Mécanique 1 – Mouvements elliptiques et applications aux lois de Kepler

1 Description et paramétrage du mouvement d'un point dans le plan

1.1 Mouvement, référentiel et repère

La mécanique est l'étude des systèmes matériels en mouvement. La mécanique classique, ou newtonienne, est valable tant que la vitesse des systèmes étudiés est très inférieure à celle de la lumière dans le vide (domaine non-relativiste) et tant que la taille des systèmes étudiés est très supérieure à celle d'un atome (domaine non-quantique).

La cinématique est l'étude descriptive des mouvements, indépendamment de leurs causes (forces, moments ou couples).

Le mouvement absolu n'existe pas : un objet est toujours en mouvement par rapport à quelque chose. Pour pouvoir étudier le mouvement d'un système, il est donc nécessaire de définir un référentiel, qui constitue le solide par rapport auquel on observe le mouvement dudit système.

Un référentiel est constitué d'un repère spatial (trois axes orthogonaux pour chaque direction de l'espace) et d'un repère temporel (un chronomètre).

Selon le mouvement du système étudié, différents types de coordonnées peuvent être utilisés, le but étant de simplifier les calculs. Chaque système de coordonnées utilise un jeu de trois coordonnées, reflétant le fait que l'espace dans lequel nous vivons est en trois dimensions.

1.2 Les coordonnées cartésiennes du plan

Coordonnées cartésiennes

Les deux coordonnées cartésiennes d'un point M dans un plan (Oxy) choisi sont rigoureusement notées x_M et y_M :

- x_M est l'abscisse du point M ($x_M \in]-\infty; +\infty[$) ;
- y_M est l'ordonnée du point M ($y_M \in]-\infty; +\infty[$).

Remarque : Dans la pratique, on confond souvent x, relatif à l'axe (Ox), avec x_M, afin d'alléger les notations (même chose pour y et z). Cependant, si l'on étudie les mouvements de deux points M et P, on reviendra aux notations x_M et x_P pour éviter toute confusion.

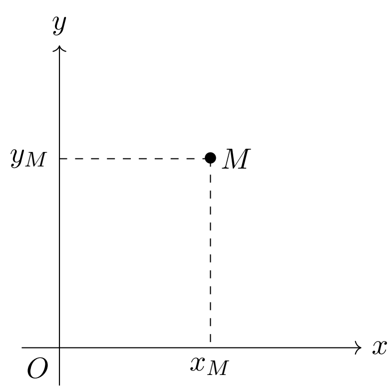

FIGURE 1 – Description de la position d'un point en coordonnées cartésiennes dans le plan.

Vecteur-position
Si O est l'origine d'un repère $\mathcal{R}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est appelé vecteur-position du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.
L'ensemble des positions successives du point M définit sa trajectoire.

Question 1 : Exprimer la distance OM en fonction de x et y.

Question 2 : Que valent les grandeurs $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{e_y}$?

Vecteur-vitesse
On définit le vecteur-vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ d'un point M dans un repère $\mathcal{R}$ à partir de son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$:

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

Le vecteur-vitesse est tangent, en tout point, à la trajectoire et est orienté dans le sens du mouvement.
Si la norme $||\vec{v}(M/\mathcal{R})||$ est constante, le mouvement du point est uniforme.
Si le vecteur $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ a une direction constante, le mouvement du point est rectiligne.

Question 3 : En remarquant que $\overrightarrow{OM} = x(t).\overrightarrow{e_x} + y(t).\overrightarrow{e_y}$, exprimer $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ en fonction de $v_x \triangleq \dot{x}$ et $v_y \triangleq \dot{y}$.

Vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes
Le vecteur-vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{x}(t).\overrightarrow{e_x} + \dot{y}(t).\overrightarrow{e_y}$$

Vecteur-accélération
On définit le vecteur-accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ d'un point M dans un repère $\mathcal{R}$ à partir de son vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ ou de son vecteur-vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$:

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

Question 4 : Exprimer $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ en fonction de $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$.

