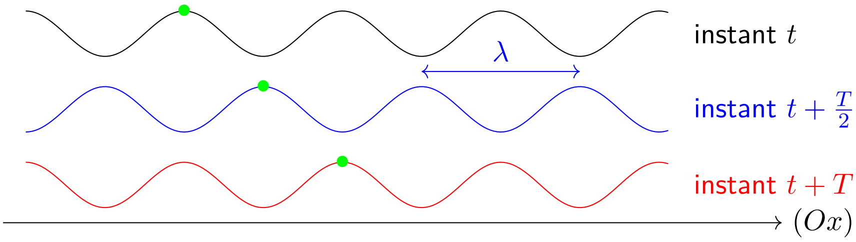
Question 6 : Comment évolue l'onde si l'on attend une durée T à x fixé ? Comment évolue l'onde si l'on avance d'une distance $\frac{2\pi}{k}$ à t fixé ?

Double périodicité spatiale et temporelle

Une onde progressive périodique possède une double périodicité :

– Sa **période temporelle** $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la durée minimale séparant deux valeurs identiques de l'onde en un point donné : $s(x, t + T) = s(x, t)$;

– Sa **période spatiale** $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ est la distance minimale séparant deux points où la valeur de l'onde est la même à un instant donné : $s(x + \lambda, t) = s(x, t)$.



Question 7 : Montrer alors que l'on a $\lambda = \frac{c}{f}$.

2 Application à l'expérience de Melde

Prenons l'exemple d'une corde, dont l'extrémité gauche (en $x = 0$) est tenue par Alice et dont l'extrémité droite (en $x = L$) est fixe ; par exemple, accrochée à un mur. Alice lance un coup sec sur la corde (voir figure 2).

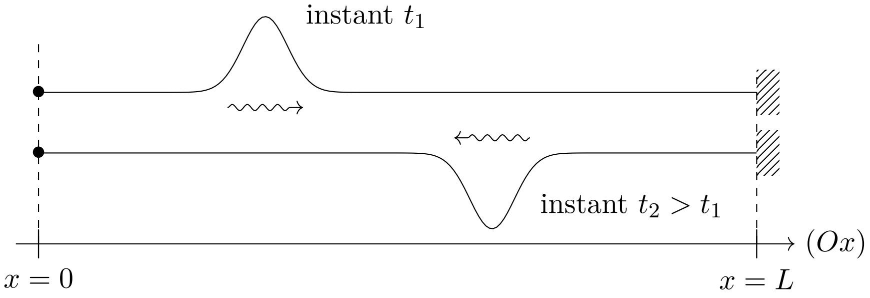


FIGURE 2 – Réflexion d'une perturbation le long d'une corde à deux instants t_1 (haut) et t_2 (bas).

On voit que, après la réflexion de l'onde sur le mur, la perturbation se retrouve renversée par rapport à son état d'origine.

Imaginons à présent qu'Alice agite son extrémité de façon périodique et sinusoïdale, de pulsation ω : l'onde qu'émet Alice est de la forme $s_{\rightarrow}(0, t) = S \cos(\omega t)$.

Question 8 : Donner l'expression générale de $s_{\rightarrow}(x, t)$. On suppose que la réflexion est élastique (pas de perte d'énergie) : donner l'expression de $s_{\leftarrow}(x, t)$, onde réfléchie par le mur. On y fera apparaître une éventuelle phase φ à déterminer.

L'onde globale représentant l'onde incidente $\rightarrow$ et l'onde réfléchie $\leftarrow$ est égale à la somme des deux ondes : $s(x, t) = s_{\rightarrow}(x, t) + s_{\leftarrow}(x, t)$.

Question 9 : À l'aide de la formule $\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$, montrer que $s(x, t) = 2\ S \sin(\omega t) \sin(kx)$.

Définition et écriture mathématique d'une onde stationnaire
Une **onde stationnaire** est le phénomène résultant de la propagation simultanée dans des sens opposés de plusieurs ondes de même fréquence et de même amplitude.
Une telle onde peut s'écrire sous la forme $s(x,t) = S_0 \cos(\omega t + \phi)\cos(kx + \psi)$.