Vecteur-accélération en coordonnées cartésiennes
Le vecteur-accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ s'exprime, en coordonnées cartésiennes, sous la forme :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \ddot{x}(t).\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}(t).\overrightarrow{e_y}$$

1.3 Les coordonnées polaires

On peut repérer les coordonnées de M dans un plan par ses coordonnées cartésiennes $(x(t), y(t))$, ou bien par ses coordonnées polaires :

Coordonnées polaires
Les deux coordonnées polaires d'un point M contenu dans un repère orthonormé (Oxy) choisi sont rigoureusement notées r_M et θ_M :

- $r_M \triangleq ||\overrightarrow{OM}||$ est la distance entre le point M et l'origine O du plan ($r_M \in [0; +\infty[$) ;
- θ_M est l'angle entre (Ox) et $\overrightarrow{OM}$.

On définit alors deux vecteurs polaires unitaires $\overrightarrow{e_r} \triangleq \dfrac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||}$ (le vecteur radial) et $\overrightarrow{e_\theta}$ orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$ et dirigé dans le sens des θ croissant (le vecteur orthoradial). L'ensemble des deux forme la base polaire.

Remarque : Encore une fois, on note généralement juste r et θ les coordonnées polaire d'un point unique.

Remarque : Attention : ici les vecteurs directeurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ dépendent de la position du point M et donc du temps...

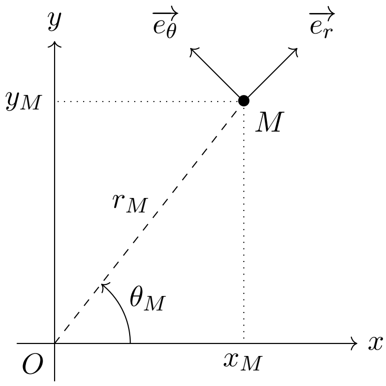

FIGURE 2 – Description de la position d'un point en coordonnées polaires.

Question 5 : Que vaut $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{e_r}$? et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$?

Vecteur-position en coordonnées polaires

En coordonnées polaires, le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$ s'exprime sous la forme :

$$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{e_r}$$

Question 6 : Exprimer x_M et y_M en fonction de r_M et θ_M. Calculer également $\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{e_y}$. Que remarque-t-on ?

Passage de la base polaire à la base cartésienne

Pour passer de la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ à la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, on peut retenir que [a] :

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta.\overrightarrow{e_x} + \sin\theta.\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta.\overrightarrow{e_x} + \cos\theta.\overrightarrow{e_y}$$

a. Ou bien savoir faire le schéma puis projeter...

Question 7 : Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\theta} = \overrightarrow{e_\theta}$, puis que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\overrightarrow{e_r}$.

Question 8 : En remarquant que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \times \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et des vecteurs directeurs polaires.

Question 9 : Exprimer alors le vecteur-vitesse en fonction de $\dot{\theta}$, de $\dot{r}$ et des vecteurs directeurs polaires.

Vecteur-vitesse en coordonnées polaires

Le vecteur-vitesse $\vec{v}(M/\mathcal{R})$ s'exprime, en coordonnées polaires, sous la forme :

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}.\overrightarrow{e_r} + r\ \dot{\theta}.\overrightarrow{e_\theta}$$

Question 10 : Déterminer également l'expression du vecteur-accélération en fonction des dérivées temporelles de θ et de r.

Vecteur-accélération en coordonnées polaires
Le vecteur-accélération $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ s'exprime, en coordonnées polaires, sous la forme :

$$\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\overrightarrow{e_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right).\overrightarrow{e_\theta}$$

2 Démonstration des lois de Kepler

2.1 Résultats préliminaires

Pour toute la partie, on se place dans un repère d'origine S : la planète P se déplace donc autour du Soleil. On repère les coordonnées du point P par ses coordonnées polaires r et θ.

Question 11 : Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\vec{F}_{S\to P}$ que le Soleil S exerce sur une planète P en fonction de la masse M_S du Soleil, de la masse m_P de la planète, de leur distance r, de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$ et des vecteurs unitaires de la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

Question 12 : On suppose que la planète P ne subit que la force gravitationnelle exercée par le Soleil. Appliquer la deuxième loi de Newton à P ; en déduire que l'accélération orthoradiale a_θ de P est nulle.