Question 10 : Quelle condition le mur impose-t-il sur $s(x = L, t)$? Cette condition étant vraie pour tout t, en déduire que, nécessairement, kL doit être un multiple entier de π : $kL = m\pi$ avec $m \in \mathbb{N}$.

Question 11 : Déduire de la question précédente les longueurs d'onde $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ possibles pour l'onde stationnaire, puis les pulsations $\{\omega_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ possibles pour cette même onde.

Modes propres de la corde de Melde
Les **conditions aux limites** de la corde (fixée à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$) imposent que les fréquences des ondes stationnaires la parcourant sont **quantifiées** : elles ne peuvent prendre que les valeurs $f_m = \dfrac{mc}{2L}$ où m est un entier positif.
Chacune de ces fréquence f_m définit un **mode propre** m de la corde.
Une onde stationnaire quelconque est une **superposition** de modes propres : cela explique pourquoi on observe alors des spectres discrets (constitués des fréquences f_m).

L'onde stationnaire $s(x,t)$ a été tracée sur la figure 3 à différents instants pour observer son évolution, pour le mode propre $m = 5$.

Question 12 : En quels points les interférences des deux ondes sont constructives ? destructives ?

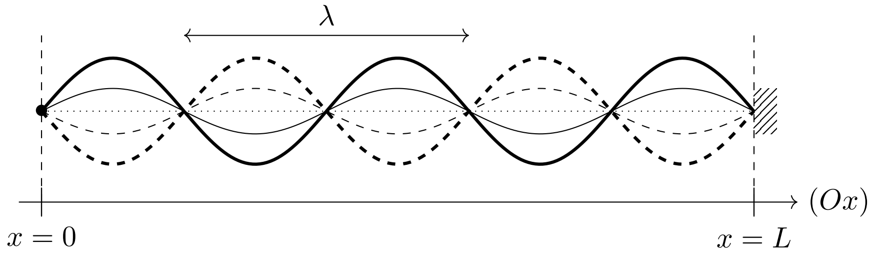


FIGURE 3 – Onde stationnaire le long d'une corde à t (gras, plein), $t + T/6$ (plein), $t + T/4$ (pointillés) $t + 2T/6$ (traitillés) et $t + T/2$ (gras, traitillés).

> **Nœuds et ventres d'une onde stationnaire**
> Un **nœud de vibration** est une position où la perturbation a une amplitude nulle : on a, en reprenant les notations du point cours sur les ondes stationnaires, $\cos(kx + \psi) = 0$.
> Un **ventre de vibration** est une position où la perturbation a une amplitude maximale : on a $\cos(kx + \psi) = \pm 1$.
> Deux nœuds ou deux ventres de vibration successifs sont séparés d'une distance $\dfrac{\lambda}{2}$.
> Pour la corde de Melde, un mode propre m contient m ventres et $m + 1$ nœuds.

3 Vers le confinement quantique

La mécanique quantique est le domaine de la physique s'intéressant aux corps de très petite taille (typiquement, de l'ordre de la taille de l'atome). À cette échelle, il s'avère que l'on peut considérer qu'une particule peut se comporter aussi bien comme un corpuscule que comme une onde.

Prenons par exemple un proton, que l'on enferme dans une boîte un peu plus grande que celui-ci : on sait fabriquer de tels *puits quantiques* en laboratoire. Si l'on considère que le proton est une onde, on ne peut pas dire que le proton est localisé : il existe un peu partout à un instant donné, tout comme l'impulsion donnée à une corde existe en différents endroits.

On associe à cette onde une fonction mathématique $\Psi(x, t)$, appelée fonction d'onde, qui correspond grossièrement à la probabilité de trouver l'onde à une abscisse x à l'instant t.

On peut alors reprendre les résultats précédents pour Ψ : on a une onde qui s'étend et se réfléchit sur les murs de la boîte. Ainsi, le proton est une onde stationnaire, qui se trouve avec davantage de probabilités à un endroit qu'à un autre selon l'énergie $E = \hbar\omega$ qu'on lui fournit.