2.2 Loi des aires

Loi des aires
Si S représente le centre du Soleil et P la position quelconque d'une planète, alors l'aire balayée par le segment $[SP]$ entre deux positions P_1 et P_2 est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions P_1' et P_2' si la durée pour aller de P_1 à P_2 est égale à celle nécessaire pour aller de P_1' à P_2'.

Remarque : La loi des aires est une des trois lois de Kepler décrivant le mouvement des planètes.

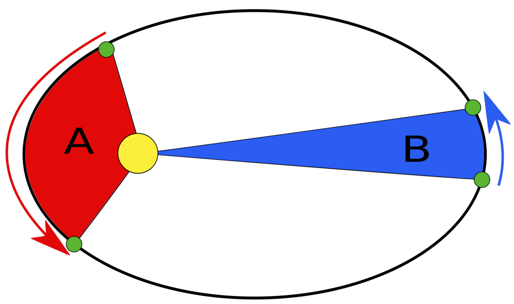

FIGURE 3 – Illustration de la loi des aires.

Question 13 : On pose $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{C}}{\mathrm{d}t} = r \times a_\theta$; en déduire que $\mathcal{C}$ est une constante du mouvement.

On cherche à faire le lien avec l'aire balayée par la planète entre deux instants. Supposons que ces deux instants t et $t + \mathrm{d}t$ soient très rapprochés (la durée $\mathrm{d}t$ les séparant est très petite). On se situe donc dans le cas de la figure 4, où $\mathrm{d}\theta$ est très petit.

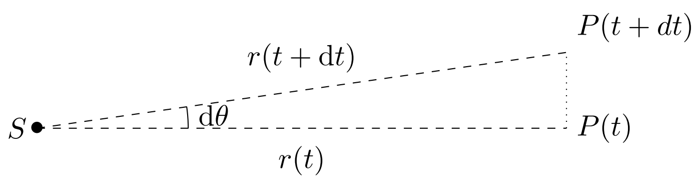

FIGURE 4 – Mouvement infinitésimal de la planète P autour de S.

Question 14 : En remarquant que l'aire balayée $\mathrm{d}\mathcal{A}$ est égale à la moitié de celle d'un rectangle, montrer que $\mathrm{d}\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$.

Question 15 : En déduire que $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathcal{C}}{2}$. Montrer alors que l'aire $\mathcal{A}$ balayée entre deux instants t_1 et t_2 ne dépend effectivement que de la durée Δt entre ces deux instants.

2.3 Loi des périodes

Supposons, pour simplifier les calculs qui vont suivre, que le mouvement de la planète P soit circulaire (c'est à peu près le cas pour certaines planètes, comme la Terre). On a donc $r =$ cste.

Question 16 : Que peut-on dire alors de $\dot{r}$ et $\ddot{r}$? En déduire une simplification pour le vecteur-accélération.

Question 17 : Montrer que la projection radiale de la deuxième loi de Newton appliquée à P donne alors que $r^3 \times \dot{\theta}^2 =$ cste. Cette constante dépend-elle de la planète considérée ?

Question 18 : On rappelle que $\mathcal{C} = r^2\dot{\theta}$ est une constante. Que peut-on alors dire sur $\dot{\theta}$?

Notons $\dot{\theta} = \omega$: ω est une constante du mouvement ; en d'autres termes, la planète avance à la même vitesse à chaque instant. Ce résultat est bien cohérent, puisqu'on se situe toujours à la même distance du Soleil.

Faisons une analogie avec la vitesse v : lorsque la vitesse est constante, on peut dire que $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Ici, on a donc $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$.

Question 19 : Si $\Delta t = T$, où T est la période de révolution autour du Soleil, que vaut $\Delta\theta$? En déduire que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Question 20 : À l'aide de la question 17, en déduire alors que $\dfrac{r^3}{T^2} = \text{cste}$.

Loi des périodes

Le carré de la période sidérale d'une planète est directement proportionnel au cube du demi-grand axe a de la trajectoire elliptique de la planète.

Remarque : Le demi-grand axe est égale au rayon du cercle pour un mouvement circulaire... d'où notre résultat !